

Correnti variabili nel tempo

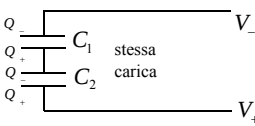
- Finora abbiamo studiato circuiti in corrente continua, cioè circuiti in cui siamo "a regime", molto tempo ($t \gg \tau_i$) dopo l'inizio del processo, quando tutte le correnti si sono stabilizzate.
- Oggi cominciamo a studiare situazioni più dinamiche, partendo dal primo circuito che introduce una costante di tempo nel sistema: la carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore.
- Poi generalizzeremo a circuiti più complessi e al caso particolarmente importante di correnti variabili in modo periodico.

- Per gli elementi passivi valgono le seguenti relazioni, note dallo studio dell'elettromagnetismo:

 $V = RI$; Legge di Ohm $I = V / R$	 $V = \frac{1}{C} \int_0^t Idt$; Def. di $C = Q/V$ $I = C \frac{dV}{dt}$	 $V = L \frac{dI}{dt}$; Legge di Lenz $I = \frac{1}{L} \int_0^t Vdt$
--	---	---

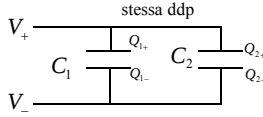
- Dove:
 - V = differenza di potenziale ai capi dell'elemento considerato,
 - I = intensità di corrente che attraversa l'elemento stesso,
 - R = resistenza,
 - C = capacità,
 - L = coefficiente di autoinduzione (o induttanza), t = tempo

Condensatori in serie e in parallelo



stessa carica

$V_+ - V_- = V_{C_1} + V_{C_2} = \frac{Q_+}{C_1} + \frac{Q_+}{C_2}$
 $C_s = \frac{Q_+}{V_+ - V_-} = \frac{Q_+}{\frac{Q_+}{C_1} + \frac{Q_+}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$
 $C_s^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$

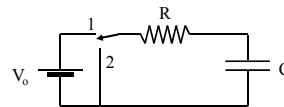


stessa ddp

$C_p = \frac{Q_{1+} + Q_{2+}}{V_+ - V_-} = \frac{Q_{1+}}{V_+ - V_-} + \frac{Q_{2+}}{V_+ - V_-}$
 $C_p = C_1 + C_2$

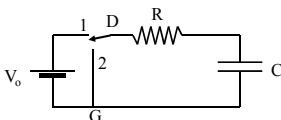
Carica e scarica di un condensatore

- Un condensatore può essere caricato collegando le sue armature ad un generatore di tensione.
- Nel circuito sarà sempre presente una resistenza, sia essa quella interna del generatore, quella dei conduttori di collegamento, o quella di un resistore inserito in serie per rallentare il processo.



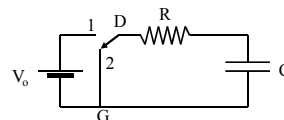
Carica e scarica di un condensatore

- Consideriamo quindi il circuito sotto, con il deviatore D che può connettere il punto D al generatore (nella posizione 1), oppure al conduttore G ("massa", o riferimento delle ddp) nella posizione 2.



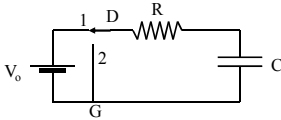
Carica e scarica di un condensatore

- Se il deviatore è stato nella posizione 2 per un tempo abbastanza lungo, il condensatore è completamente scarico.



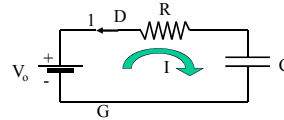
Carica e scarica di un condensatore

- Al tempo $t=0$ commutiamo il deviatore nella posizione 1, e quindi connettiamo il condensatore al generatore attraverso la resistenza.



