

Astronomia

Lezione 23/10/2015

Docente: Alessandro Melchiorri

e.mail: alessandro.melchiorri@roma1.infn.it

Sito web per le slides delle lezioni:

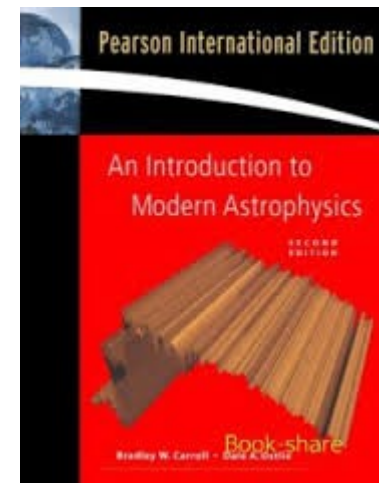
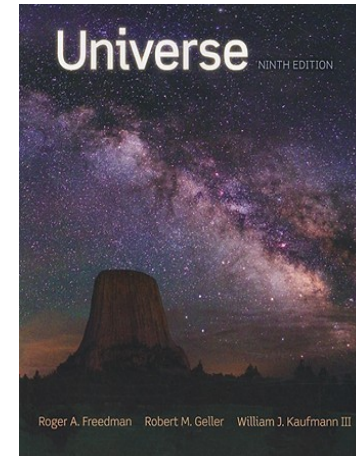
oberon.roma1.infn.it/alessandro/astro2015

Astronomia

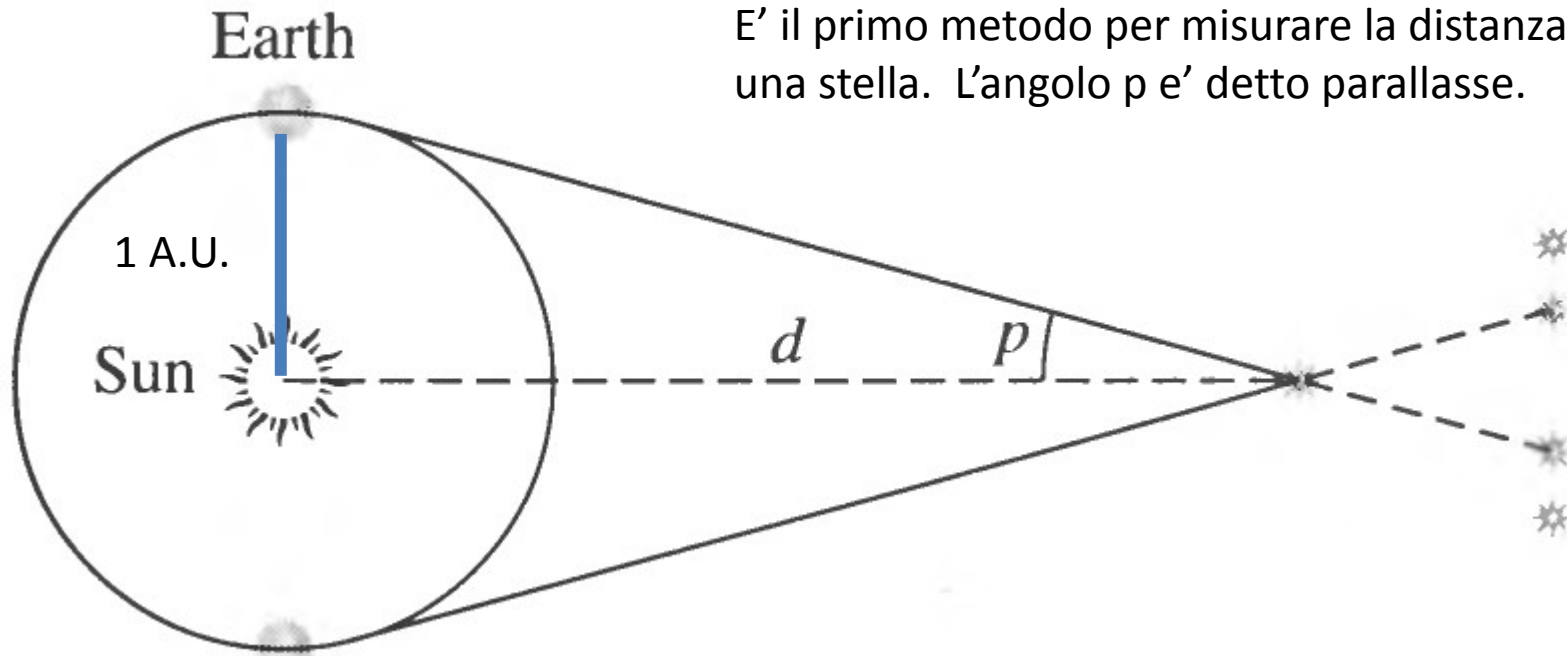
Lezione 23/10/2015

Libri di testo consigliati:

- Universe, R. Freedman, w. Kaufmann, W.H.Freeman and Co., New York
- An introduction to modern astrophysics, B. W. Carroll, D. A. Ostlie, Addison Wesley



Parallasse Stellare



E' il primo metodo per misurare la distanza di una stella. L'angolo p e' detto parallasse.

$$d = \frac{1 \text{ AU}}{\tan p} \simeq \frac{1}{p} \text{ AU}$$

1 radian $\approx 206,265$ arcsec

$$d \simeq \frac{206,265}{p''} \text{ AU.}$$

Se la parallasse si misura in secondi d'arco
Invece di radianti vale questa relazione.

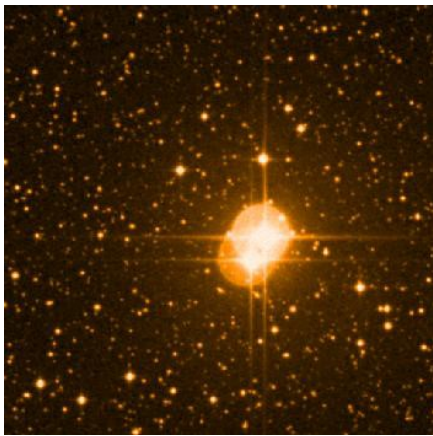
Parallasse Stellare

Si definisce come **parsec** la distanza di una stella con parallasse di 1 secondo d'arco

$$d = \frac{1}{p''} \text{ pc.}$$

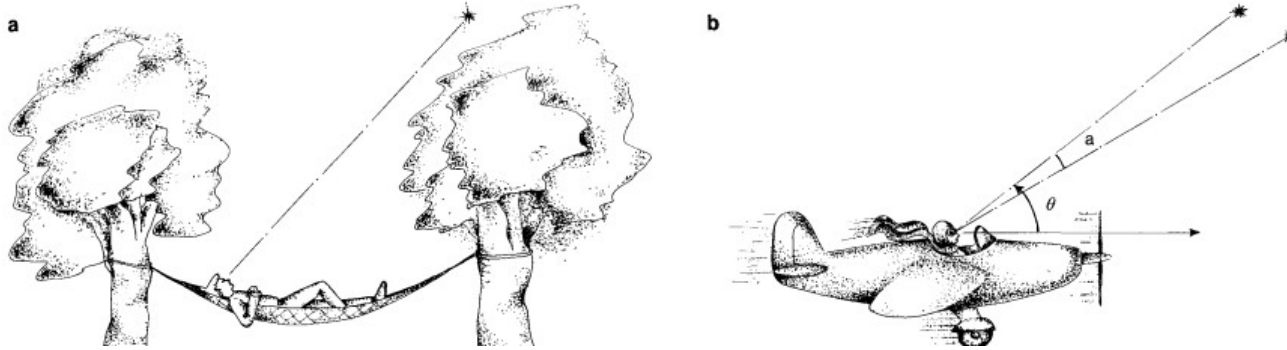
$$1 \text{ pc} \approx 206,265 \text{ AU} \approx 3.26 \text{ ly}$$

Le parallassi delle stelle sono decisamente piccole. La parallasse della stella più vicina (**proxima centauri**) è pari a $p''=0.77''$ corrispondente a 1.3 pc e a 4.3 ly (anni luce).



La prima misura di parallasse di una stella si è avuta nel 1838 da parte di Friedrich Wilhelm Bessel per 61 Cygni. Dopo 4 anni di osservazioni lui stimò per questa stella una parallasse pari a $p''=0.316''$, corrispondente a 3.16 parsec o 10.3 anni luce. Questa stella in realtà sono due (stella binaria) ed ha un elevato moto proprio (è chiamata anche Stella Volante) circa 4000 mas/anno. La parallasse dovuta al moto proprio si può però separare perché non è periodica.

Aberrazione



Se siamo in moto rispetto ad un oggetto questo ci apparirà sottendere un angolo inferiore. Questo fenomeno è chiamato **aberrazione** e dipende dalla velocità finita della luce. L'effetto è dato da:

$$a = \frac{v}{c} \sin \theta$$

Il massimo effetto è dovuto al moto orbitale della terra (pari a circa 21'') mentre l'effetto della rotazione terrestre è 0.3''.

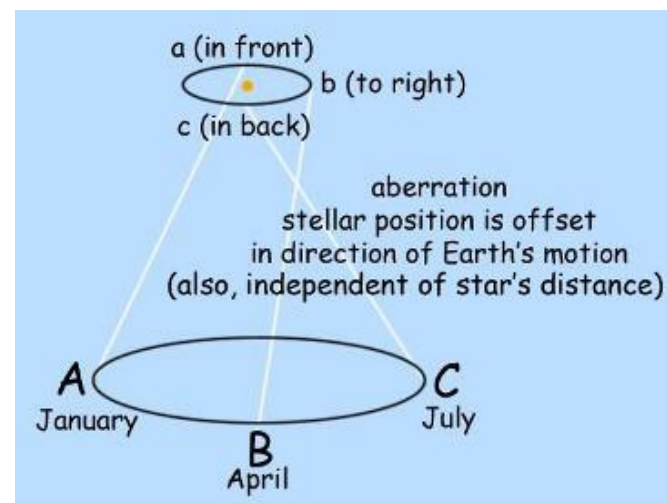
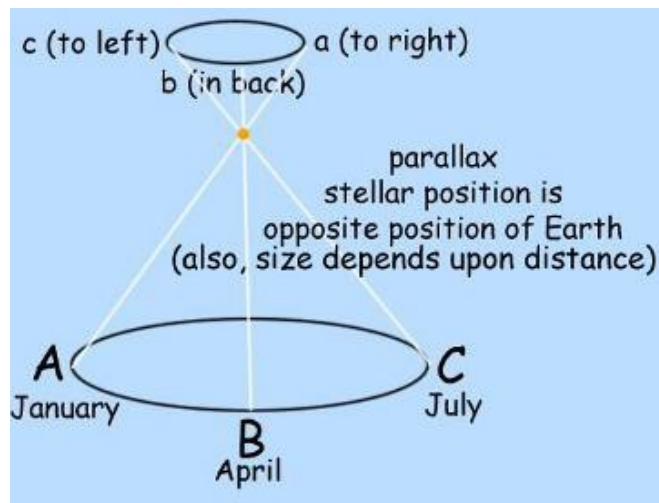
Parallasse Stellare e Misura di c

Nel 1729 l'astronomo inglese James Bradley (1693-1762) annuncio' una scoperta fondamentale.

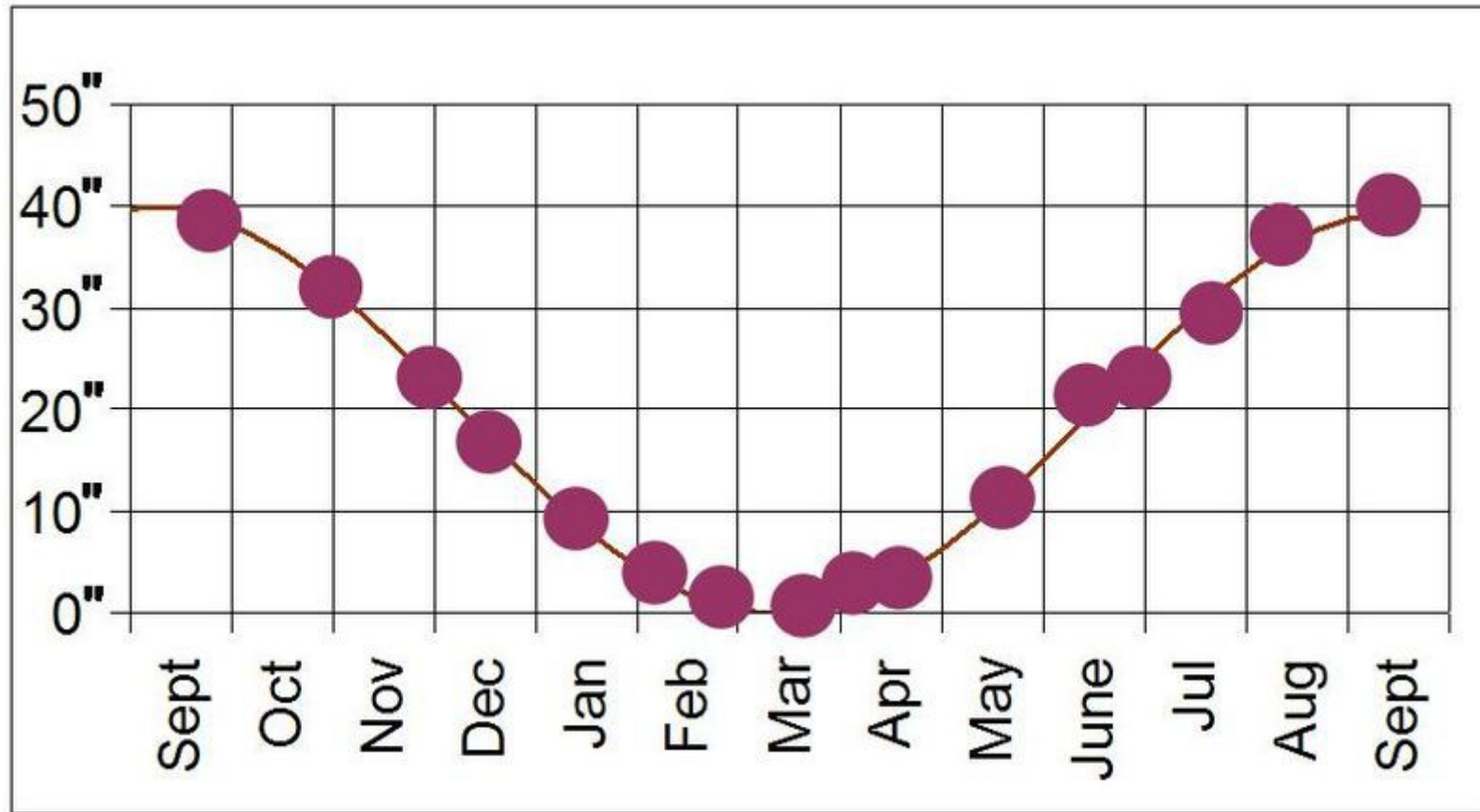
Nel tentativo di misurare la parallasse stellare della stella Gamma Draconis (Eltanin che passa per lo Zenith dell'osservatorio di Greenwich) trovò uno spostamento ma assolutamente non consistente con il moto di parallasse.

Bradley attribuì correttamente l'effetto all'**aberrazione** stellare provando sia che la velocità della luce era finita sia che il sistema ticonico era sbagliato.

Bradley non conosceva la velocità della terra intorno al Sole ma determinò che la luce dovesse andare circa 10210 volte più veloce della Terra intorno al Sole ($c=301000 \text{ km/s}$).



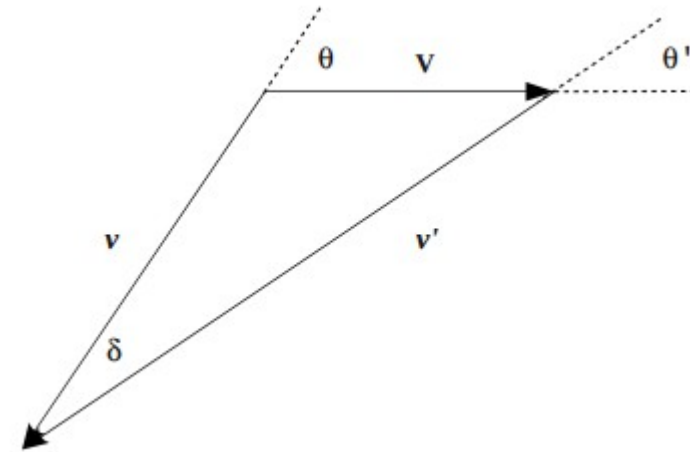
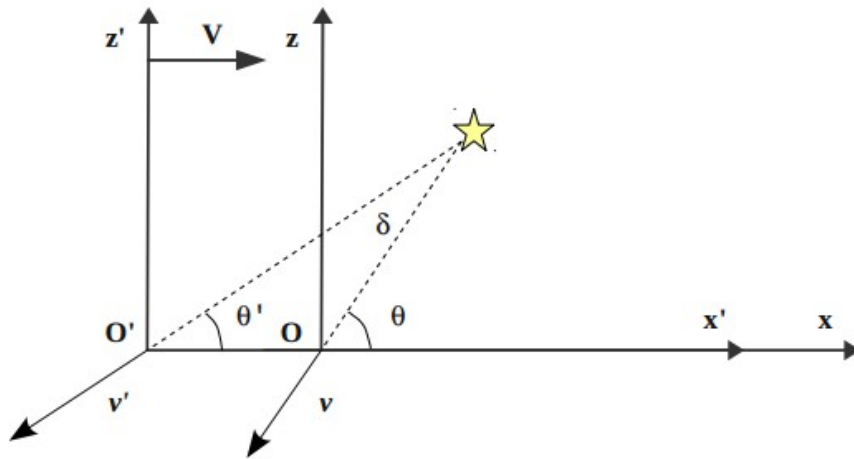
Parallasse Stellare e Misura di c



Spostamento angolare di Eltanin. Si noti che il massimo e minimo capitano intorno agli equinozi, cioè quando la direzione di osservazione è parallela al moto della Terra.

L'ampiezza è prossima ai 40'', la parallasse vera di Eltanin, misurata solo recentemente è di 0.022''.