Carica e scarica di un condensatore

- Al tempo $t=0$ commutiamo il deviatore nella posizione 1, e quindi connettiamo il condensatore al generatore attraverso la resistenza.
- Risolviamo il circuito considerando il verso orario della corrente come positivo:



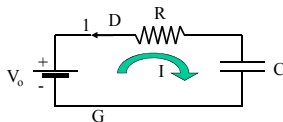
Carica e scarica di un condensatore

- Possiamo scrivere subito $V_o = IR + V_C$
- E quindi

$$V_o = \frac{dQ}{dt}R + \frac{Q}{C} \Rightarrow RC \frac{dQ}{dt} = CV_o - Q$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{CV_o - Q} = \frac{dt}{RC} \Rightarrow -\ln(CV_o - Q) \Big|_{t_0}^t = \frac{t}{RC} \Big|_{t_0}^t$$

$$-\ln\left(\frac{CV_o - Q}{CV_o - Q_0}\right) = \frac{t}{RC}$$



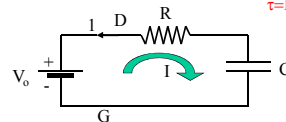
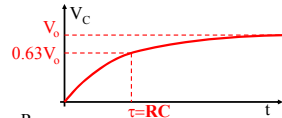
Carica e scarica di un condensatore

qui Q_0 e' la eventuale carica iniziale. Nel nostro caso $Q_0 = Q(t=0) = 0$ e quindi

$$-\ln\left(\frac{CV_o - Q}{CV_o}\right) = \frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{CV_o - Q}{CV_o} = e^{-t/RC} \Rightarrow Q(t) = CV_o(1 - e^{-t/RC})$$

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_o(1 - e^{-t/RC})$$

dove $\tau = RC$ e' la costante di tempo del processo



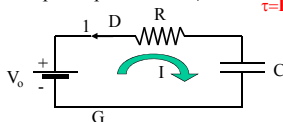
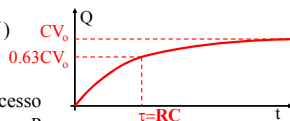
Carica e scarica di un condensatore

qui Q_0 e' la eventuale carica iniziale. Nel nostro caso $Q_0 = Q(t=0) = 0$ e quindi

$$-\ln\left(\frac{CV_o - Q}{CV_o}\right) = \frac{t}{RC} \Rightarrow Q(t) = CV_o(1 - e^{-t/RC})$$

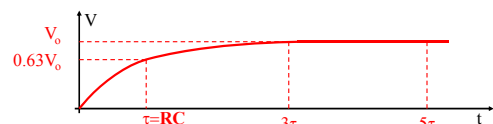
$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_o(1 - e^{-t/RC})$$

dove $\tau = RC$ e' la costante di tempo del processo



Carica e scarica di un condensatore

- Dopo un tempo pari a circa 3 o 4 costanti di tempo τ il processo e' praticamente a regime:
- $V(\tau) = [1 - \exp(-1)]V_o = 0.63V_o$
- $V(3\tau) = [1 - \exp(-3)]V_o = 0.95V_o$
- $V(4\tau) = [1 - \exp(-4)]V_o = 0.98V_o$
- $V(5\tau) = [1 - \exp(-5)]V_o = 0.993V_o$



- Ordine di grandezza: $R = 1M\Omega$, $C = 1\mu F \rightarrow \tau = 1s$
- Per altri valori, si scala linearmente !

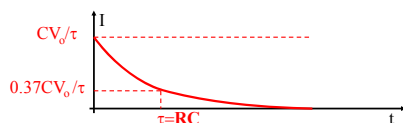
Carica e scarica di un condensatore

La tensione ai capi di R e la corrente si trovano

facilmente da $I = \frac{dQ}{dt}$ e $V = RI$ sapendo che

$$Q(t) = CV_0(1 - e^{-t/\tau}).$$

Si ottiene subito $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{CV_0}{\tau} e^{-t/\tau}$ e $V_R = V_0 e^{-t/\tau}$



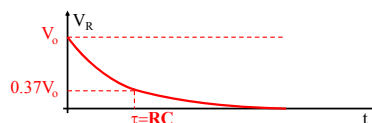
Carica e scarica di un condensatore

La tensione ai capi di R e la corrente si trovano

facilmente da $I = \frac{dQ}{dt}$ e $V = RI$ sapendo che

$$Q(t) = CV_0(1 - e^{-t/\tau}).$$

Si ottiene subito $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{CV_0}{\tau} e^{-t/\tau}$ e $V_R = V_0 e^{-t/\tau}$



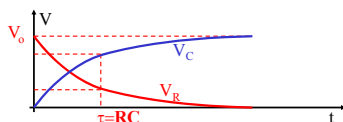
Carica e scarica di un condensatore

La tensione ai capi di R e la corrente si trovano

facilmente da $I = \frac{dQ}{dt}$ e $V = RI$ sapendo che

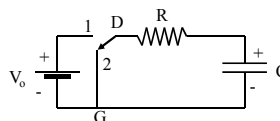
$$Q(t) = CV_0(1 - e^{-t/\tau}).$$

Si ottiene subito $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{CV_0}{\tau} e^{-t/\tau}$ e $V_R = V_0 e^{-t/\tau}$



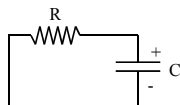
Carica e scarica di un condensatore

- Consideriamo adesso il processo di scarica.
- Dopo averlo caricato ad una carica Q ed una ddp V_0 , connettiamo il condensatore alla resistenza R commutando il deviatore nella posizione 2.



Carica e scarica di un condensatore

- Consideriamo adesso il processo di scarica.
- Dopo averlo caricato ad una carica Q ed una ddp V_0 , connettiamo il condensatore alla resistenza R commutando il deviatore nella posizione 2.
- Il condensatore si scaricherà facendo fluire corrente in R in modo da annullare le cariche sulle sue armature.



Carica e scarica di un condensatore

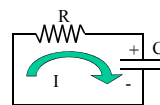
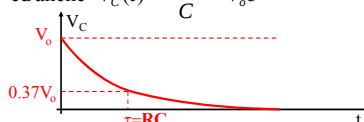
con la solita convenzione per il verso della corrente otteniamo:

$$-IR - V_C = 0$$

$$-\frac{dQ}{dt}R - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

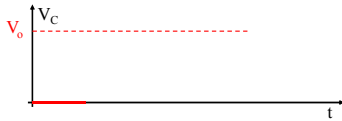
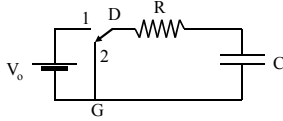
$$\text{e quindi } Q(t) = CV_0 e^{-t/\tau}$$

$$\text{ed anche } V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0 e^{-t/\tau}$$



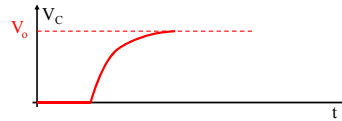
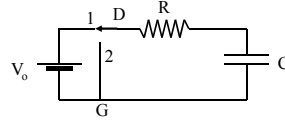
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:



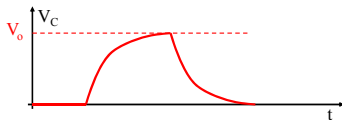
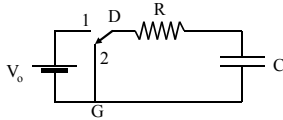
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:



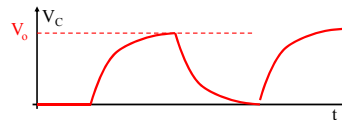
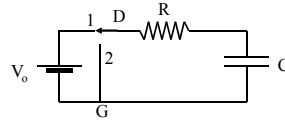
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:



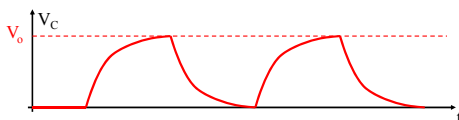
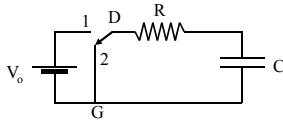
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:



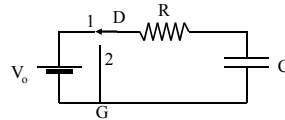
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:

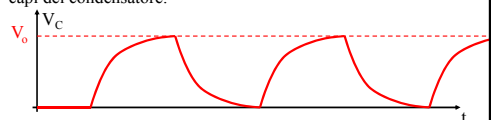


Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:

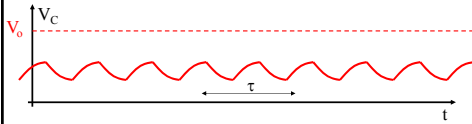


- Al passare del tempo otteniamo una tensione periodica ai capi del condensatore.



Carica e scarica di un condensatore

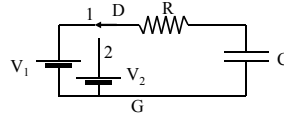
- Se non aspettiamo molte costanti di tempo, il condensatore non fara' a tempo a caricarsi e scaricarsi completamente.
- Otterremo una forma d' onda di questo genere:



- Vediamo quantitativamente cosa succede.