Aberrazione della Luce (classica)



$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$$

$$\begin{cases} v' \cos(\pi + \theta') = v \cos(\pi + \theta) - V \cos 0 \\ v' \sin(\pi + \theta') = v \sin(\pi + \theta) \end{cases}$$

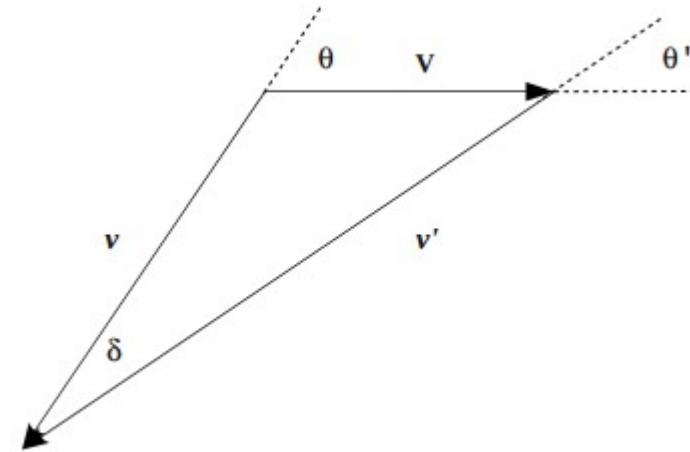
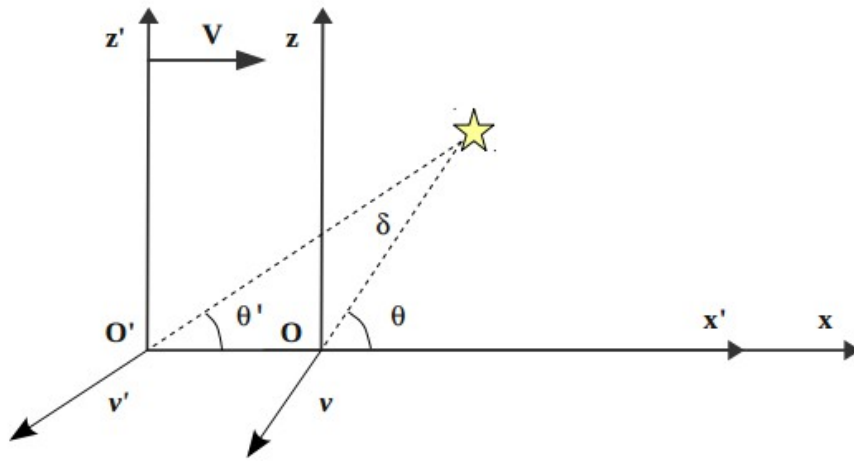
$$\begin{cases} v' \cos \theta' = v \cos \theta + V \\ v' \sin \theta' = v \sin \theta \end{cases}$$

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + V/v}.$$

Da cui si arriva alla formula che abbiamo dato qualche lezione fa usando $v=c$, $V/c \ll 1$ e $\sin(a) \approx a = \sin(\theta - \theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') - \cos(\theta)\sin(\theta')$

$$a = \frac{v}{c} \sin \theta$$

Aberrazione della Luce (Relativistica)



$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2}$$

$$v' \cos(\pi + \theta') = \frac{v \cos(\pi + \theta) - V}{1 - Vv \cos(\pi + \theta)/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$v' \sin(\pi + \theta') = \frac{v \sin(\pi + \theta)}{\gamma(1 - Vv \cos(\pi + \theta)/c^2)}$$

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta + V/v)}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x/c^2)}$$

$$v' \cos \theta' = \frac{v \cos \theta + V}{1 + Vv \cos \theta/c^2}$$

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$v' \sin \theta' = \frac{v \sin \theta}{\gamma(1 + Vv \cos \theta/c^2)}$$

Rifrazione

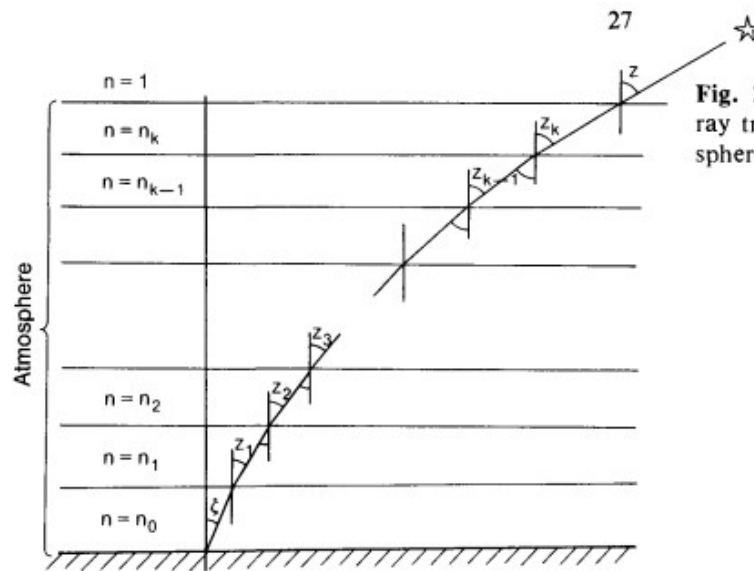


Fig. 2.21. Refraction of a light ray travelling through the atmosphere

La luce di un corpo celeste passa attraverso differenti strati dell'atmosfera ciascuno con Indice di rifrazione diverso. Questo porta ad un dislocamento dell'astro dalla sua posizione vera. Applicando la legge di Snell ai vari strati (z e' la distanza di zenith) si ha:

$$\sin z = n_k \sin z_k ,$$

...

$$n_2 \sin z_2 = n_1 \sin z_1 ,$$

$$n_1 \sin z_1 = n_0 \sin \zeta ,$$

or

$$\sin z = n_0 \sin \zeta .$$

Rifrazione

Per piccoli **angoli di rifrazione** $R=z-\zeta$ si puo' scrivere:

$$n_0 \sin \zeta = \sin z = \sin(R + \zeta) = \sin R \cos \zeta + \cos R \sin \zeta \\ \approx R \cos \zeta + \sin \zeta .$$

Ovvero:

$$R = (n_0 - 1) \tan \zeta$$

come valore medio si ha:

$$R = 58.2'' \tan \zeta .$$

Ci sono due punti da considerare pero':

- 1) allo zenith non si dovrebbe avere rifrazione ma questo e' vero solo se i vari strati atmosferici sono paralleli, cosa che non avviene.
- 2) La formula precedente vale solo per piccoli angoli. Per il Sole al tramonto si ha circa 35', praticamente il suo diametro. (noi vediamo il Sole quando e' già tramontato).

Coordinate celesti

Riassunto

- Abbiamo diversi tipi di coordinate
- **Coordinate Orizzontali:** hanno come piano fondamentale l'orizzonte. La normale passante per l'osservatore individua due punti nel cielo: zenith (su) e nadir (giu'). Coordinate: altezza a e Azimuth A (a partire da un meridiano di scelta). Dipendono da tempo e posizione dell'osservatore.
- **Coordinate Equatoriali:** hanno come piano fondamentale l'equatore terrestre. La normale e' lungo l'asse di rotazione terrestre ed individua il polo nord e sud celeste. Vicino al polo nord c'è la stella polare (polaris). Coordinate: declinazione e ascensione retta calcolata in senso antiorario dal punto vernale (equinozio di primavera).
- **Coordinate Eclittiche:** hanno come piano fondamentale l'eclittica (il piano di rotazione della terra attorno al Sole). Le coordinate sono la latitudine eclittica e la longitudine eclittica (quest'ultima presa in senso antiorario dal punto vernale).

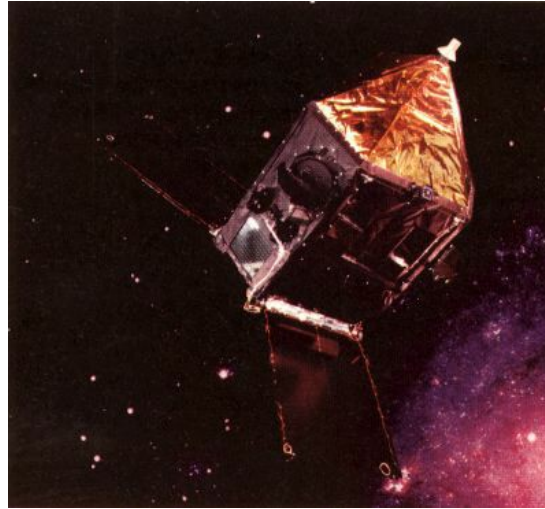
E' possibile fare un cambiamento di coordinate tra orizzontali ed equatoriali conoscendo tempo di osservazione e posizione dell'osservatore (latitudine geografica). Si puo' cambiare da equatoriali ad eclittiche e viceversa conoscendo l'angolo tra eclittica ed equatore.

Perturbazioni:

Anche le coordinate eclittiche e equatoriali dipendono dal tempo per fenomeni su tempi scala maggiori della rotazione terrestre per via di: Precessione, Nutazione, Parallasse, Aberrazione, Rifrazione

Parallasse Stellare

Da terra la parallasse piu' piccola che si puo' osservare corrisponde a $p''=0.02$ equivalente a distanze minori di 50 pc. La misura di parallasse di stelle piu' lontane necessita di missioni su satellite.

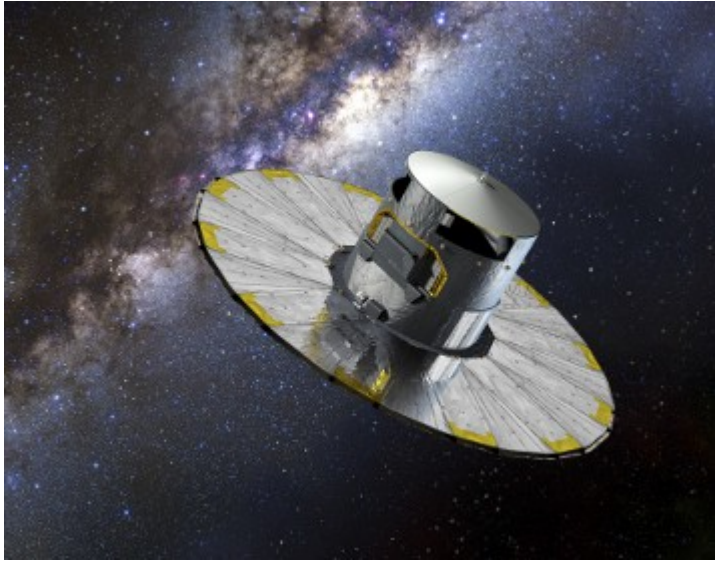


Tra il 1989 ed il 1993 il satellite Hypparcos ha misurato la parallasse di circa 118.000 stelle con una precisione di un millesimo di secondo d'arco, $p''=0.001''$ Corrispondente alla distanza massima di 1 Kpc.

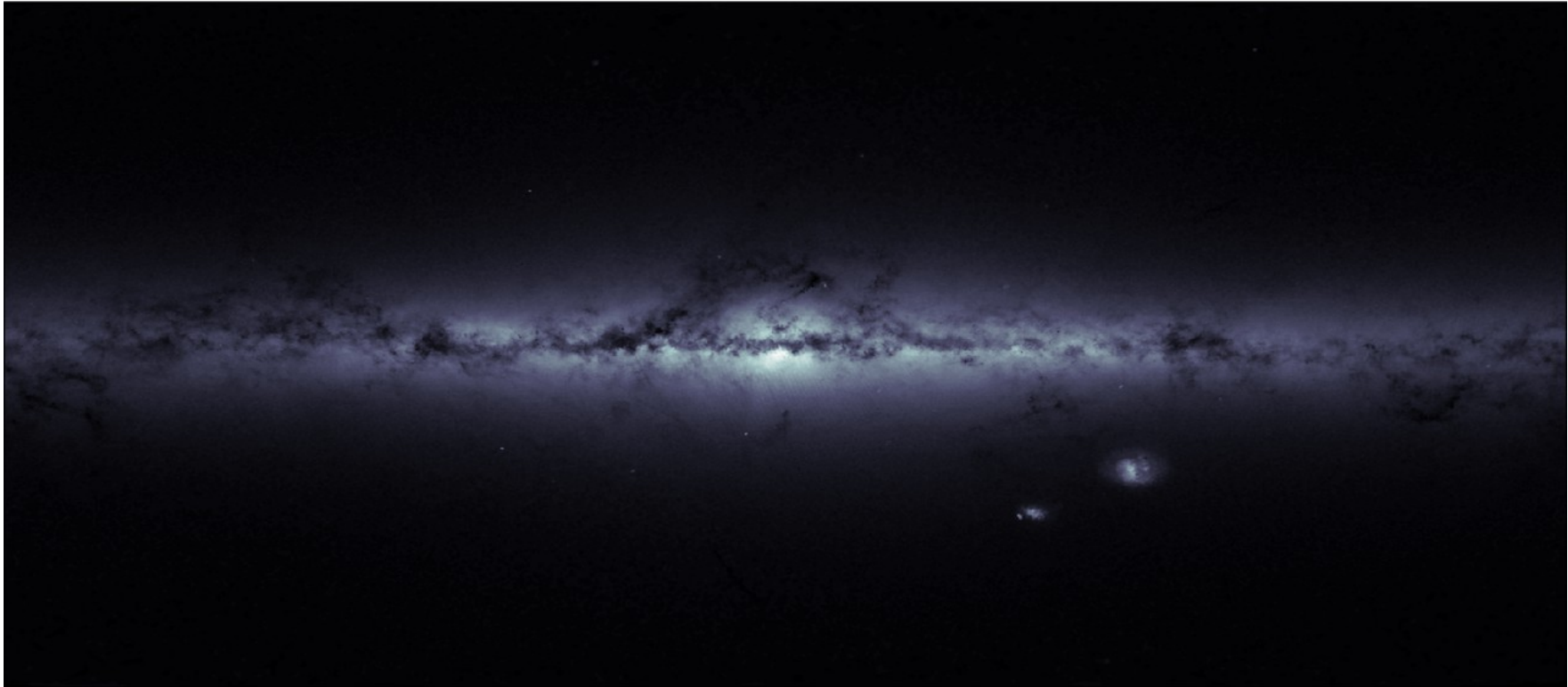
Queste sono ancora distanze piccole (ad esempio il centro della nostra galassia Dista da noi circa 8 Kpc). Quindi la parallasse si puo' misurare solo di stelle vicine.

Prossime missioni come GAIA dovrebbero misurare parallassi di circa 10 microsecondi d'arco ($p''=0.00001$, 10 Kpc) per un miliardo di stelle.

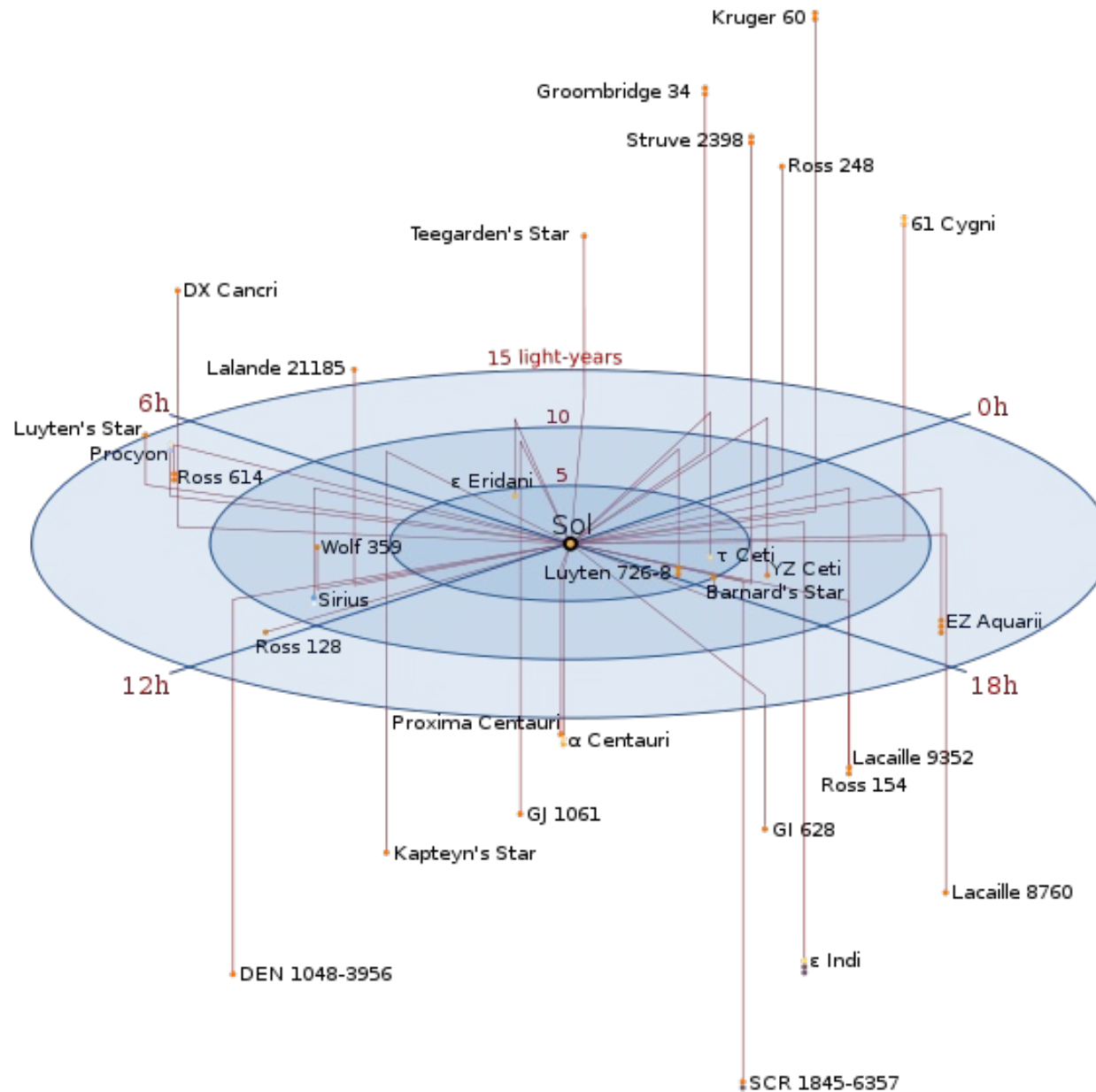
Missione Gaia

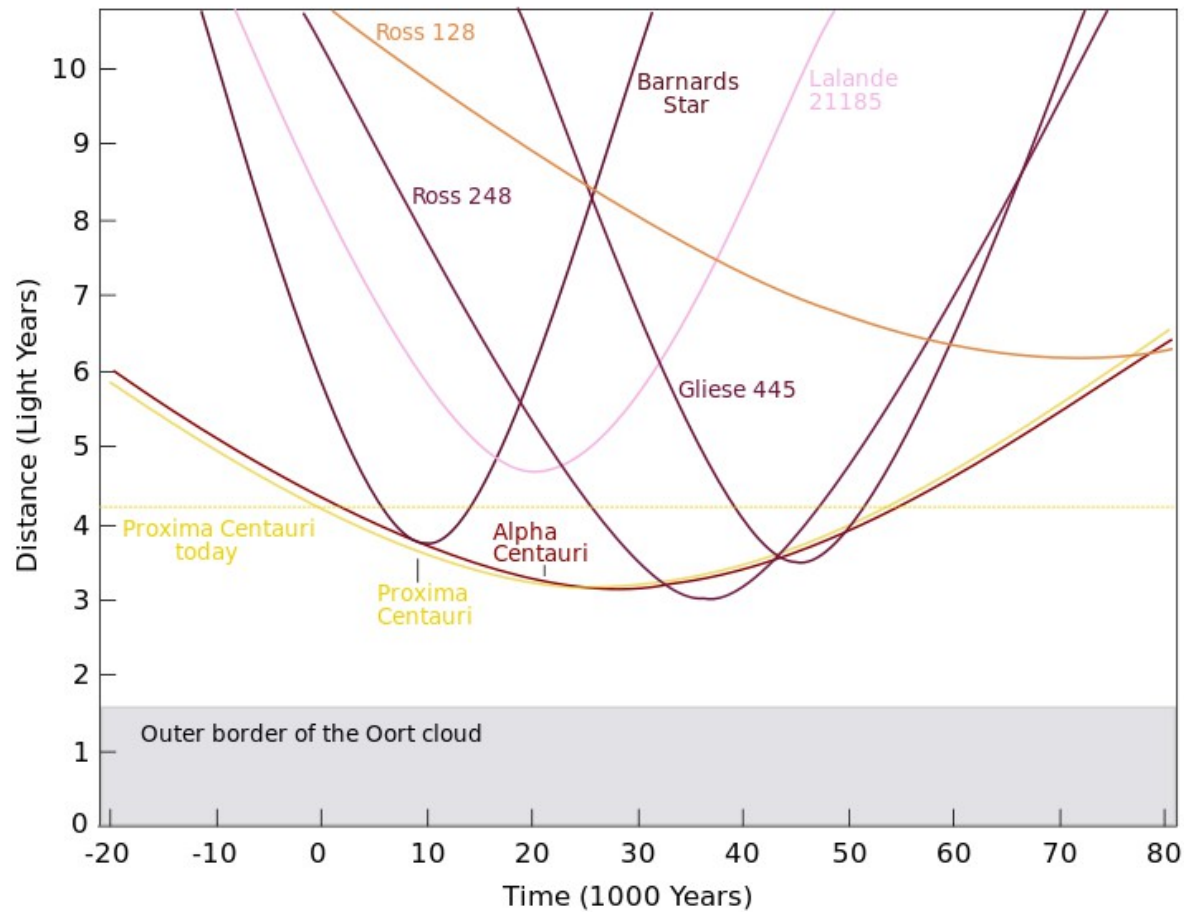


Lanciata nel 2013. Terminerà nel 2018.
Produrrà un catalogo di un miliardo di stelle
nella nostra galassia.
I primi risultati sono previsti il prossimo anno.
Una prima mappa della densità di stelle
nella Via Lattea basata sui dati di Gaia è
stata rilasciata nel 2015.



Mappa delle stelle piu' prossime al Sole (entro 14 anni luce)





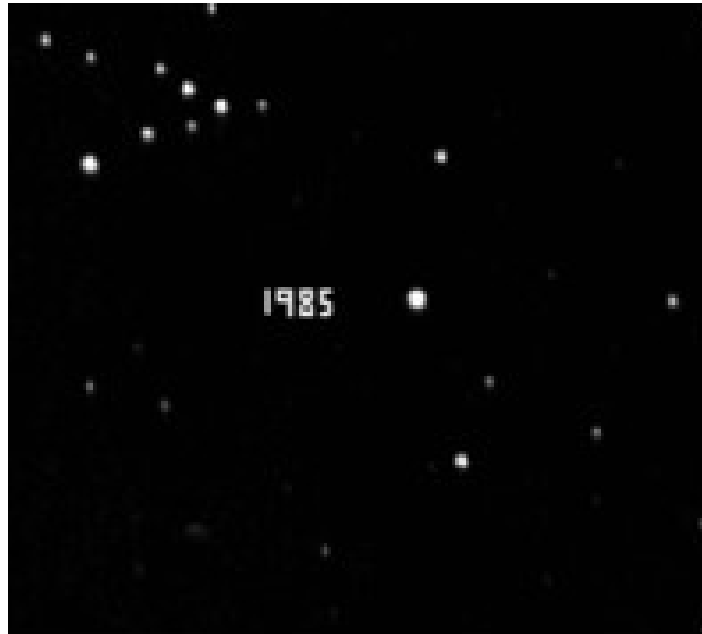
Al momento Proxima Centauri e' la stella piu' vicina e... si sta avvicinando !

Il minimo si avra' tra 24.000 anni.

Tra 10.000 anni anche la stella di Barnard sara' «vicina».

Fra 30.000 anni la piu' vicina sara' Ross 248.

Stella fuggitiva di Barnard

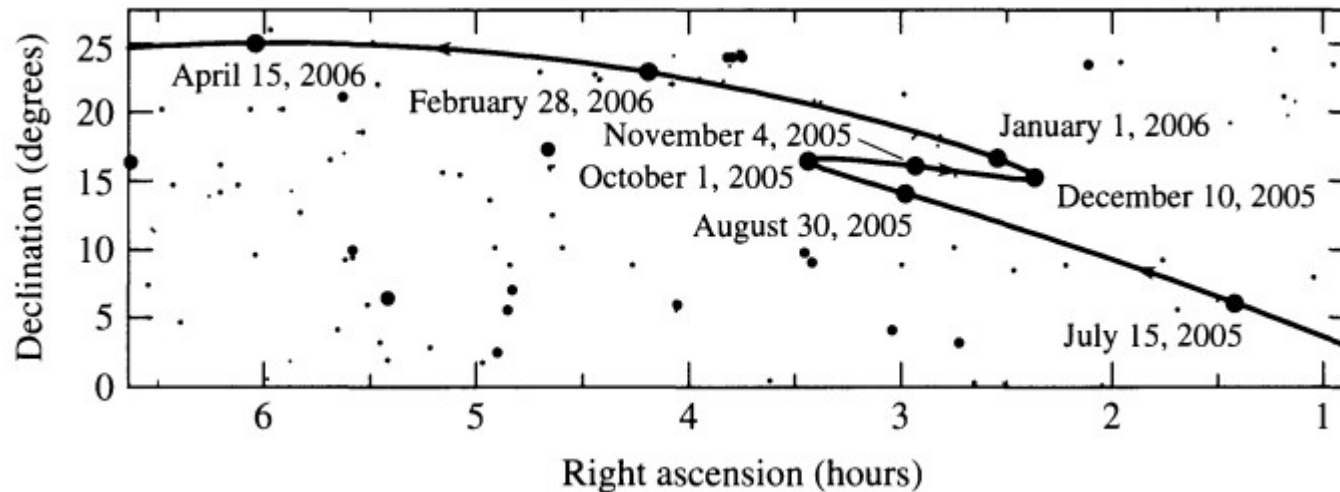


La **Stella di Barnard** è una stella nella costellazione dell'Ofiuco. Mostra il più grande moto proprio di ogni altra stella conosciuta (a parte il Sole), pari a **10,3 secondi d'arco all'anno**. Questo grande moto proprio fu scoperto dall'astronomo Edward Emerson Barnard nel 1916.

Il moto retrogrado dei pianeti

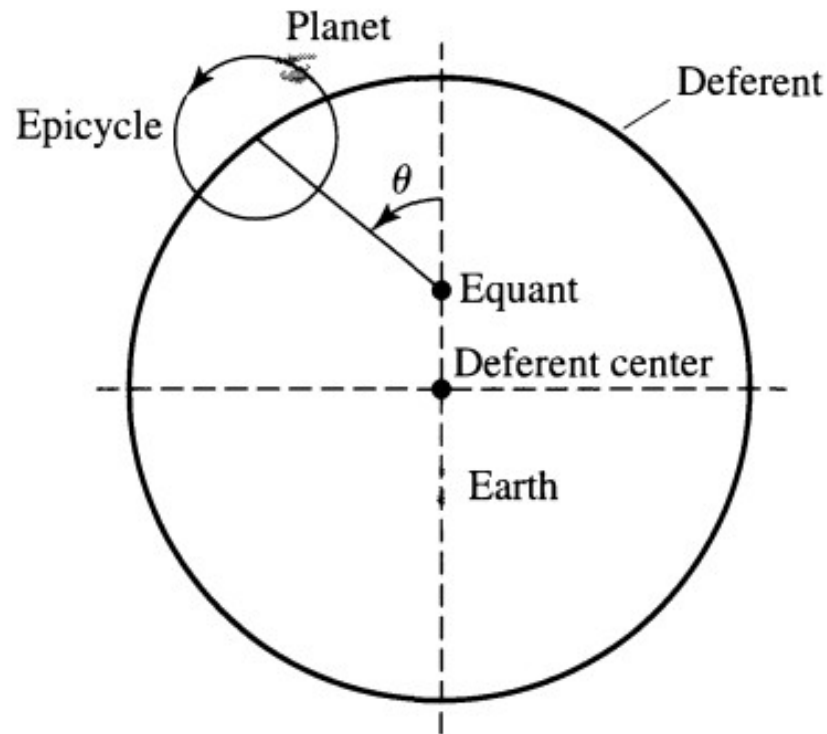
Alcune stelle pero' mostrano di non seguire l'andamento delle stelle fisse ma sono come erranti, queste sono chiamate «pianeti» (dal termine di «vagabondo» in greco).

In particolare un pianeta come Marte si muove lentamente da ovest ad est rispetto alle stelle fisse ma poi «tornare indietro» ad un certo momento per poi ritornare al moto normale.



Ipparco (150 a.c.) risolse il problema del moto retrogrado mettendo i pianeti a Ruotare attorno a dei piccoli **epicicli** che a loro volta ruotavano in modo piu' ampio Attorno alla terra lungo un **deferente**.

Il sistema Tolemaico



Con il progredire delle osservazioni il sistema degli epicicli non andava piu' bene. Tolomeo (circa 100 d.c.) introduce allora l'**equante**. Gli epicicli ruotano circolarmente a velocita' angolare costante intorno all'equante che e' dislocato rispetto al centro del deferente (centro della terra). L'idea platonica di moto circolare uniforme e' praticamente scomparsa. Il modello tolemaico divenne sempre piu' complesso aggiungendo «epicicli» ulteriori negli anni ma non venne messo in discussione per secoli.

La rivoluzione Copernicana

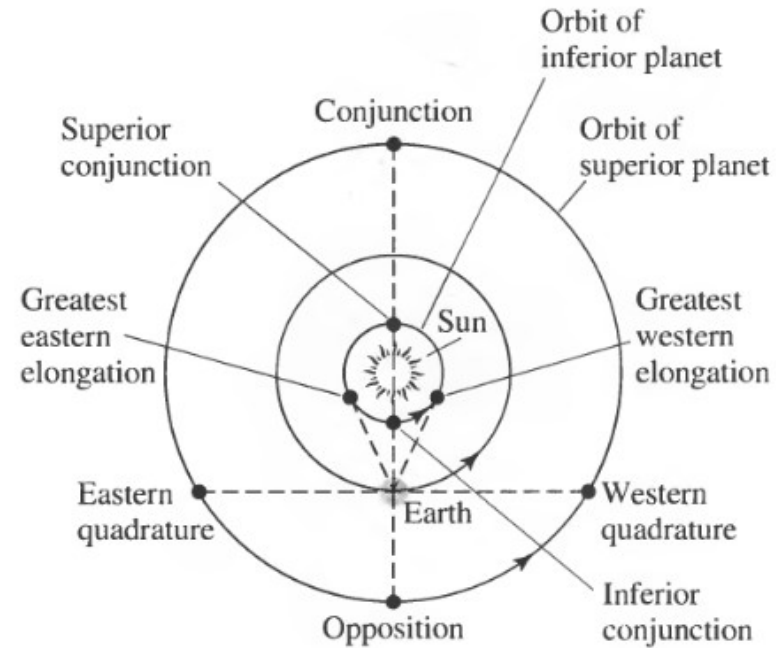


E' necessario attendere Copernico (1473-1534) che, nei suoi ultimi anni di vita, pubblica il *De Revolutionibus Orbium Coelestium* introducendo la teoria copernicana con il Sole Al centro e orbite **circolari** degli altri pianeti.

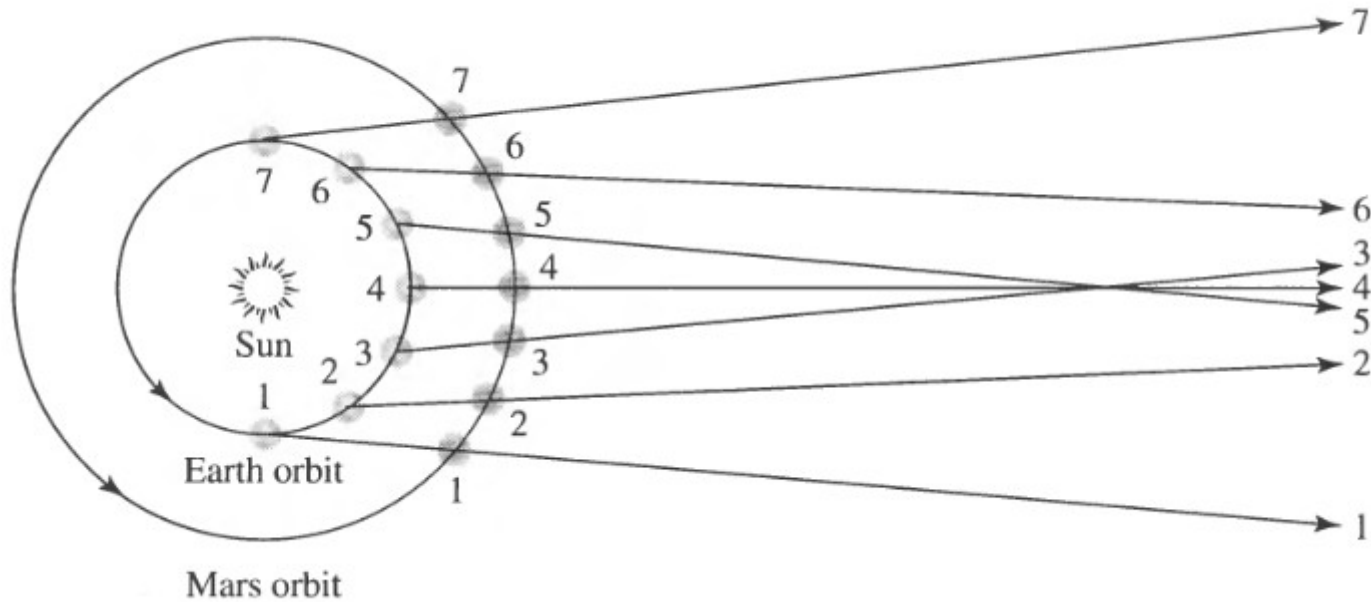
La rivoluzione Copernicana

Il modello Copernicano era molto più semplice e permetteva di risolvere anche altri punti:

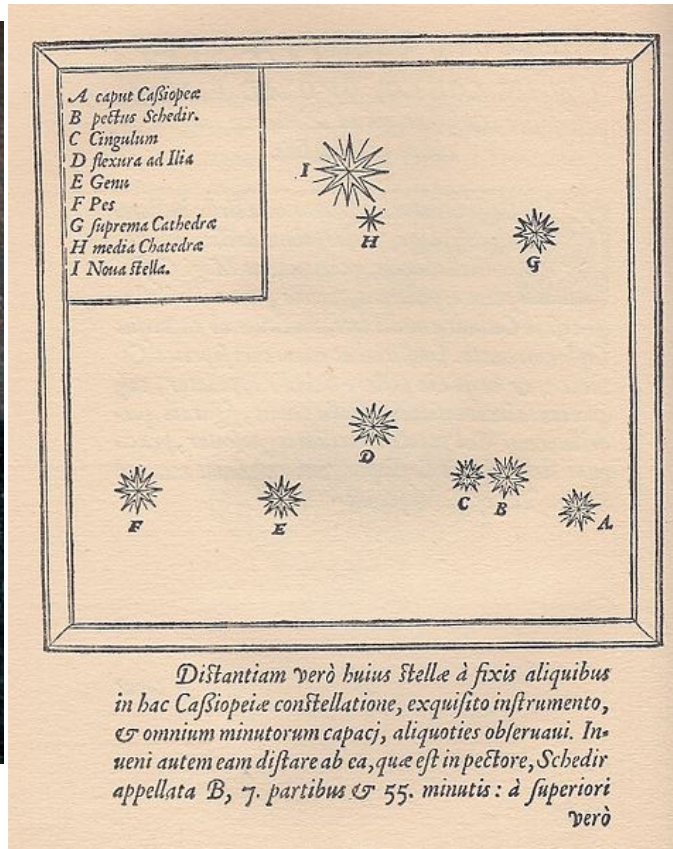
- Mercurio e Venere vengono visti al massimo ad una distanza di 28° e 47° rispettivamente dal Sole (non sono mai in opposizione). Per questo prendono il nome e di **pianeti inferiori o interni**. Si definiscono **Massima Elongazione est o ovest** le loro massime distanze angolari dal Sole. Solo questi pianeti possono trovarsi tra la terra ed il Sole (**congiunzione inferiore**).
- Gli altri pianeti (Marte, Giove, Saturno, etc) sono su orbite esterne, si chiamano pianeti **superiori o esterni** si possono trovare in **opposizione** e **congiunzione** (vedi figura).



Modello Copernicano e Pianeti «Retrogradi»



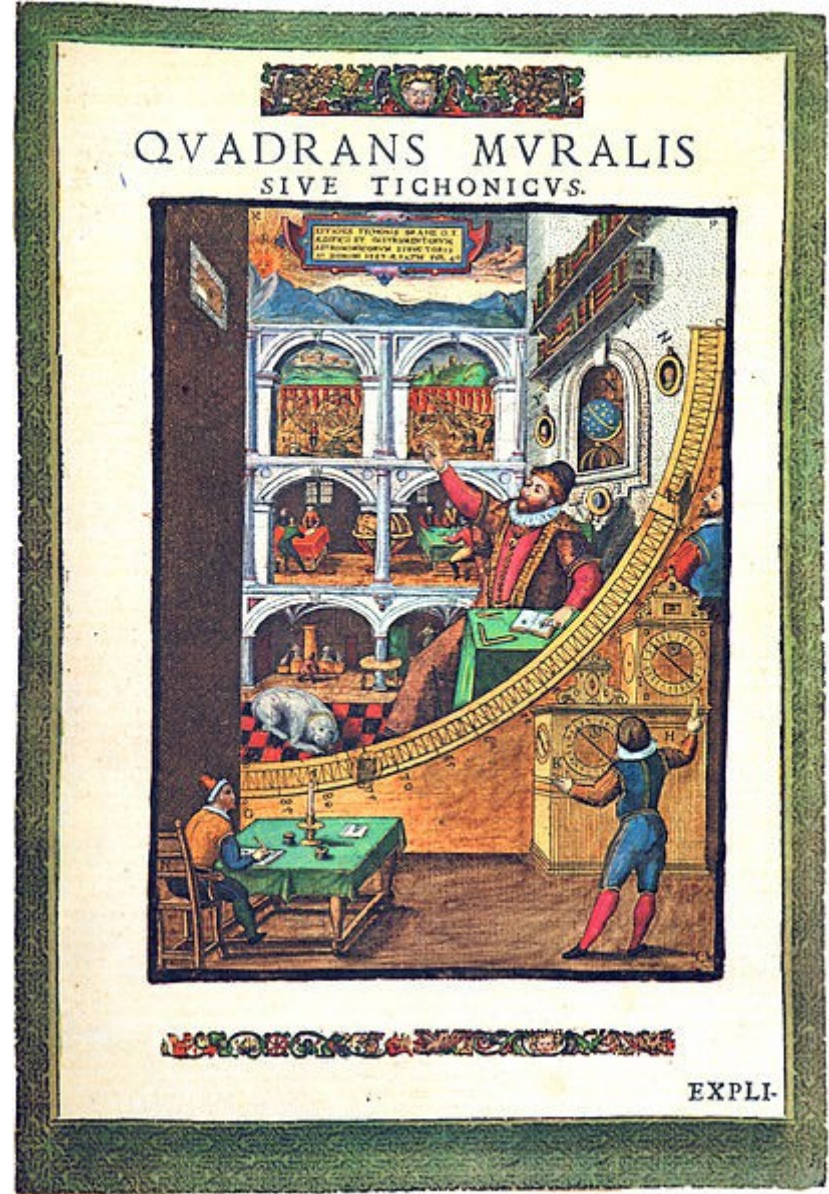
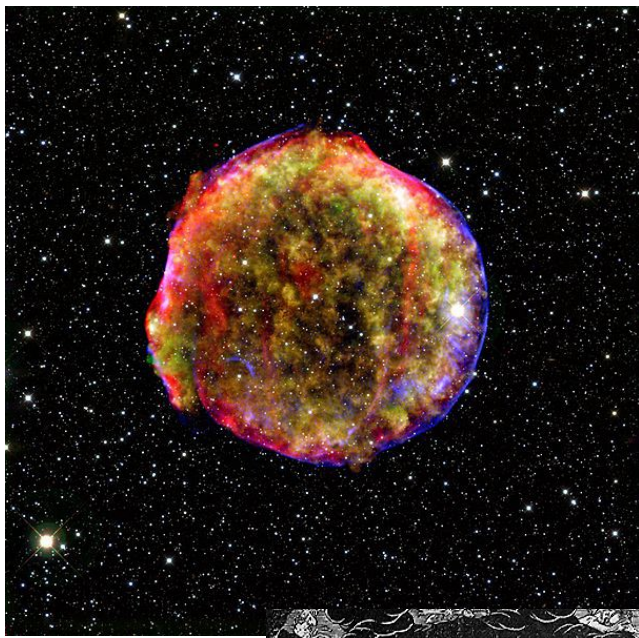
Il sistema Copernicano spiega in modo elegante il moto retrogrado di pianeti come Marte. La Terra occupando una orbita piu' interna ruota piu' velocemente di Marte attorno al Sole. Il passaggio in 3,4,5 di Marte in opposizione spiega l'apparente moto retrogrado del pianeta.



Uraniborg main building. Copper etching from Blaeu's Atlas Major, 1663.

Tycho Brahe 1546-1601

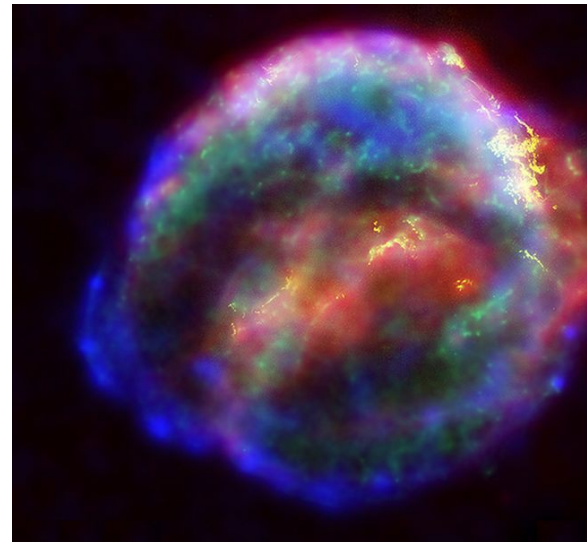
Brahe, astronomo danese, per primo identifica la SN-1572 come appartenente alla volta Celeste (il cielo non è più immutabile). Dirige e costruisce l'osservatorio di Uraniborg grazie al re Federico II (1576). Il più grande investimento scientifico (in termini di PIL) che si ricordi. Alla morte del re gli tagliano i fondi e va a Praga (1597) dal re Rodolfo II, portando con sé i dati delle sue preziose osservazioni. Uraniborg viene distrutta dal popolo danese furioso per le tasse elevate.