Carica e scarica di un condensatore

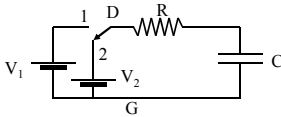
- Supponiamo di commutare periodicamente D, tra la tensione V_2 e la tensione V_1 .



t

Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, tra la tensione V_2 e la tensione V_1 .

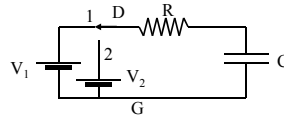


t

Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, tra la tensione V_2 e la tensione V_1 .
- Possiamo modificare la formula che avevamo trovato per la carica del condensatore:

$$-\ln\left(\frac{CV_{gen} - Q(t)}{CV_{gen} - Q_{ini}}\right) = \frac{t}{RC} \Rightarrow -\ln\left(\frac{CV_{new} - Q(t)}{CV_{new} - CV_{old}}\right) = \frac{t}{RC}$$



- Ottenendo $V_C(t) = V_{new} - (V_{new} - V_{old})e^{-t/\tau}$
- Qui new e old sono i valori di V_C rispettivamente prima e dopo la commutazione, cioe' alternativamente V_1 e V_2 .

Carica e scarica di un condensatore

$$-\ln\left(\frac{CV_{new} - Q(t)}{CV_{new} - CV_{old}}\right) = \frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{CV_{new} - Q(t)}{CV_{new} - CV_{old}} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

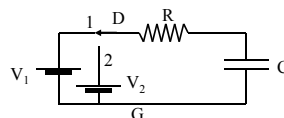
$$\Rightarrow \frac{V_{new} - Q(t)/C}{V_{new} - V_{old}} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$V_C(t) = V_{new} - (V_{new} - V_{old})e^{-t/\tau}$$

Carica e scarica di un condensatore

- In pratica, se il deviatore viene mosso su 2, abbiamo $V_{old} = V_1$ e $V_{new} = V_2$; quando invece il deviatore viene mosso su 1, abbiamo $V_{old} = V_2$ e $V_{new} = V_1$.
- In ogni caso:

$$V_C(t) = V_{new} - (V_{new} - V_{old})e^{-t/\tau}$$



t

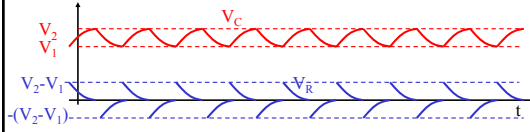
Carica e scarica di un condensatore

$$V_C(t) = V_{new} - (V_{new} - V_{old})e^{-t/\tau} \Rightarrow V_{old} < V_C(t) < V_{new}$$

- Ad esempio se $V_{new}=V_o$ e $V_{old}=0$ si ottiene il caso della carica del condensatore; se $V_{new}=0$ e $V_{old}=V_o$ si ottiene la scarica.
- In generale avremo anche:

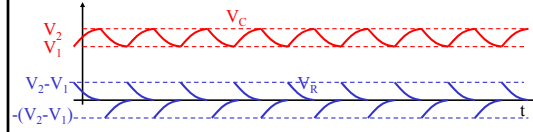
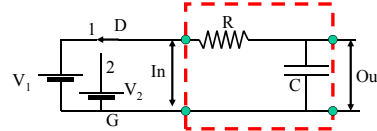
$$V_R(t) = RI = R \frac{dQ}{dt} = RC \frac{dV_C}{dt} = (V_{new} - V_{old}) e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow 0 < |V_R(t)| < |V_{new} - V_{old}|$$



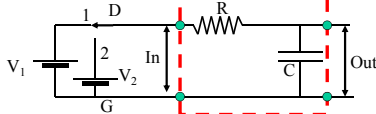
Carica e scarica di un condensatore

- Se consideriamo il **circuito RC** come un blocco con un ingresso ed una uscita:

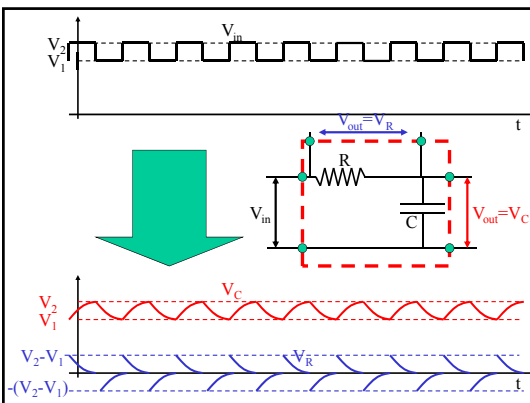
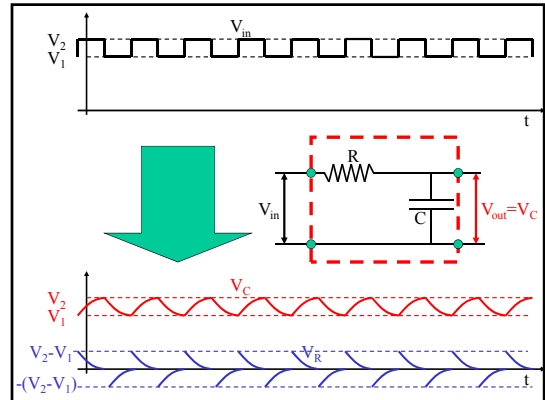
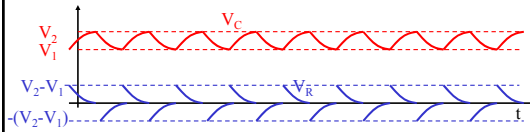


Carica e scarica di un condensatore

- Se consideriamo il **circuito RC** come un blocco con un ingresso ed una uscita:

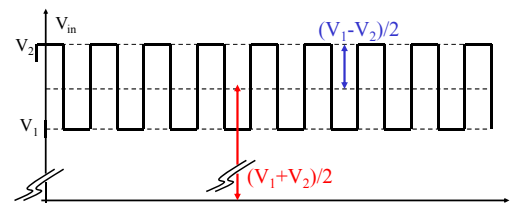


- Abbiamo applicato una V_{in} quadra tra V_1 e V_2 , e ottenuto in uscita una V_{out} fatta da rami di esponenziali crescenti e decrescenti



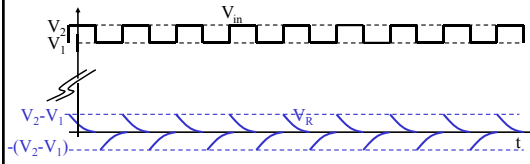
CR come "filtro per la continua"

- E' interessante considerare la tensione quadra V_{in} come la somma di una tensione costante di valore $(V_1+V_2)/2$ e di una componente a media nulla di valore $\pm(V_1-V_2)/2$:
- $V_{in} = (V_1+V_2)/2 \pm (V_1-V_2)/2$



CR come “filtro per la continua”

- $V_m = (V_1 + V_2)/2 \pm (V_1 - V_2)/2$
- Dai nostri risultati e' evidente che il valore del segnale in uscita ai **capi della resistenza** dipende solo dalla componente $\pm(V_1 - V_2)/2$, ed e' assolutamente indipendente dal valore continuo $(V_1 + V_2)/2$.
- Cioe' V_1 e V_2 possono essere anche molto grandi, ma ai capi della resistenza si misura un segnale che dipende solo dalla loro differenza.
- Far passare il segnale attraverso il condensatore permette quindi di **disaccoppiare la componente alternata da quella continua**.

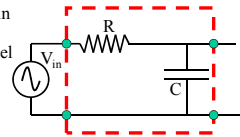


Regime sinusoidale

- Consideriamo il solito circuito RC, ma utilizziamo una V_{in} sinusoidale invece che quadra.

- Il caso sinusoidale e' molto importante perche'

- Una forma d'onda periodica qualsiasi puo' essere sviluppata in serie di armoniche (sviluppo di Fourier). Siccome le equazioni del circuito sono lineari, la risposta all'onda qualsiasi e' la somma delle risposte alle singole componenti sinusoidali.
- Ci sono generatori di segnali sinusoidali importanti (la rete elettrica ad es., e molti componenti elettromeccanici (alternatori ad es.).