Una immagine di SN1572 (oggi) e della grande cometa del 1577.

Notare come le osservazioni fossero senza telescopi (inventati da Galileo in seguito).

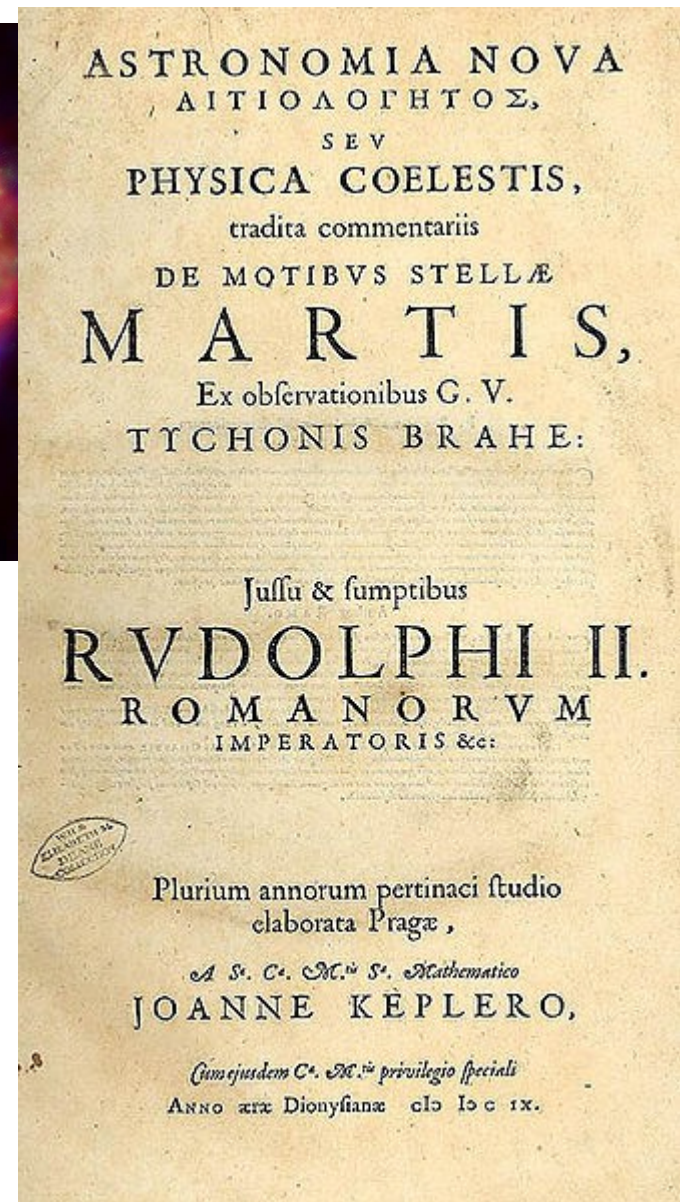
Notare gli orologi (vero simbolo di alta tecnologia dell' epoca).

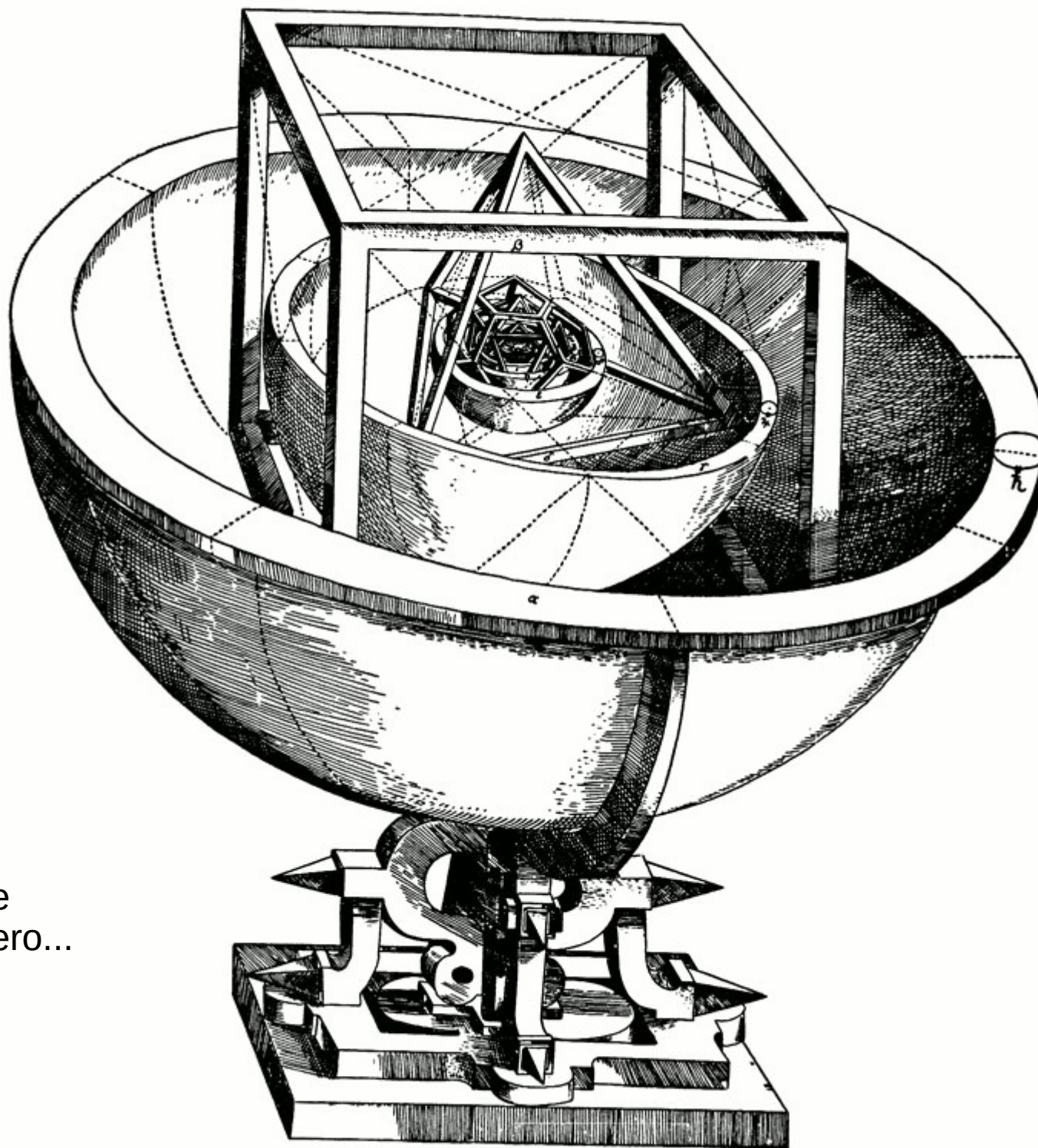


SN-1604

Johannes Kepler 1571-1630

Studiante di Brahe, dai dati portati da Tycho a Praga determina che l'orbita di marte e' ellittica.

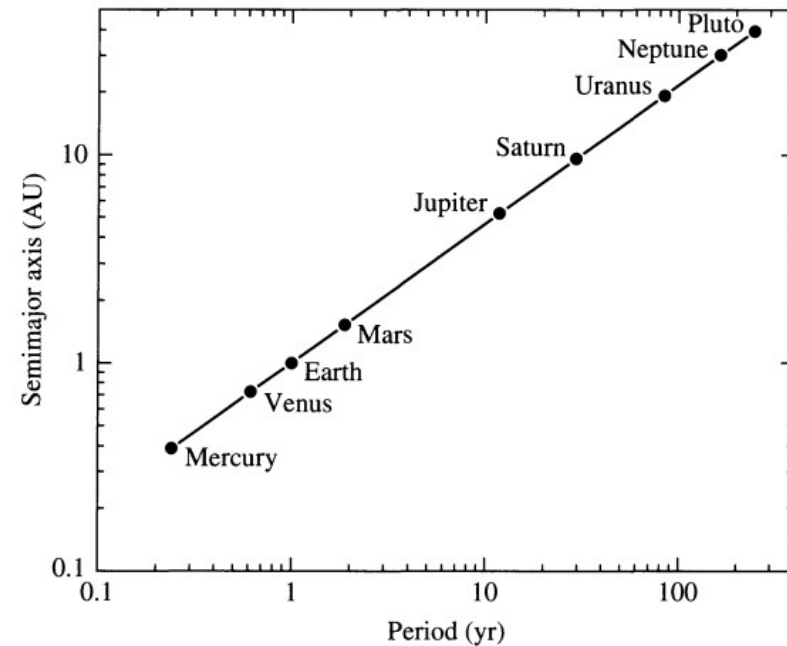
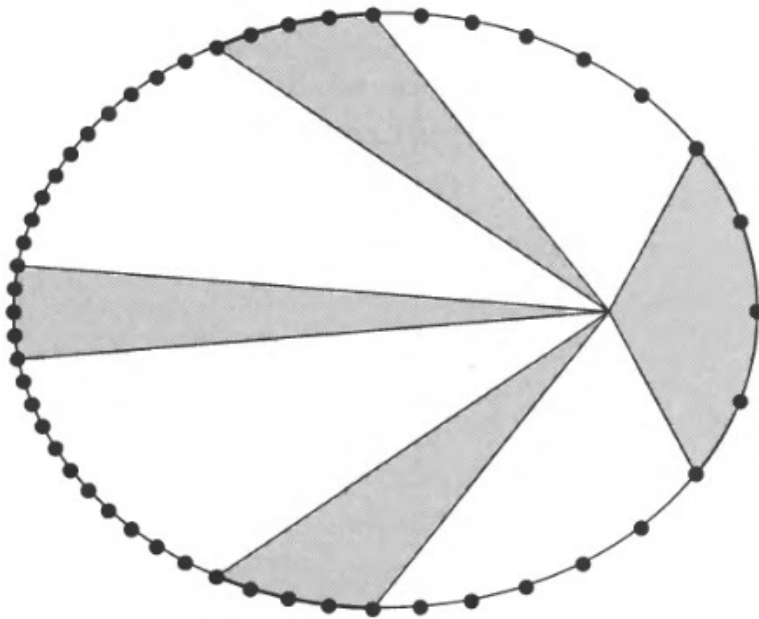




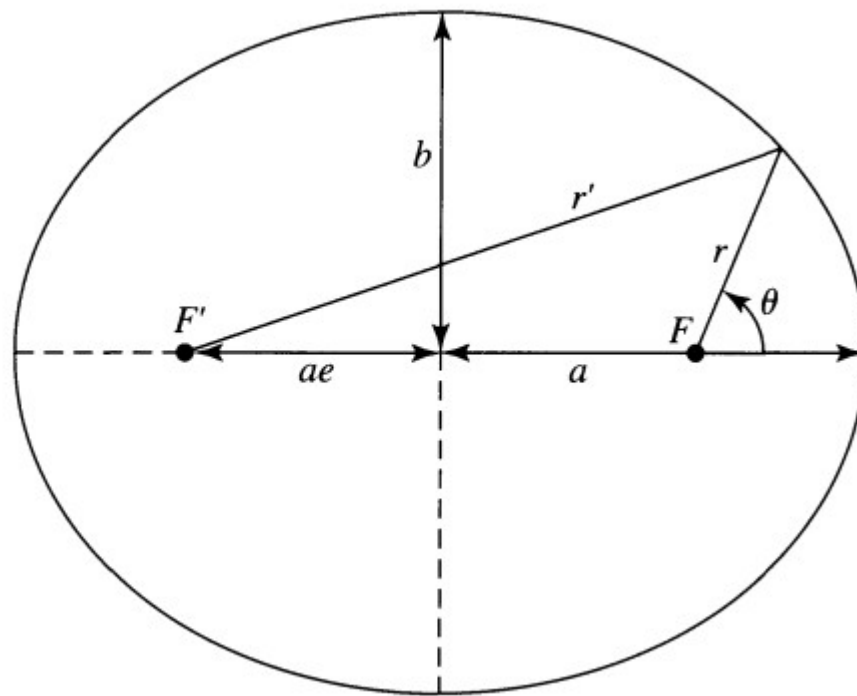
Sistema solare
secondo Keplero...

Le tre leggi di Keplero:

- Le orbite dei pianeti sono ellittiche
- Coprono aree uguali in tempi uguali
- $P^2 = a^3$



1 AU = Astronomical Unit – Distanza media Terra-Sole 1.496×10^{11} m



Equazione dell'ellisse:

$$r + r' = 2a$$

a e' una costante detta **semi-asse maggiore**.

b e' il **semiasse minore**.

F e F' sono i due **punti focali** dell'ellisse. Il Sole e' nel punto focale maggiore F.

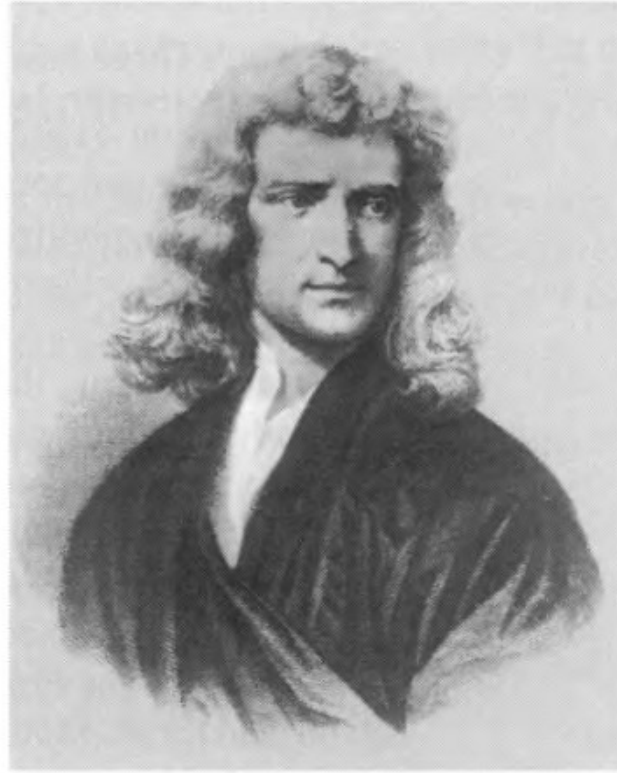
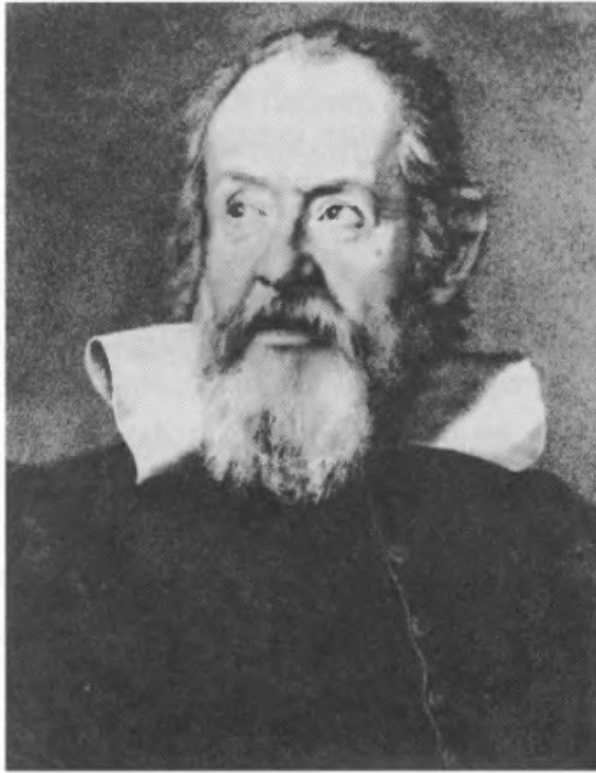
e e' l'**eccentricita'** dell'ellisse e va da 0 a 1. e' definita come la distanza di uno dei fuochi divisa a. e=0 e' un cerchio.

Il punto piu' vicino al fuoco principale e' detto **perielio**, quello opposto **afelio**.

Si puo' dimostrare che:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (0 \leq e < 1).$$

Galileo e Newton



Galileo: Padre della fisica moderna.

Principio di Relativita' Galileana, fasi di Venere (quindi non brilla di luce propria),
Satelliti di Giove.

Newton parte da Galileo per formulare le sue famose 3 Leggi.

Leggi di Newton

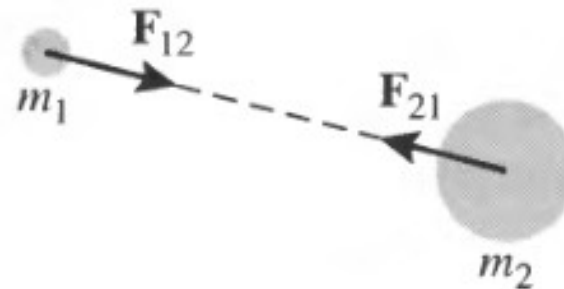
- Legge di Inerzia. Un oggetto in quiete rimarra' in quiete, un oggetto in moto rimarra' in moto uniforme percorrendo una linea retta. (e' una definizione di **sistema di riferimento inerziale!**). L'impulso $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ di una particella non soggetta a forze e' costante in un sistema di riferimento inerziale.
- La forza netta (la somma di tutte le forze) su di un oggetto e' proporzionale alla massa dell'oggetto e la sua accelerazione risultante.

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}.$$

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Per ogni azione c'e' una reazione opposta e contraria.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$



Legge di Keplero, Leggi di Newton e Legge di Gravitazione Universale.

Terza Legge di Keplero $P^2 = kr^3$

Assumendo orbita circolare: $P = \frac{2\pi r}{v}$

Inserendo nella Terza Legge di Keplero:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = kr^3 \longrightarrow \frac{4\pi^2}{k} = v^2 r$$

Moltiplicando ambo i membri:

$$m \times \frac{1}{r^2} \times \frac{4\pi^2}{k} = (v^2 r) \times \frac{1}{r^2} \times m$$

Si ha:

$$\frac{4\pi^2 m}{kr^2} = m \frac{v^2}{r} = F$$

Usando la II legge di Newton questa e' la forza a cui e' soggetto il pianeta

Legge di Keplero, Leggi di Newton e Legge di Gravitazione Universale.

$$\frac{4\pi^2 m}{kr^2} = m \frac{v^2}{r} = F$$

Usando la III Legge di Newton abbiamo che la forza esercitata sull'altro pianeta di massa M sarà:

$$F = \frac{4\pi^2 M}{k'r^2}$$

Uguagliando le due forze in modulo si ha:

$$F = \frac{4\pi^2 Mm}{k''r^2}$$

dove $k = k''/M$ e $k' = k''/m$

definendo $G \equiv 4\pi^2/k''$ abbiamo la Legge di Gravitazione !:

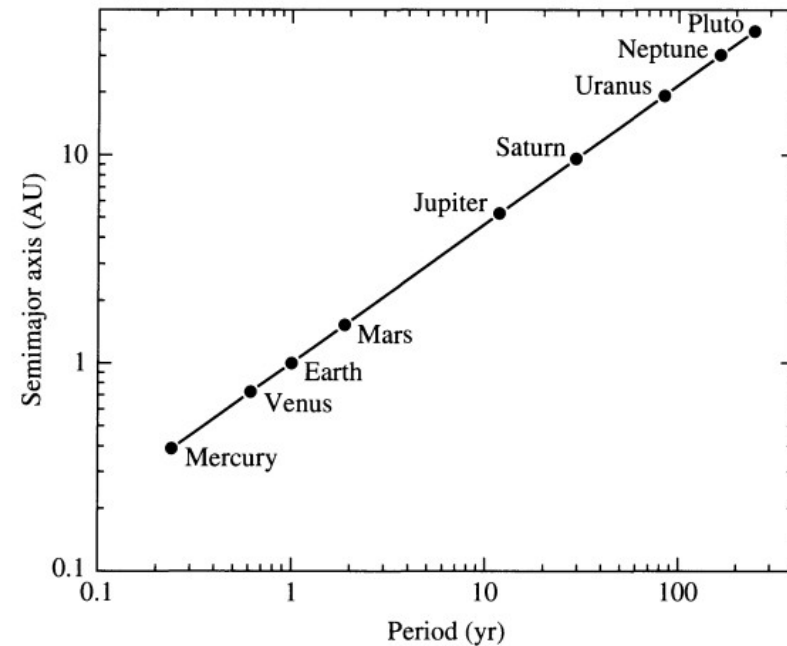
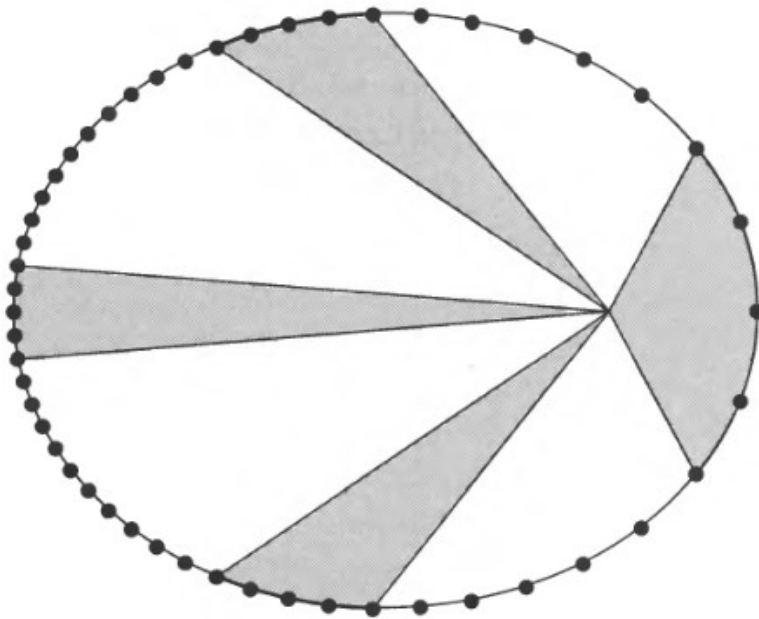
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

Adesso deriviamo le leggi di Keplero dalle leggi di Newton....

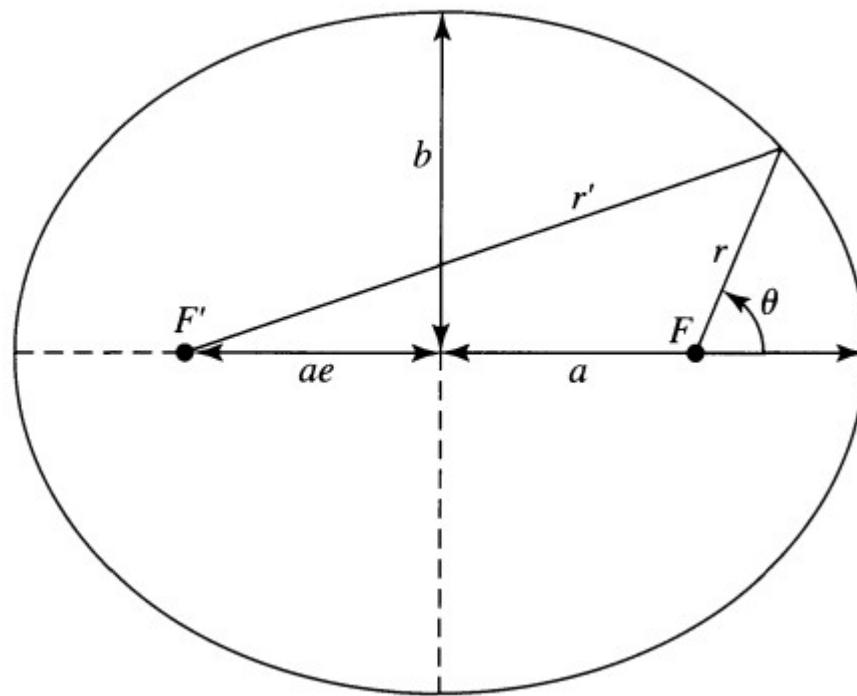


Le tre leggi di Keplero:

- Le orbite dei pianeti sono ellittiche
- Coprono aree uguali in tempi uguali
- $P^2 = a^3$



1 AU = Astronomical Unit – Distanza media Terra-Sole 1.496×10^{11} m



Equazione dell'ellisse:

$$r + r' = 2a$$

a e' una costante detta **semi-asse maggiore**.

b e' il **semiasse minore**.

F e F' sono i due **punti focali** dell'ellisse. Il Sole e' nel punto focale maggiore F.

e e' l'**eccentricita'** dell'ellisse e va da 0 a 1. e' definita come la distanza di uno dei fuochi divisa a. e=0 e' un cerchio.

Il punto piu' vicino al fuoco principale e' detto **perielio**, quello opposto **afelio**.

Si puo' dimostrare che:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (0 \leq e < 1).$$

Introduciamo il momento angolare:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (\vec{r} \times m\vec{v})$$

Deriviamo rispetto al tempo :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

Se non abbiamo forze esterne:
 $= 0$, conservazione del momento angolare.

Centro di massa

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Per 2 oggetti

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1 \dots N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1 \dots N} m_i}$$

Per $i=1, \dots, N$ oggetti

$$M \vec{R} = \sum_{i=1 \dots N} m_i \vec{r}_i$$

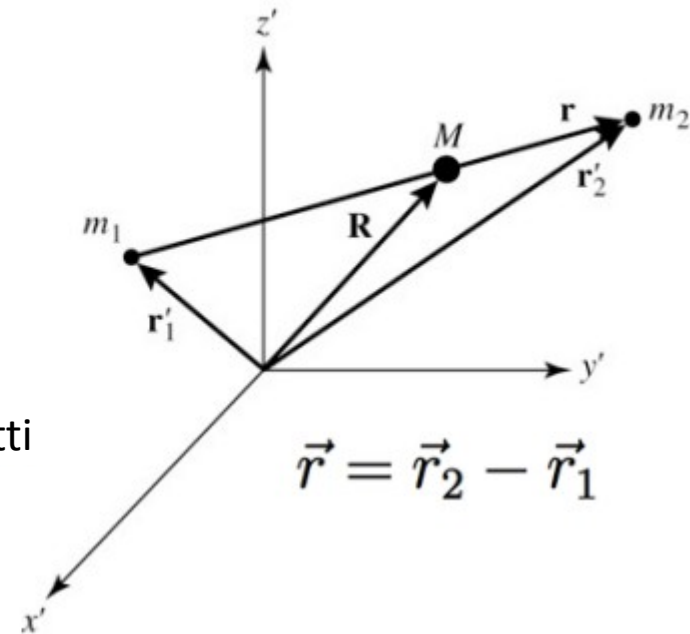
Derivando per t

$$\vec{P} = M \vec{V} = \sum_{i=1 \dots N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1 \dots N} \vec{p}_i$$

Derivando ancora:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1 \dots N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F} = 0$$

(Per la III Legge di Newton)



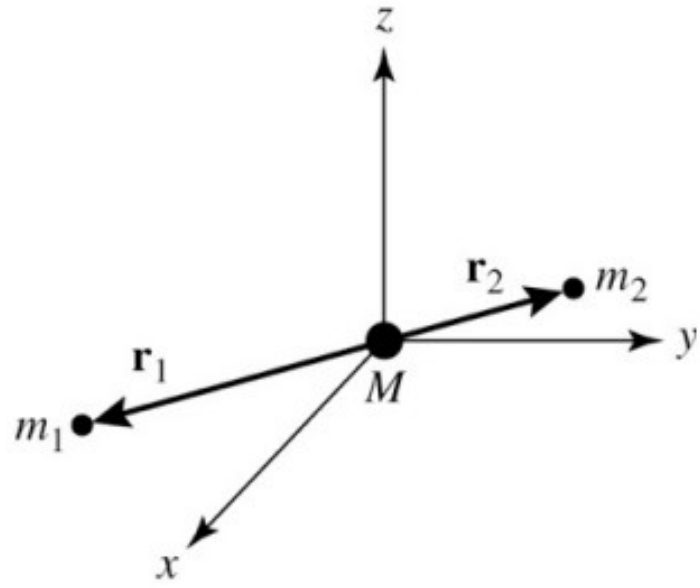
Prendiamo un riferimento con $\vec{R}=0$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1 = - \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \vec{r}$$



Definiamo come «massa ridotta» del sistema: $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$

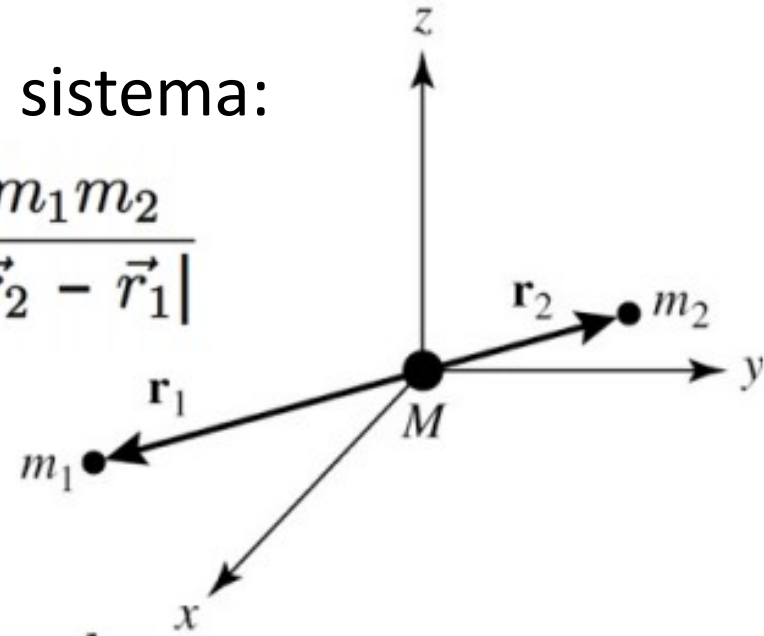
$$\vec{r}_1 = - \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \frac{\mu}{m_2} \vec{r}$$

Ora scriviamo l'energia totale del sistema:

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - G \frac{m_1m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Inseriamo:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



inoltre :

$$\vec{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1}\vec{r} \longrightarrow v_1 = \frac{dr_1}{dt} = -\frac{\mu}{m_1} \frac{dr}{dt}$$

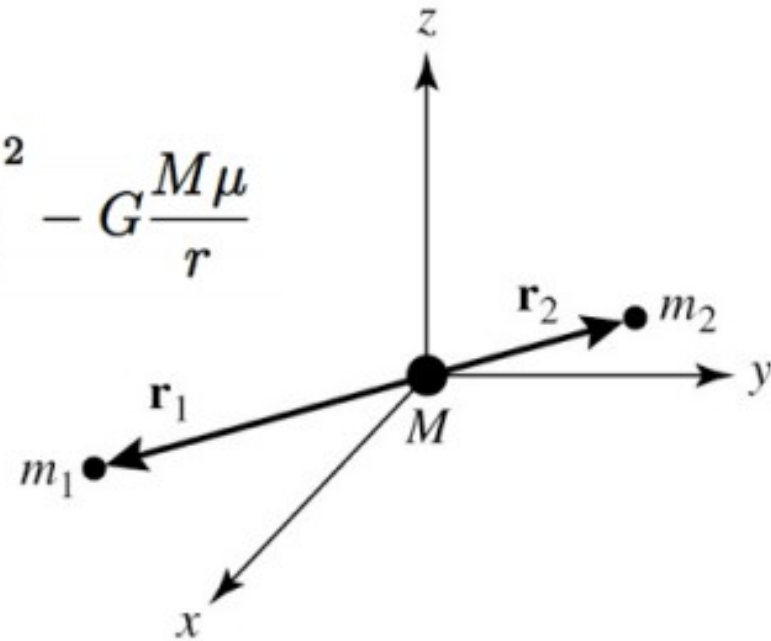
$$\vec{r}_2 = \frac{\mu}{m_2}\vec{r} \longrightarrow v_2 = \frac{dr_2}{dt} = \frac{\mu}{m_2} \frac{dr}{dt}$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1m_2}{M} \longrightarrow m_1m_2 = M\mu$$

L'energia totale e' quindi:

$$E = \frac{1}{2}m_1 \left(-\frac{\mu}{m_1}v\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{\mu}{m_2}v\right)^2 - G\frac{M\mu}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m_1}v^2 + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{m_2}v^2 - G\frac{M\mu}{r}$$



Raggruppando:

$$E = \frac{1}{2}\mu^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) v^2 - G\frac{M\mu}{r} \quad \text{con} \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_2 + m_1}{m_1 m_2} = \frac{1}{\mu}$$

fornisce:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{M\mu}{r}$$

L'energia totale del sistema e' data dall'energia cinetica di una particella con massa pari alla massa ridotta e con energia potenziale data da un sistema massa ridotta-massa totale

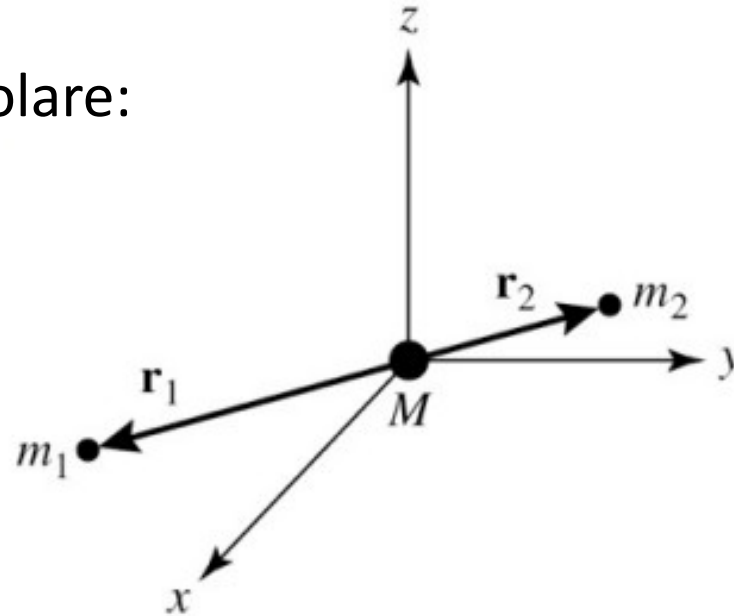
Allo stesso modo per il momento angolare:

$$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

Inserendo:

$$\vec{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r}$$

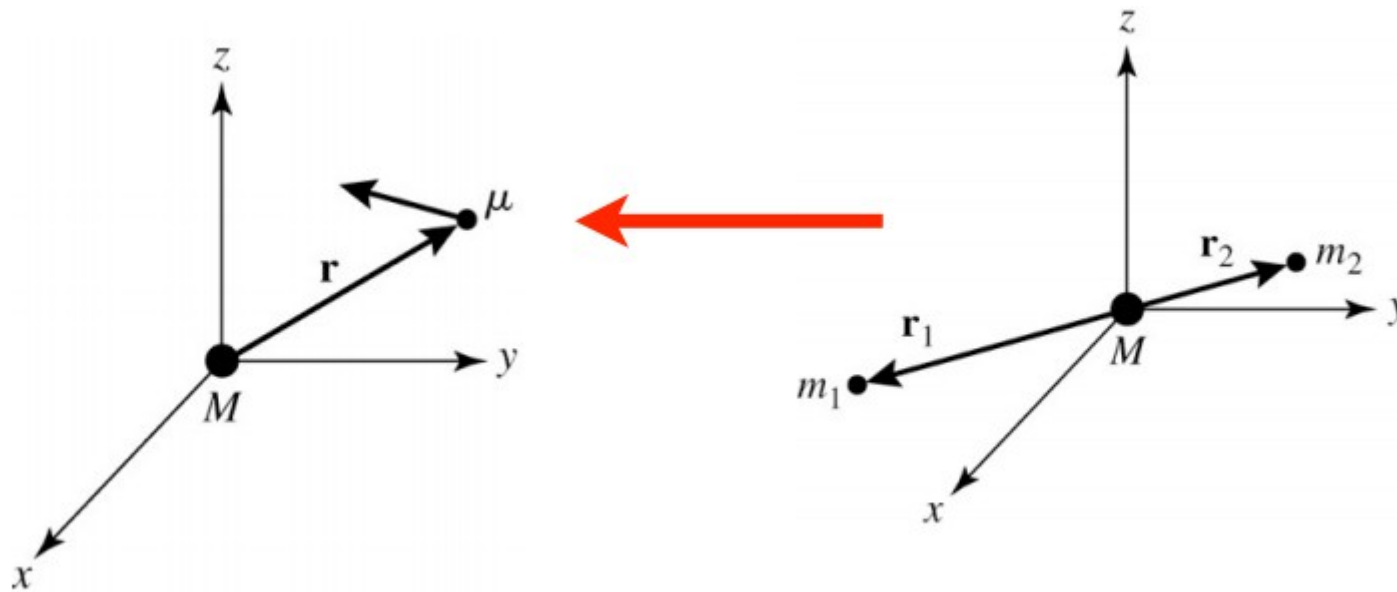
$$\vec{r}_2 = \frac{\mu}{m_2} \vec{r}$$



Abbiamo :

$$\vec{L} = -\mu \vec{r} \times \vec{v}_1 + \mu \vec{r} \times \vec{v}_2 = \mu \vec{r} \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{r} \times (\mu \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$$

Il momento angolare totale è dato da una particella con massa pari a massa ridotta, che si muove a velocità pari alla differenza delle due velocità e a distanza $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

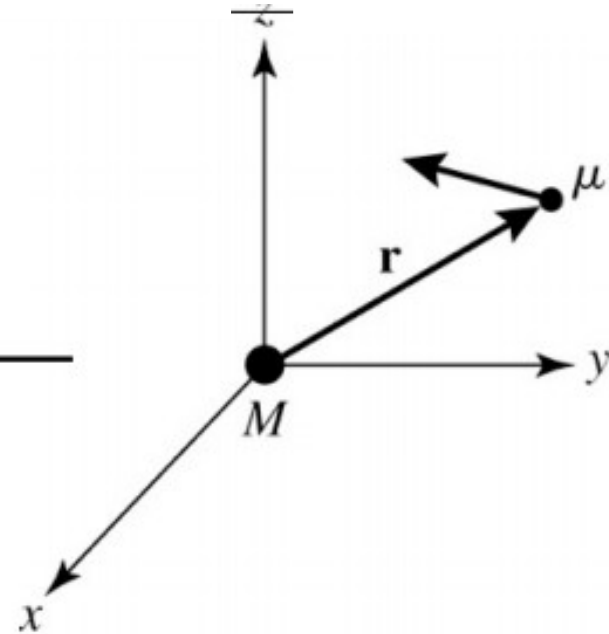


Il problema a due corpi e' equivalente ad un sistema ad un singolo corpo di massa pari alla massa ridotta che si muove attorno ad una massa M con massa pari alla Massa totale.

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \mu \vec{v} = \mu r \hat{r} \times \frac{d}{dt}(r \hat{r}) \\ &= \mu r \hat{r} \times \left(\hat{r} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \right) = \mu r^2 \hat{r} \times \frac{d\hat{r}}{dt}\end{aligned}$$

$$\vec{F} = - \left(\frac{GM\mu}{r^2} \right) \hat{r}$$

$$\vec{a} = - \left(\frac{GM}{r^2} \right) \hat{r}$$



Facciamo il prodotto vettoriale: $\vec{a} \times \vec{L} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \times \left(\mu r^2 \hat{r} \times \frac{d\hat{r}}{dt} \right)$

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C) \cdot B - (A \cdot B) \cdot C$$

$$\vec{a} \times \vec{L} = -(GM\mu) \left[\left(\hat{r} \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} \right) \cdot \hat{r} - (\hat{r} \cdot \hat{r}) \frac{d\hat{r}}{dt} \right] = GM\mu \frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\vec{a} \times \vec{L} = GM\mu \frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{L}) = \frac{d}{dt} (GM\mu\hat{r}) \longrightarrow \vec{v} \times \vec{L} = GM\mu\hat{r} + \vec{D}$$

- Il primo membro e' massimo quando la particella e' al perielio (quando v e' massima)
- D e' una costante (punta sempre nella stessa direzione)
- Il secondo membro e' massimo quando D e' diretto come r, quindi D e' diretto verso il Perielio.
- D e' legato all'**eccentricita'** dell'orbita.

$$\vec{v} \times \vec{L} = GM\mu\hat{r} + \vec{D}$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{L}) = (GM\mu\hat{r} + \vec{D}) \cdot \vec{r}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{L} = GM\mu r + rD \cos \theta$$

$$(\vec{r} \times \mu\vec{v}) = \vec{L} \longrightarrow L^2/\mu = GM\mu r + rD \cos \theta$$

$$= GM\mu r \left(1 + \frac{D \cos \theta}{GM\mu} \right)$$

Prima legge di
Keplero !
Orbite Ellittiche !

$$r = \frac{L^2/\mu^2}{GM(1 + e \cos \theta)}$$

$$e = D/GM\mu$$

Integriamo dal Fuoco a r :

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

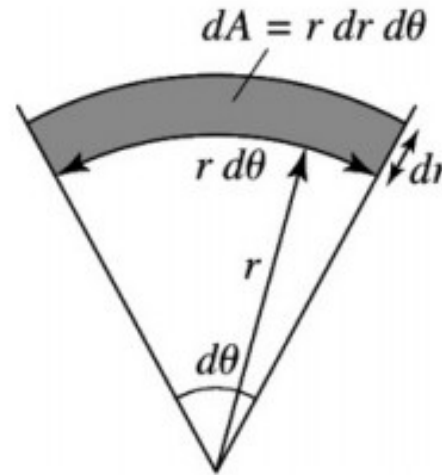
e $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$

$$= \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \longrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v_\theta$$

$\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ Sono perpendicolari quindi :

$$r v_\theta = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = |L / \mu| = L / \mu$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2\mu} = \text{Costante} \quad \text{Il legge di Keplero !!}$$



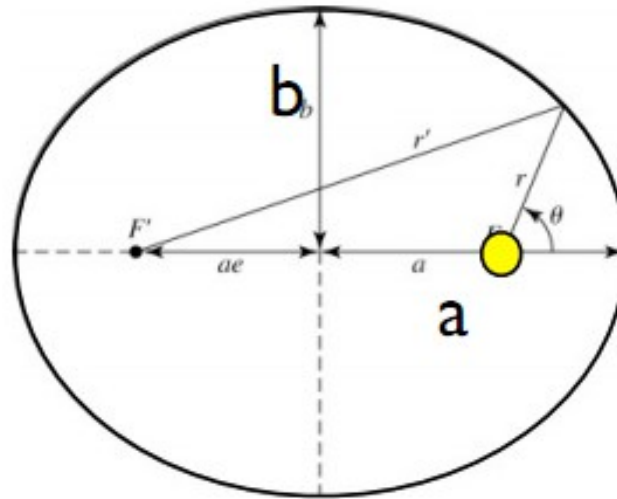
Integriamo la seconda legge sul tempo: $A = \frac{1}{2} L/\mu \int dt$

$$A = \frac{1}{2} (L/\mu) P,$$

Dove P e' il periodo

$$A = \pi ab$$

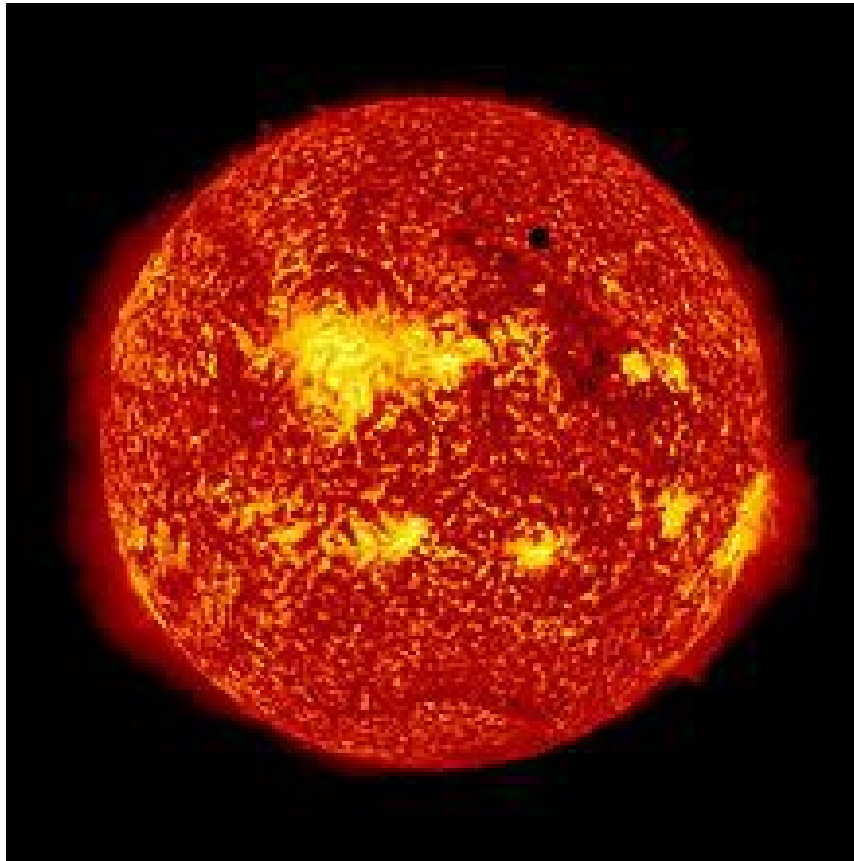
$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2 \mu^2}{L^2}$$



I Legge $r = \frac{L^2 / \mu^2}{GM (1 + e \cos \theta)} \longrightarrow L = \mu [GMa (1 - e^2)]^{1/2}$

III Legge di Keplero !!! $P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G (m_1 + m_2)}$

Transito di Venere e distanza Terra-Sole



L'ultimo transito e' avvenuto il 5 giugno 2012. Quello precedente l'8 Giugno 2004.
Il prossimo e' previsto nel Dicembre 2117 e nel 2125.

Calcolo della distanza Terra-Sole dal transito di Venere

Il primo a predire la possibilità di osservare i transiti di Mercurio e Venere sul Sole fu Keplero, il quale predisse correttamente il transito di Mercurio per il 7 Novembre 1631 e un mese dopo per Venere. Sfortunatamente per lui, Keplero morì un anno prima nel 1630.



Lo scienziato Francese Pierre Gassendi vide il transito di mercurio nel 1631 ma vide solo parzialmente quello di Venere dato che il Sole era praticamente tramontato a Parigi.

Molto probabilmente nessuno vide il transito di Venere Del 1631.

Il giovane e brillante astronomo inglese **Jeremiah Horrocks** predisse e annotò il transito del 1639 a 20 anni. Morì a 34 anni.



Calcolo della distanza Terra-Sole dal transito di Venere

Nel 1677 l'astronomo inglese Edmond Halley (1656-1742) osserva il transito di Mercurio dall'isola di Sant'Elena nel sud dell'atlantico.

Propone quindi un metodo ingegnoso per calcolare la distanza Terra-Sole a partire dalle misure del transito di Venere.

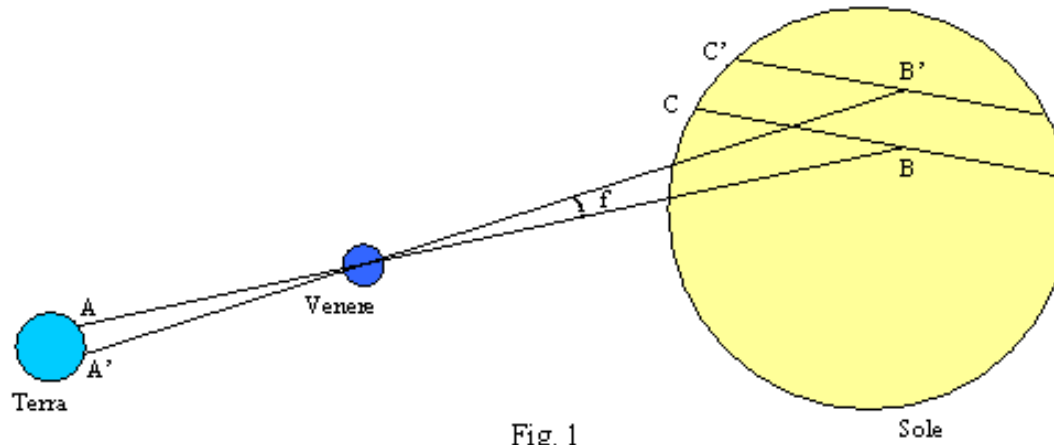
Il prossimo transito e' previsto per il 1761 ed Halley sa che non puo' vivere abbastanza per osservarlo.

Scrivo quindi:

"I recommend it therefore again and again to those curious astronomers who, when I am dead, will have an opportunity of observing these things, that they remember my admonition, and diligently apply themselves with all imaginable success; in the first place, that they may not by the unreasonable obscurity of a cloudy sky be deprived of this most desirable sight, and then, that having ascertained with more exactness the magnitudes of the planetary orbits, it may redound to their immortal glory."



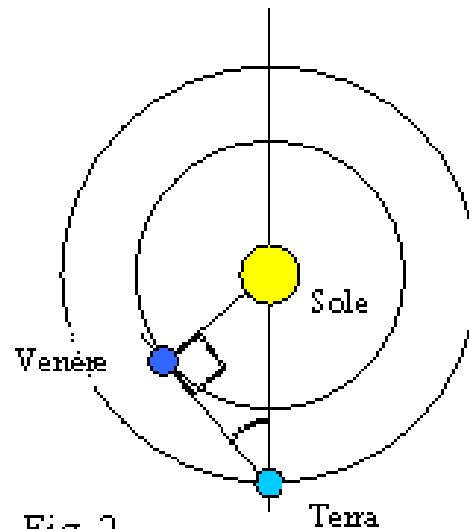
Calcolo della distanza Terra-Sole dal transito di Venere



Il calcolo della Unità Astronomica, ovvero della distanza che separa la Terra dal Sole, mediante le osservazioni dei transiti dei pianeti interni richiede l'applicazione di un metodo geometrico basato sulle misure dei tempi di transito presi da due punti diversi della superficie terrestre, lontani il più possibile secondo la direzione perpendicolare al piano dell'eclittica.

Un osservatore posto in A (fig. 1) vedrà il pianeta descrivere la corda C, mentre un osservatore posto in A' lo vedrà transitare sulla corda C', cosicché, ad uno stesso istante, Venere apparirà in due punti diversi, rispettivamente B e B'. La separazione angolare tra B e B' (angolo f) può essere ottenuta dalla differenza della durata del transito nei due luoghi di osservazione; d'altra parte la distanza tra i due punti A e A' è nota, così che è possibile risalire alla distanza BB' ed infine alla distanza Terra-Sole cercata.

Calcolo della distanza Terra-Sole dal transito di Venere



Cerchiamo ora di eseguire i calcoli utilizzando un metodo semplificato.

L'elongazione massima di Venere - la sua distanza apparente dal Sole, vista dalla Terra - varia da 45° a 48°: per comodità, ipotizziamo orbite circolari e prendiamo il valore medio di elongazione massima di Venere, pari a 46° (fig. 2):

$$SV/ST = \sin 46^\circ = 0,72$$

da cui

$$SV = 0,72 \times ST$$

$$ST = 1 \text{ UA}$$

$$SV = 0,72 \text{ UA} ; TV = 0,28 \text{ UA}$$

Calcolo della distanza Terra-Sole dal transito di Venere

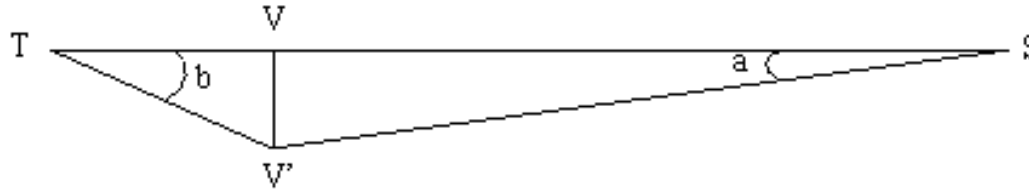


Fig. 3

Sempre nell'assunzione di orbite circolari, cerchiamo di ricavare la velocità apparente di Venere. Il **periodo sinodico** di Venere ovvero il tempo che il pianeta, osservato dalla Terra, impiega per tornare in una stessa posizione rispetto al Sole, è di 584 giorni.

Nella figura 3:

V = Venere in congiunzione inferiore

V' = Venere un'ora dopo la congiunzione

$$VV' = TV \times \sin b = SV \times \sin a$$

$$\sin b / \sin a \approx b/a = SV/TV = 0,72 / 0,28$$

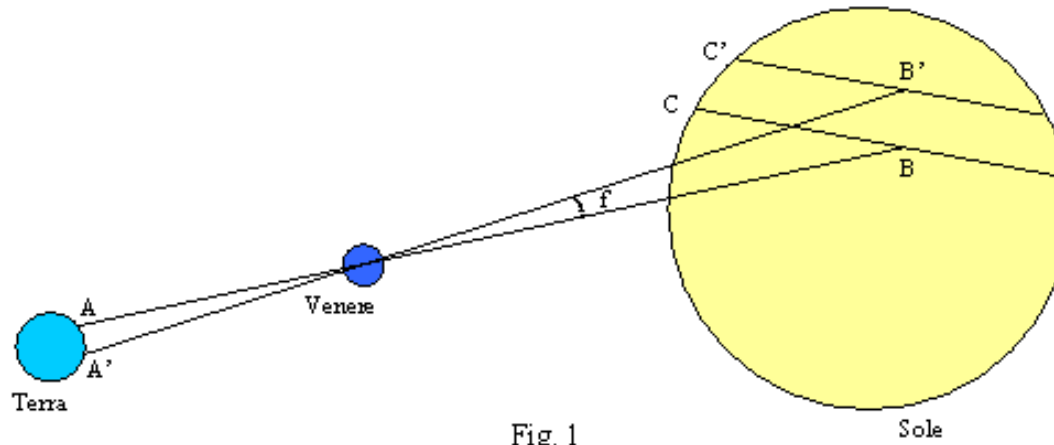
L'angolo a descritto da Venere attorno al Sole in un'ora sarà (in primi d'arco):

$$a = 360 \times 60 / 584 \times 24$$

$$b = a \times (0,72 / 0,28) = 360 \times 60 \times 0,72 / 584 \times 24 \times 0,28 = 4'$$

Dunque, la velocità con la quale Venere transita davanti al Sole è di circa **4 primi d'arco** all'ora.

Calcolo della distanza Terra-Sole dal transito di Venere



Tornando alla figura 1, supponiamo che AA' sia perpendicolare al piano dell'eclittica e che la distanza tra i due osservatori sia di 5.000 km. Ipotizziamo, inoltre, che il transito di Venere davanti al Sole duri **6 ore** per l'osservatore posto in A' e **6 ore e 8 minuti** per l'osservatore posto in A.

Calcolo della distanza Terra-Sole dal transito di Venere

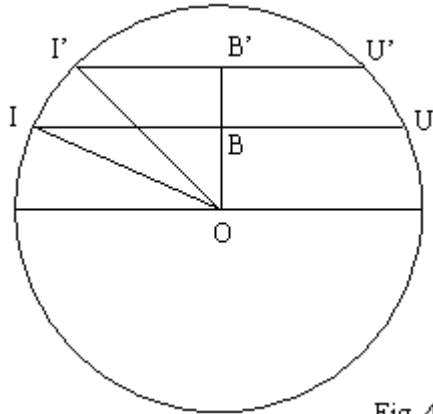


Fig. 4

Nella figura 4 è rappresentato il disco solare con i due tracciati del transito I'U' e IU, osservati, rispettivamente, dalle due postazioni A' e A:

$$I'U' = 6h \times 4'/h = 24'$$

$$I'B' = 12'$$

$$IU = 6h \ 8m \times 4'/h = 24,53'$$

$$IB = 12,27'$$

Il raggio del Sole sappiamo essere $OI' = OI = 16'$, da cui, per il teorema di Pitagora:

$$BO = 10,269' \text{ e } B'O = 10,583'$$

quindi

$$B'B = 0,314' = 0,00523^\circ$$

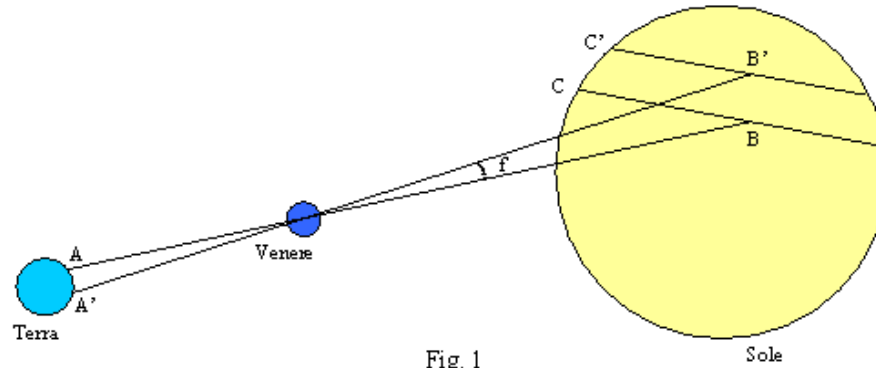


Fig. 1

Calcolo della distanza Terra-Sole dal transito di Venere

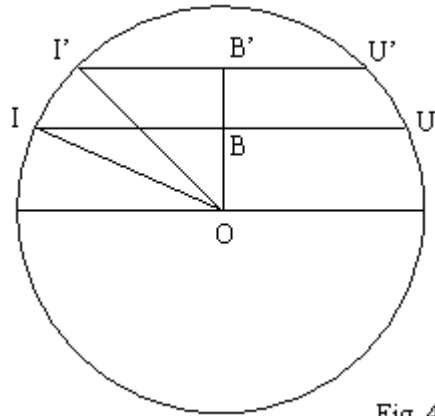


Fig. 4

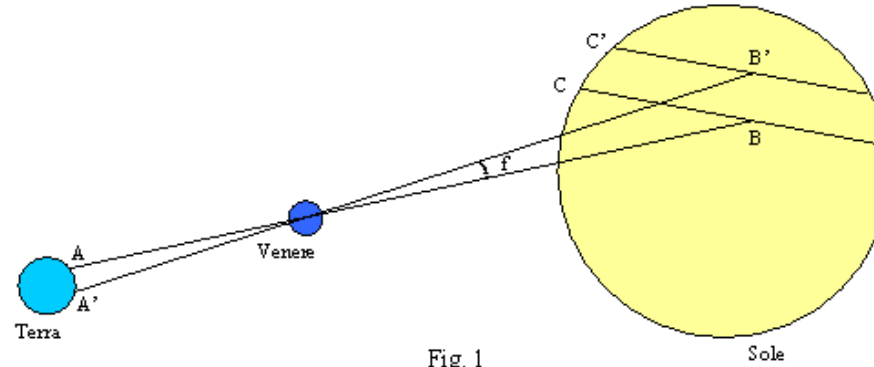


Fig. 1

Ma possiamo risalire anche alla misura in km di BB':

$$BB'/AA' = BV/AV = 0,72 \text{ UA} / 0,28 \text{ UA}$$

da cui

$$BB' = 72/28 \times 5.000 \text{ km} = 12.857 \text{ km}$$

Quindi la distanza Terra-Sole, ovvero AB, risulterà:

$$\text{sen } 0,00523 / 2 \times AB = 12.857 / 2$$

$$AB = 6.429 / \text{sen } 0,00262 = 140593346 \text{ km}$$

che, considerando il raggio della Terra pari a 6378 km, corrisponde ad una parallasse solare di 9,36 secondi d'arco. Si tratta, come abbiamo detto, di un metodo semplificato e, di conseguenza, il risultato che abbiamo ottenuto non rappresenta il valore corretto della distanza Terra-Sole. Le odierne misure dell'Unità Astronomica, realizzate con l'ausilio di satelliti e segnali radar, hanno portato al valore di 149.597.870,691 km.

Calcolo della distanza Terra-Sole dal transito di Venere

Le grandi potenze dell'epoca (Francia ed Inghilterra) si organizzano quindi per fare delle osservazioni del transito di Venere nei due emisferi. Imperversa però la guerra dei sette anni (1756-1763).

Nel 1761 ricordiamo le seguenti imprese:

L'astronomo inglese **Charles Mason** parte alla volta di Sumatra sulla fregata *Seahorse*.

Dopo 24 ore di viaggio viene attaccato dalla nave francese L'Grand.

Dopo un'ora di battaglia muoiono 11 marinai inglesi e la Seahorse è costretta a tornare in porto. Mason ci riprova ma accorgendosi di non arrivare in tempo a Sumatra sbarca a Città del Capo. Sfortunatamente da lì riesce solo a misurare la fase finale del transito.

L'astronomo francese **Jean-Baptiste Chappe d'Auteroche** prepara una spedizione in Russia. Nella città di Tobolsk, a est degli Urali. Dopo un viaggio infernale tra freddo, fiumi ghiacciati e lupi arriva nella città. Viene quindi attaccato dagli abitanti della città perché superstiziosi. Difeso dalle truppe cosacche riesce però a misurare il transito in modo ottimale.

L'astronomo francese **Guillame Le Gentil** si imbarca verso la colonia di Pondicherry in India. Arrivato nelle Mauritius, apprese che la colonia era sotto assedio inglese. Si imbarca quindi sulla nave *La Sylphide* che doveva togliere l'assedio francese. Purtroppo la nave arriva in ritardo, Le Gentil fu costretto a tornare alle Mauritius e vide il transito dalla nave, senza conoscere le sue coordinate.

Dato il mezzo fallimento di tutte le spedizioni del 1761, quelle del 1769 (dopo la guerra dei sette anni) furono preparate con mezzi maggiori.

James Cook partì per la sua spedizione con l'incarico di osservare il passaggio di Venere di fronte al Sole, ben visibile a Tahiti, ma anche quello di scoprire un eventuale continente australe. A questo scopo l'Endeavour salpò dal porto di Plymouth il 25 agosto 1768 con a bordo numerosi scienziati. Arrivato a Tahiti i nativi del luogo rubarono tutti gli strumenti. Dopo diverse contrattazioni Cook riprese gli strumenti e riuscì a misurare il transito di Venere.

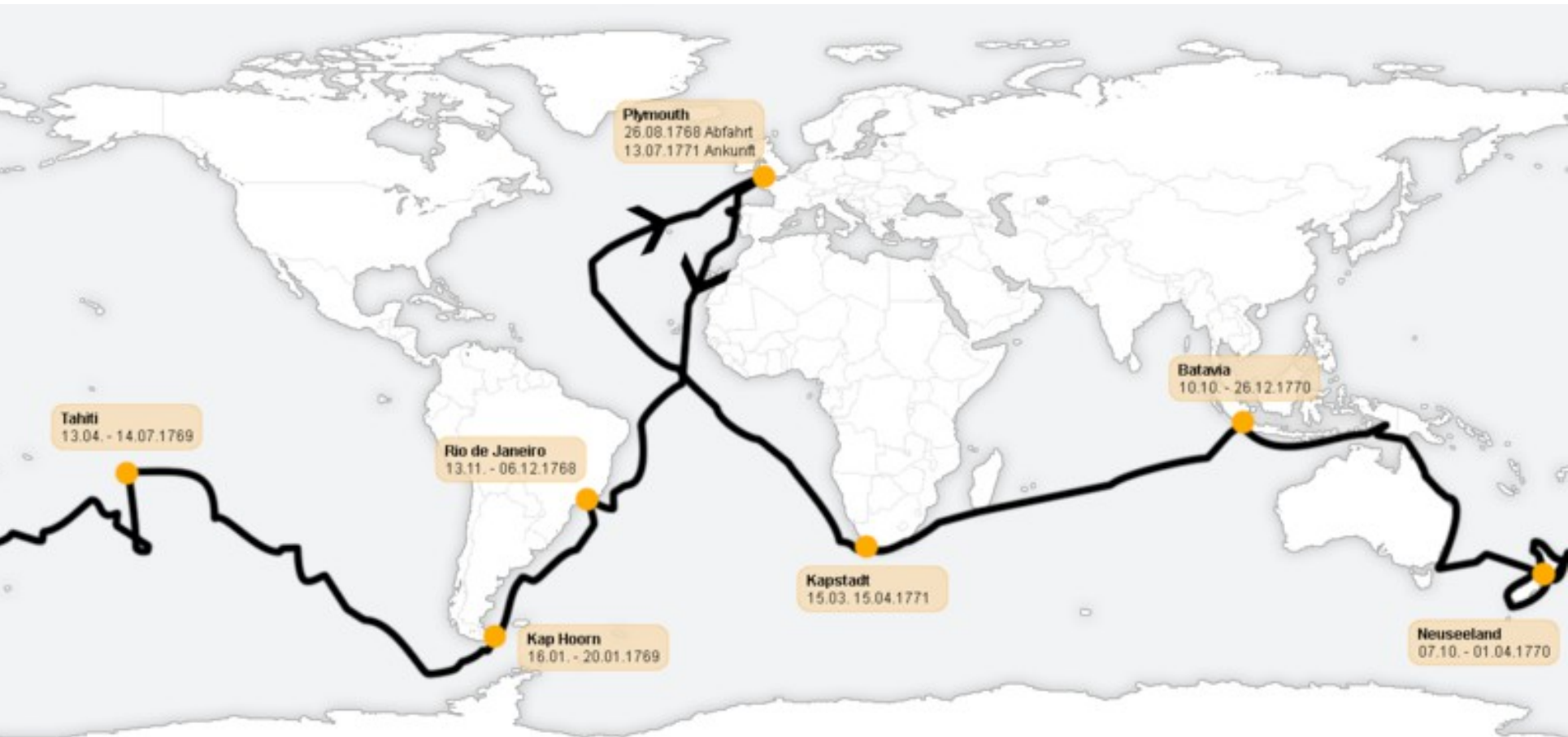


Il francese Chappe preparò invece una missione per misurare il transito da Los Cabos. Arrivato lì però scoppiò un'epidemia di tifo nella quale morì insieme al suo equipaggio.

Le Gentil, che nel frattempo era rimasto alle Mauritius, preparò una spedizione per Manila nelle Filippine. Ricevette però l'ordine di andare a Pondicherry in India che intanto era tornata ai Francesi. Una volta lì preparò tutto per l'osservazione ma il giorno del transito il cielo era coperto e non si vedeva nulla.

Le Gentil tentò di tornare in patria. Una tempesta distrusse la sua nave nei pressi del capo Di Buona Speranza. Tornò quindi su di una nave spagnola fino a Cadice. Percorse a cavallo la strada fino a Parigi dove scoprì che non avendolo visto da 11 anni lo avevano dato per morto e tutti i suoi averi erano andati ai figli.

Il primo viaggio di Cook



Sfortunatamente neanche le misure fatte da Cook furono adeguate.

L'astronomo che doveva misurare il transito era Charles Green.

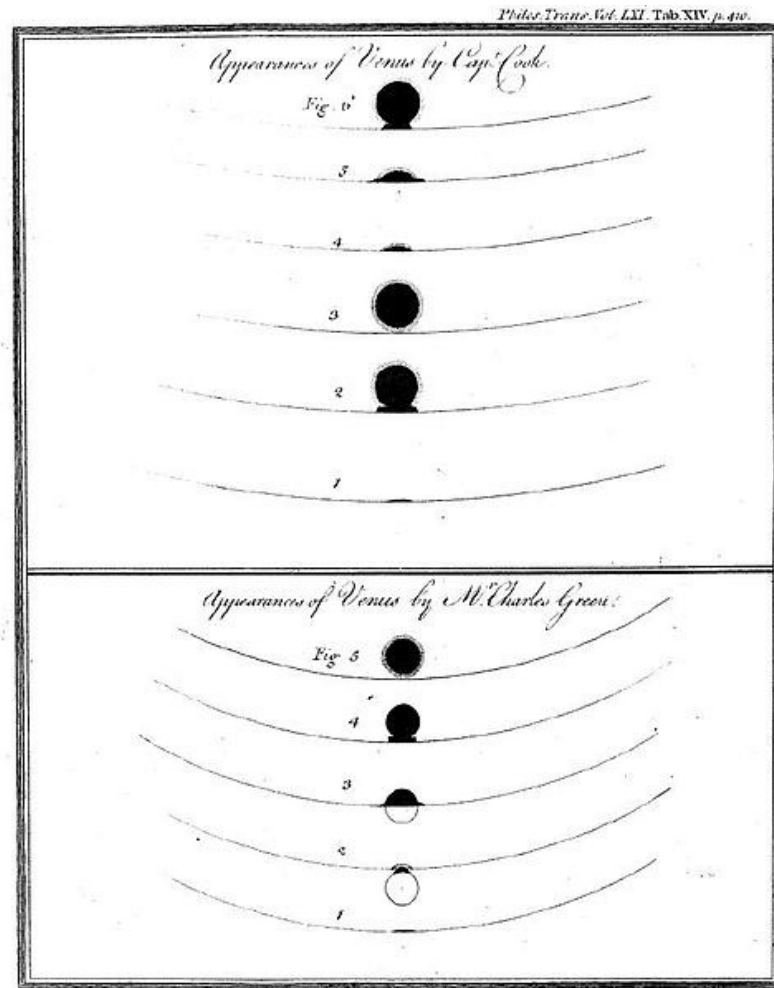
A Tahiti furono prese misure con diversi strumenti e da diversi luoghi.

Purtroppo le misure non andarono d'accordo negli errori strumentali.

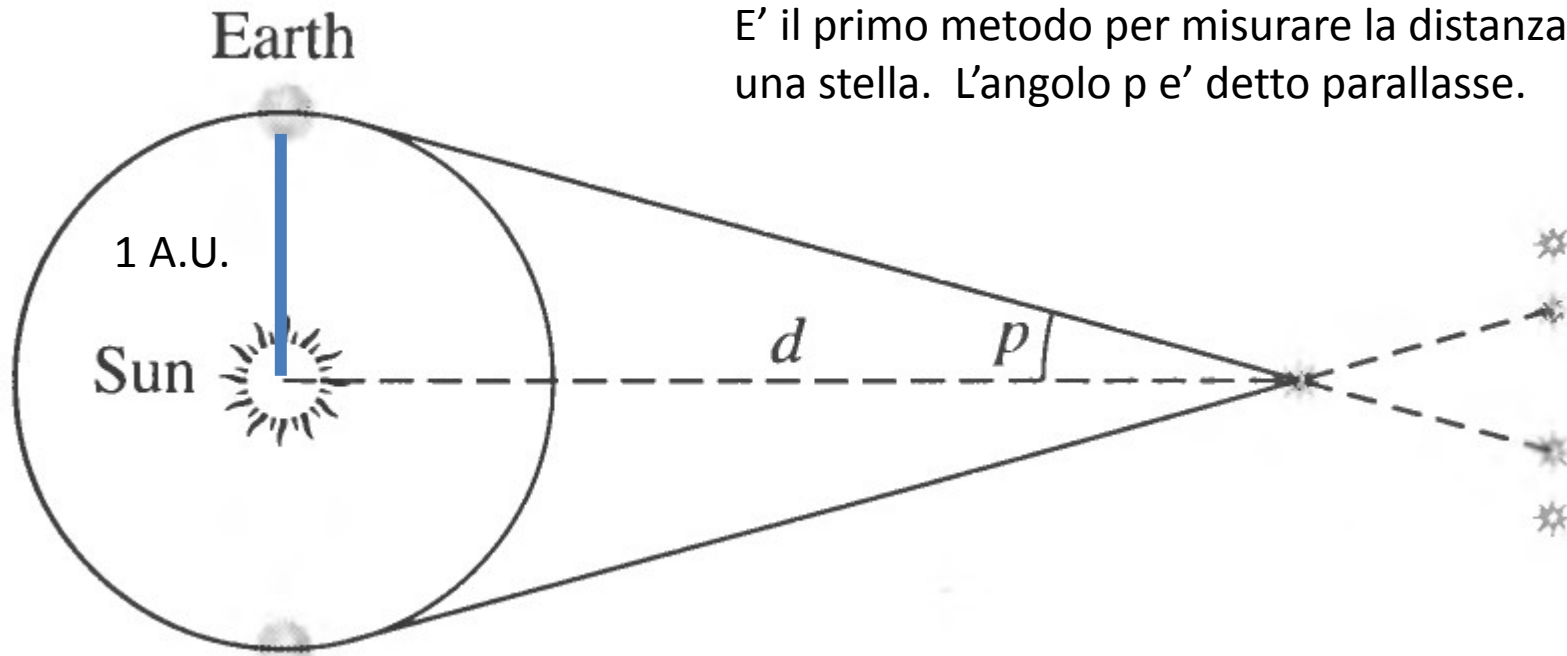
Vi e' infatti un effetto di diffrazione «Black Drop» che limita l'uso di questo metodo.

In pratica l'ombra di venere si deforma quando entra o esce dal disco solare.

Green misuro' il transito di Mercurio dalla Nuova Zelanda. Mori' pero' poco dopo per Scabbia.



Parallasse Stellare



E' il primo metodo per misurare la distanza di una stella. L'angolo p e' detto parallasse.

$$d = \frac{1 \text{ AU}}{\tan p} \simeq \frac{1}{p} \text{ AU}$$

1 radian $\approx 206,265$ arcsec

$$d \simeq \frac{206,265}{p''} \text{ AU.}$$

Se la parallasse si misura in secondi d'arco
Invece di radianti vale questa relazione.

Parallasse Stellare

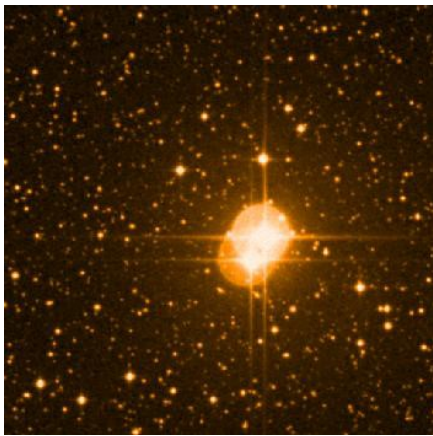
Si definisce come **parsec** la distanza di una stella con parallasse di 1 secondo d'arco

$$d = \frac{1}{p''} \text{ pc.}$$

$$1 \text{ pc} \approx 206,265 \text{ AU} \approx 3.26 \text{ ly}$$



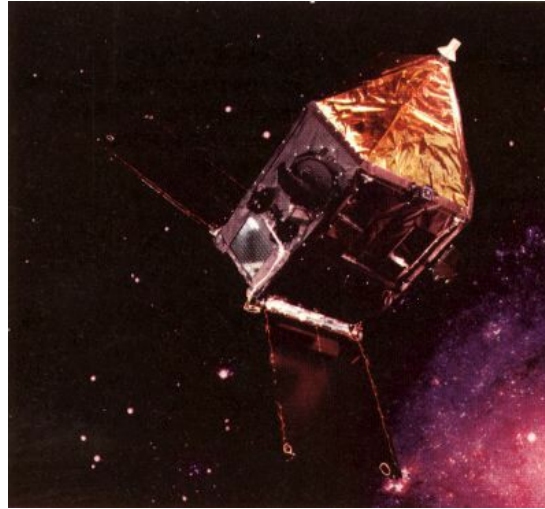
Le parallassi delle stelle sono decisamente piccole. La parallasse della stella più vicina (**proxima centauri**) è pari a 0.77 p'' corrispondente a 1.3 pc e a 4.3 ly (anni luce).



La prima misura di parallasse di una stella si è avuta nel 1838 da parte di Friedrich Wilhelm Bessel per 61 Cygni. Dopo 4 anni di osservazioni lui stimò per questa stella una parallasse pari a $p''=0.316''$, corrispondente a 3.16 parsec o 10.3 anni luce. Questa stella in realtà sono due (stella binaria) ed ha un elevato moto proprio (è chiamata anche Stella Volante) circa 4000 mas/anno. La parallasse dovuta al moto proprio si può però separare perché non è periodica.

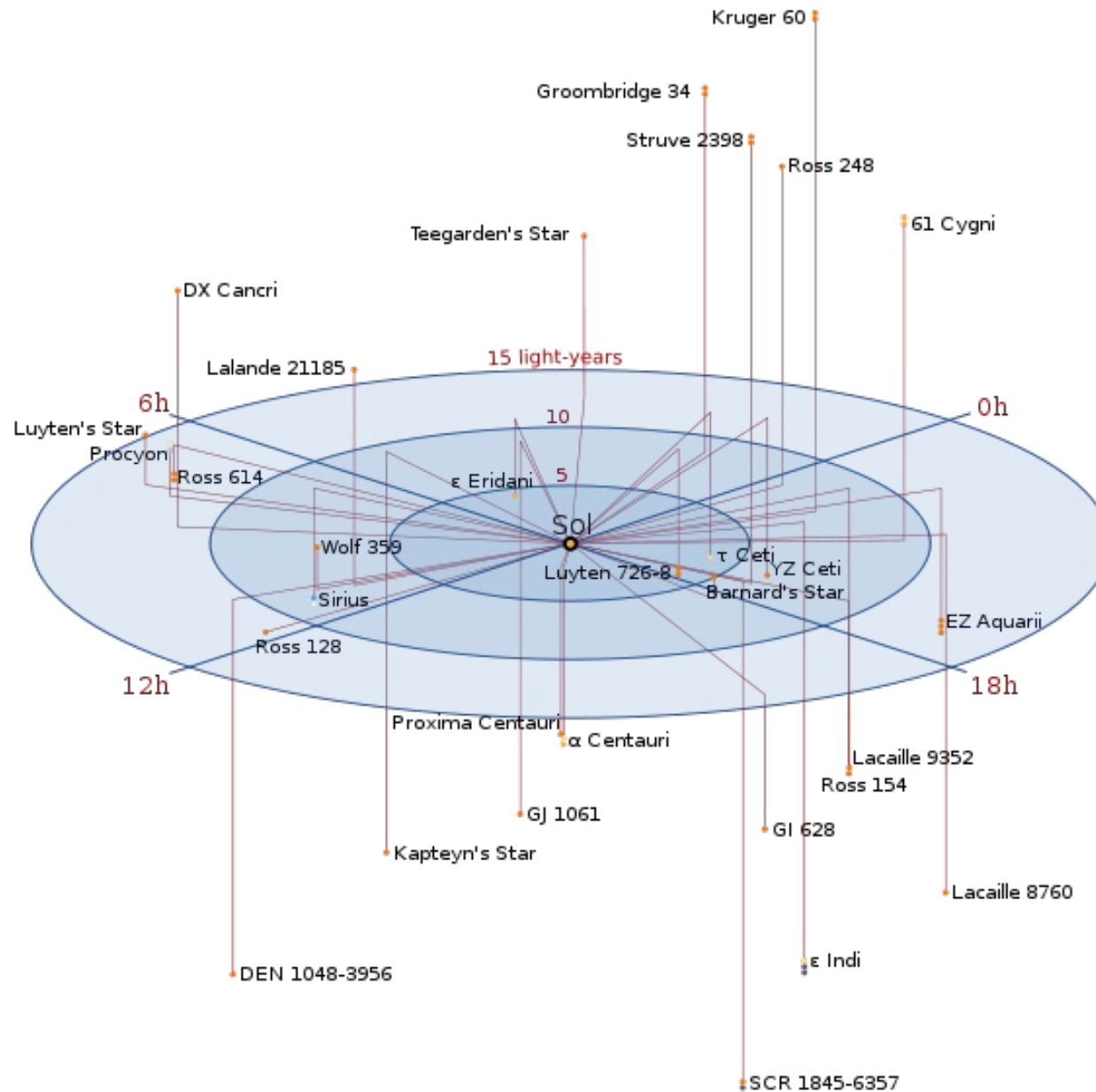
Parallasse Stellare

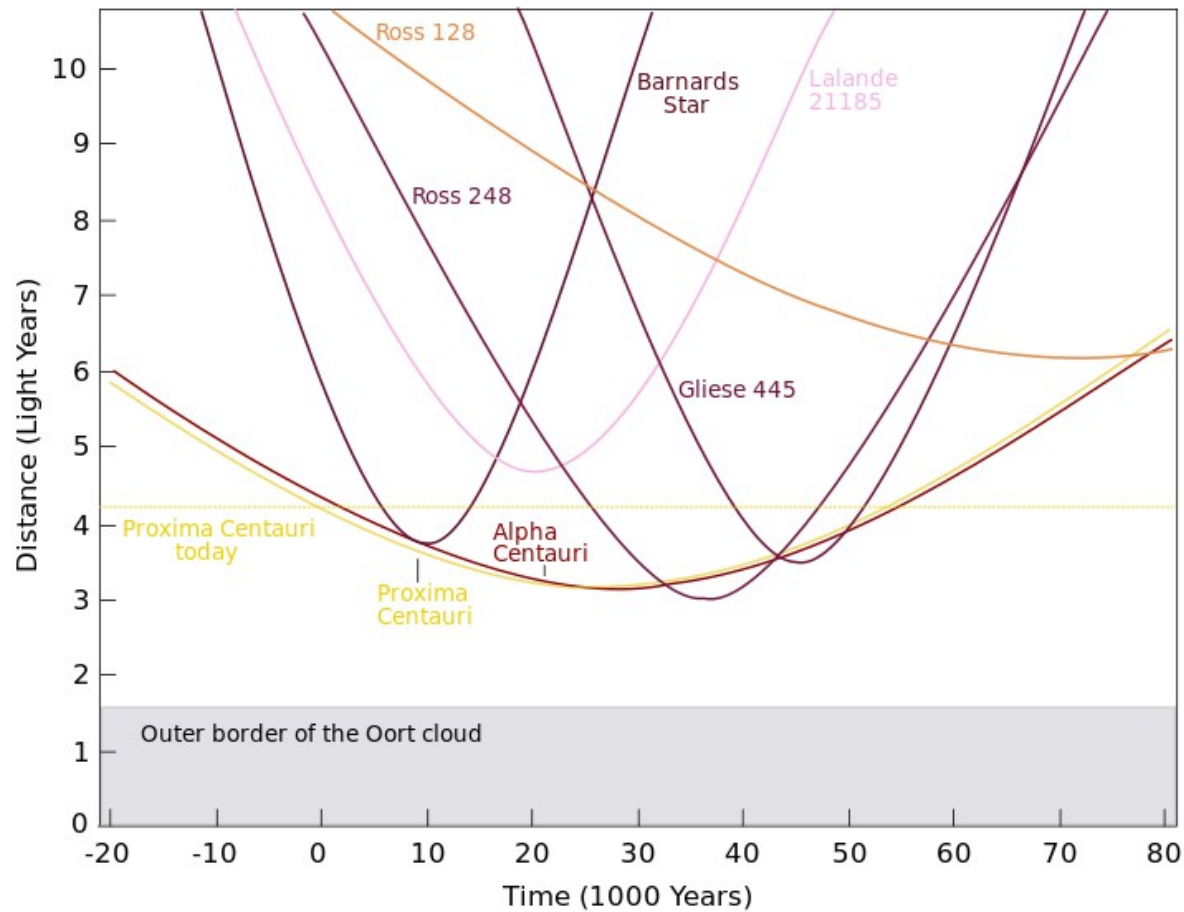
Da terra la parallasse piu' piccola che si puo' osservare corrisponde a $p''=0.02$ equivalente a distanze minori di 50 pc. La misura di parallasse di stelle piu' lontane necessita di missioni su satellite.



Tra il 1989 ed il 1993 il satellite Hypparcos ha misurato la parallasse di circa 118.000 stelle con una precisione di un millesimo di secondo d'arco, $p''=0.001''$ Corrispondente alla distanza massima di 1 Kpc. Queste sono ancora distanze piccole (ad esempio il centro della nostra galassia Dista da noi circa 8 Kpc). Quindi la parallasse si puo' misurare solo di stelle vicine. Prossime missioni come GAIA dovrebbero misurare parallassi di circa 10 microsecondi d'arco ($p''=0.00001$, 10 Kpc) per un miliardo di stelle.

Mappa delle stelle piu' prossime al Sole (entro 14 anni luce)





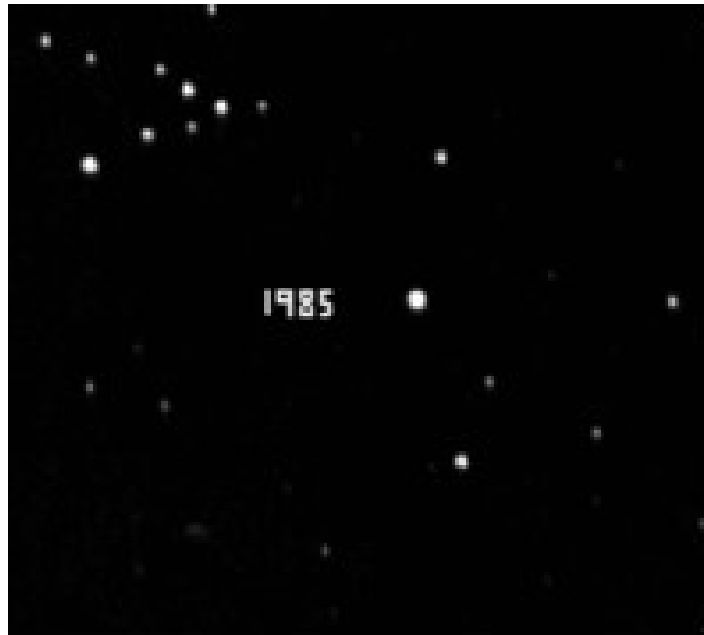
Al momento Proxima Centauri e' la stella piu' vicina e... si sta avvicinando !

Il minimo si avra' tra 24.000 anni.

Tra 10.000 anni anche la stella di Barnard sara' «vicina».

Fra 30.000 anni la piu' vicina sara' Ross 248.

Stella fuggitiva di Barnard



La **Stella di Barnard** è una stella nella costellazione dell'Ofiuco. Mostra il più grande moto proprio di ogni altra stella conosciuta (a parte il Sole), pari a **10,3 secondi d'arco all'anno**. Questo grande moto proprio fu scoperto dall'astronomo Edward Emerson Barnard nel 1916.

Per questo viene anche a volte citata come *Barnard's "Runaway" Star*, cioè stella fuggitiva di Barnard.

Trovandosi ad una distanza di poco inferiore ai 6 anni luce, la Stella di Barnard è anche una delle stelle più vicine alla Terra: solo le tre componenti del sistema di Alpha Centauri sono più vicine (non contando il Sole). E' una stella però di luce debolissima (vedremo) e quindi visibile solo al telescopio.

La Scala delle Magnitudini



Ipparco di Nicea 190 a.c.-120 a.c. fu il primo a produrre un catalogo di stelle (circa 1000) di cui individuò latitudine, Longitudine e a luminosità degli astri, che utilizzò quale parametro per una classificazione che assegnava ciascuna stella in sei gruppi: la cosiddetta **magnitudine** stellare.

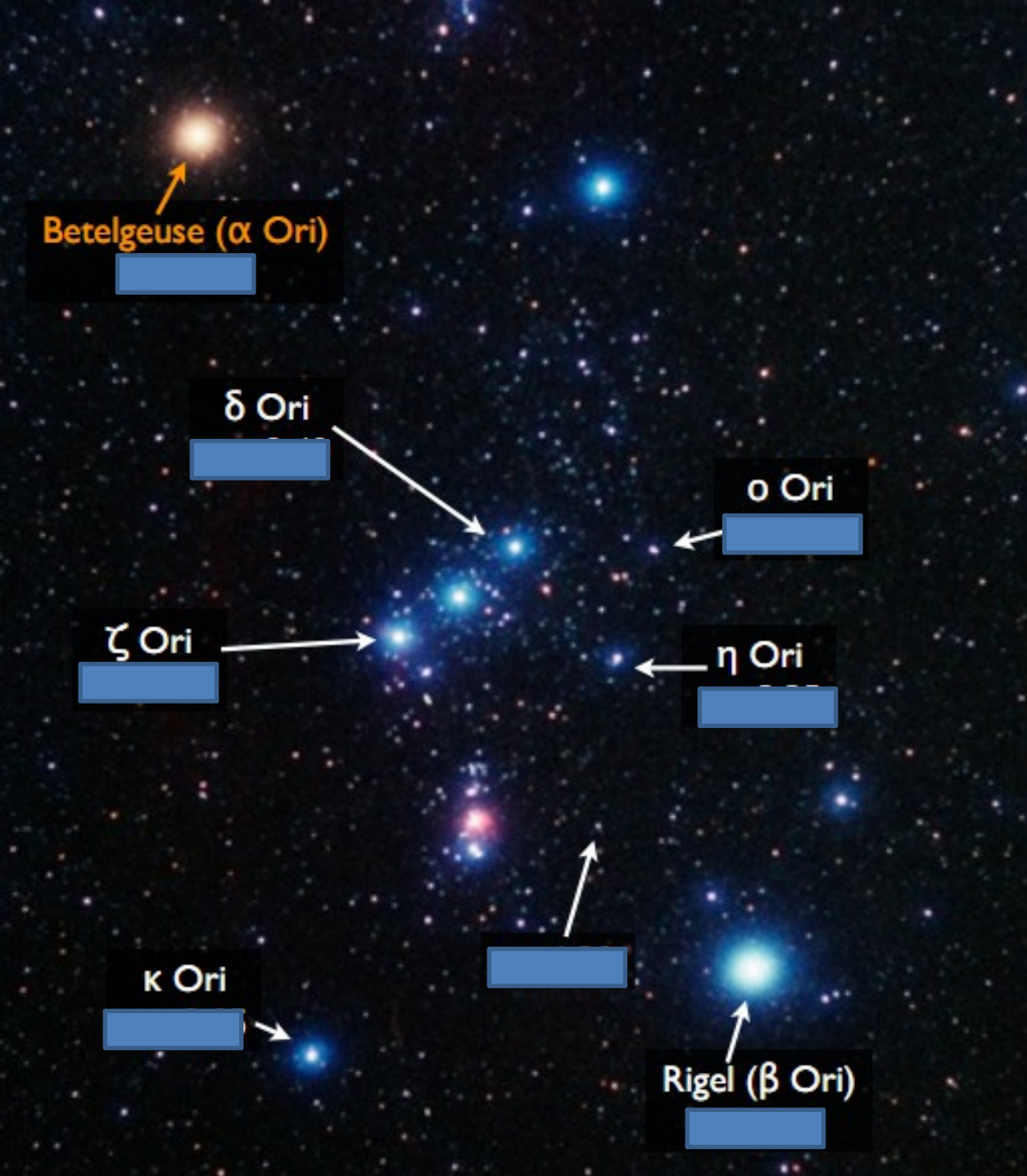
Magnitudine apparente $m=1$ la stella più luminosa.

Magnitudine apparente $m=6$ la stella meno luminosa.

Notate che le stelle **meno** luminose hanno magnitudine **maggiore**.

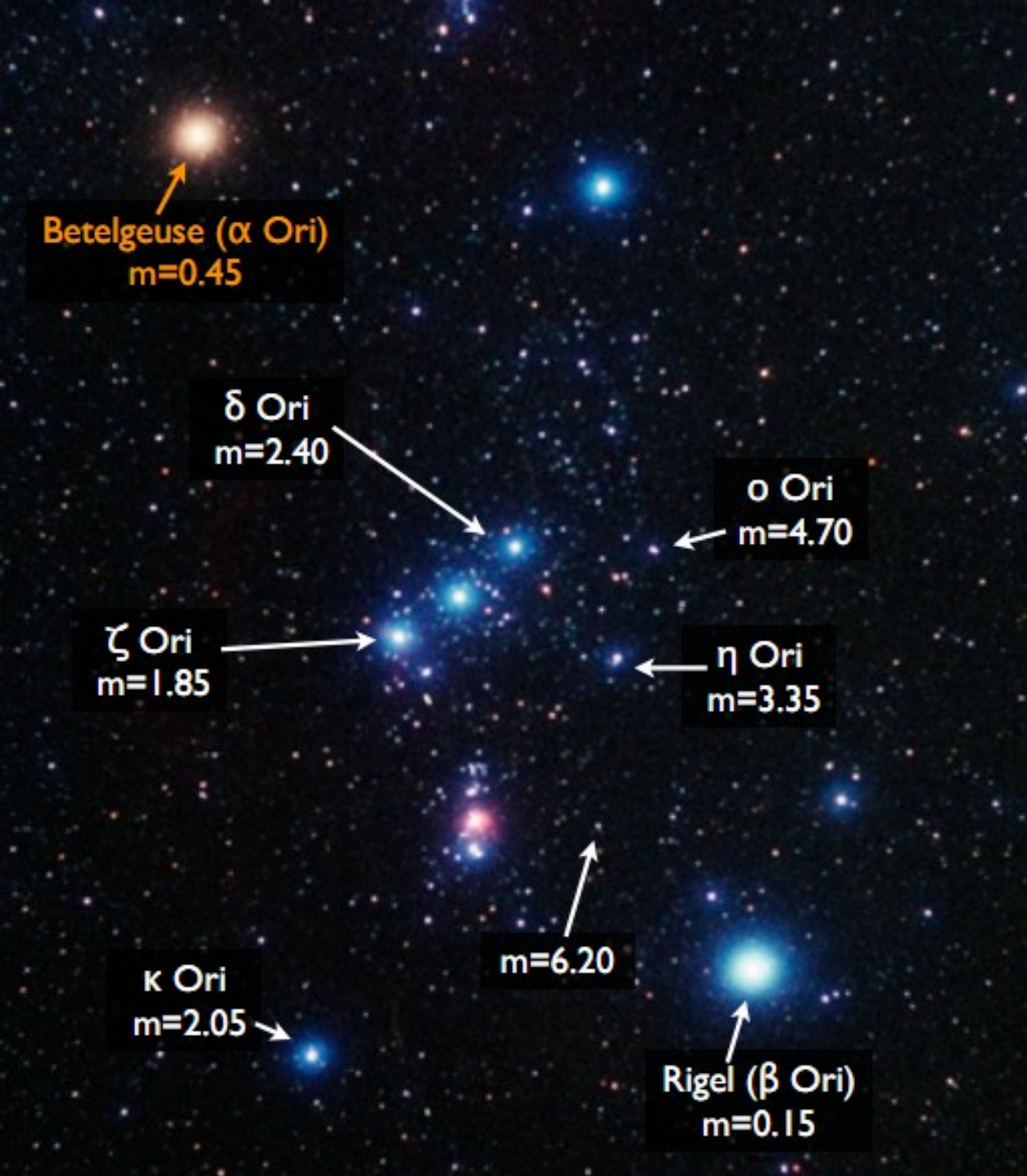
Classifichiamo la
luminosità delle
stelle usando la
magnitudine

Costellazione di
Orione



Classifichiamo la
luminosità delle
stelle usando la
magnitudine

Costellazione di
Orione



La Scala delle Magnitudini

Agli inizi del diciannovesimo secolo si pensava che l'occhio umano avesse una risposta logaritmica alla luce (questo non è esattamente vero).

Secondo la definizione moderna una stella più luminosa di 100 volte corrisponde ad una differenza di 5 magnitudini. Quindi **una** magnitudine corrisponde ad una differenza di circa $100^{0.2}$ vale a dire 2,512 volte.

Una stella di magnitudine 1 è 2,512 volte più luminosa di una stella di magnitudine 2, 6,31 volte più luminosa di una stella di magnitudine 3 e 100 volte più luminosa di una stella di magnitudine 6.

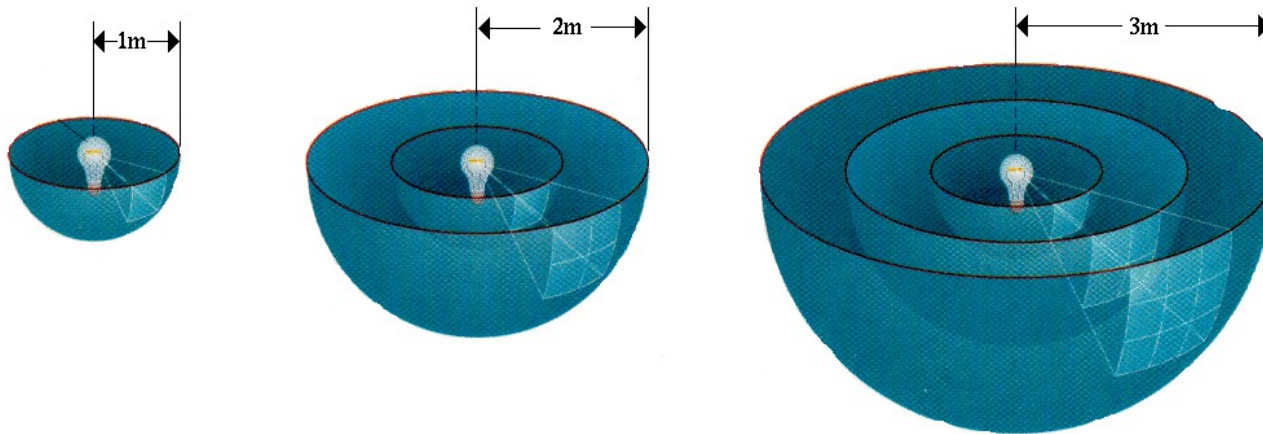
Con i telescopi attuali si possono misurare magnitudini con una precisione di **0.01** e differenze con una precisione di **0.002**. La scala di Ipparco comprende adesso **57** classi che vanno da $m = -26.83$ per il Sole fino a $m = 30$ per gli oggetti meno luminosi.

Flusso e Luminosità

Qualche definizione:

Il flusso radiativo o **flusso** di una stella è la quantità di energia emessa dalla stella che attraversa perpendicolarmente una unità di area nell'unità di tempo (si misura in Watt per metro quadro, ad esempio)

La **luminosità** è invece l'energia emessa per unità di tempo dalla sorgente (Watt).



$$f = \frac{L}{4\pi r^2}$$

Il flusso misurato dipende dalla **Luminosità** della sorgente e dalla sua **distanza**.

Esempio: la luminosita' del Sole e'

$$L_{\odot} = 3.839 \times 10^{26} \text{ W.}$$

Quale e' il flusso del Sole alla distanza di 1 A.U. (unita' Astronomica $1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$) ?

$$F = L / (4\pi R^2) = 1365 \text{ W m}^{-2}$$

Questo valore e' detta **irradianza solare** o anche **costante solare, S**.

Alla distanza di 10pc invece il flusso del sole diviene:

$$F_1 / F_2 = (R_2 / R_1)^2 = (2.063 \times 10^6 \text{ AU} / 1 \text{ AU})^2 = 4.3 \text{ miliardi minore !!}$$

Magnitudine Assoluta

Possiamo dare ad ogni stella una magnitudine **intrinseca** ovvero che non dipende dalla distanza alla quale si trova. Per ogni stella si definisce come **magnitudine assoluta** la magnitudine apparente che la stella avrebbe se fosse posta a 10pc da noi.

Ricordando quanto detto che la variazione di 5 magnitudini corrisponde ad una variazione di 100 volte nel flusso della stella, si ha, date due stelle che:

$$\frac{F_2}{F_1} = 100^{(m_1 - m_2)/5}.$$

Prendendo il logaritmo da entrambe le parti:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right).$$

Prendendo una delle due magnitudini a 10pc ovvero una come magnitudine assoluta, si ha:

$$100^{(m-M)/5} = \frac{F_{10}}{F} = \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)^2$$

Magnitudine Assoluta

$$100^{(m-M)/5} = \frac{F_{10}}{F} = \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)^2$$

$$d = 10^{(m-M+5)/5} \text{ pc.}$$

La quantità $(m-M)$ determina quindi la distanza della stella di magnitudine apparente m .
Si ha quindi il **modulo di distanza**:

$$m - M = 5 \log_{10}(d) - 5 = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right).$$

Magnitudine Assoluta

Conoscendo la distanza dal Sole possiamo calcolare la sua magnitudine assoluta:

Example 3.2.2. The apparent magnitude of the Sun is $m_{\text{Sun}} = -26.83$, and its distance is $1 \text{ AU} = 4.848 \times 10^{-6} \text{ pc}$. Equation (3.6) shows that the absolute magnitude of the Sun is

$$M_{\text{Sun}} = m_{\text{Sun}} - 5 \log_{10}(d) + 5 = +4.74,$$

as already given. The Sun's distance modulus is thus $m_{\text{Sun}} - M_{\text{Sun}} = -31.57$.⁵

Notate che la magnitudine assoluta e' maggiore in questo caso di quella apparente perche' Il Sole a 10 pc e' chiaramente meno luminoso che visto dalla Terra !
In generale la magnitudine assoluta di una stella e' sempre minore di quella apparente (tranne per quelle piu' vicine a noi di 10 pc).

Magnitudine Assoluta

Abbiamo visto che per definizione di magnitudine:

$$\frac{F_2}{F_1} = 100^{(m_1 - m_2)/5}.$$

Se le due stelle sono alla stessa distanza allora si ha:

$$100^{(M_1 - M_2)/5} = \frac{L_2}{L_1}.$$

Se una delle due stelle è il sole troviamo la relazione tra magnitudine Assoluta e luminosità della stella:

$$M = M_{\text{Sun}} - 2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right),$$

Maggiore è la luminosità della stella minore è la sua magnitudine assoluta