Regime sinusoidale

$$V_{in} = V_o \cos(\omega t)$$

$$V(t) - R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$V(t) - RC \frac{dV_C}{dt} - V_C = 0$$

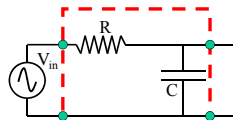
$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_o \cos(\omega t)$$

si cerca una soluzione del tipo

$$V_C = V_{oc} \cos(\omega t + \phi)$$

Sostituendo si trovano le costanti

$$V_{oc} \text{ e } \phi$$



Regime sinusoidale

si preferisce pero' usare la notazione complessa, che rende piu' semplici i calcoli. Si usa l'identita'

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$

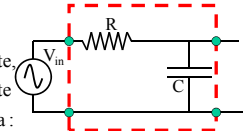
e si considera, convenzionalmente,

l'equazione per $V(t)$ come la parte reale di una equazione complessa :

Quindi :

$$V_C = V_{oc} e^{j(\omega t + \phi)} \quad \text{e} \quad V_{in} = V_o e^{j\omega t} \quad \text{e quindi}$$

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_o \cos(\omega t) \Rightarrow RCj\omega V_{oc} e^{j(\omega t + \phi)} + V_{oc} e^{j(\omega t + \phi)} = V_o e^{j\omega t}$$



Regime sinusoidale

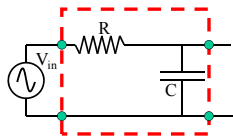
$$RCj\omega V_{oc} e^{j(\omega t + \phi)} + V_{oc} e^{j(\omega t + \phi)} = V_o e^{j\omega t}$$

$$RCj\omega V_{oc} e^{j\omega t} e^{j\phi} + V_{oc} e^{j\omega t} e^{j\phi} = V_o e^{j\omega t}$$

$$RCj\omega V_{oc} e^{j\phi} + V_{oc} e^{j\phi} = V_o$$

$$V_{oc} e^{j\phi} = \frac{V_o}{RCj\omega + 1} \quad \text{e quindi}$$

$$V_{oc} = \frac{V_o}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}$$



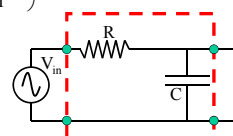
Regime sinusoidale

inoltre si puo' anche scrivere

$$V_{oc} e^{j\phi} = \frac{V_o}{RCj\omega + 1} = \frac{V_o}{(RC\omega)^2 + 1} (1 - jRC\omega)$$

usando il fatto che $\phi = \arctan \left(\frac{\text{Im}(V_{oc} e^{j\phi})}{\text{Re}(V_{oc} e^{j\phi})} \right)$ si trova subito

$$\phi = \arctan \left(-\frac{RC\omega}{1} \right) = \arctan(-RC\omega) = \arctan(-\tau\omega)$$



Regime sinusoidale

- Possiamo quindi graficare, in funzione della frequenza del segnale d'ingresso, l'ampiezza del segnale in uscita, ed il suo sfasamento:

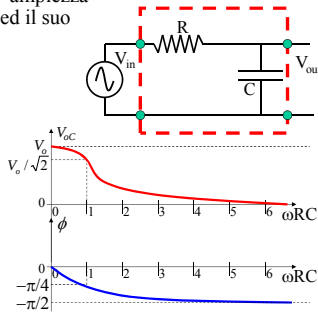
$$V_{in} = V_o e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$V_{out} = V_{oc} e^{j(\omega t + \phi)}$$

dove

$$V_{oc} = \frac{V_o}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}$$

$$\phi = \arctan(-\omega\tau)$$

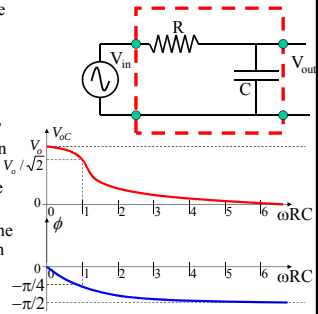


Regime sinusoidale

- Per $\omega \rightarrow 0$ la tensione ai capi del condensatore tende ad essere in ogni istante uguale a quella del generatore: condizioni quasistatiche

- Per $\omega \rightarrow \infty$ le variazioni di tensione in ingresso sono talmente veloci che il condensatore non riesce ne' a caricarsi ne' a scaricarsi in tempo. Di conseguenza la tensione ai suoi capi rimane nulla.

- Per ω intermedi, la tensione del condensatore segue, con un certo ritardo e ridotta in ampiezza, la tensione di ingresso.



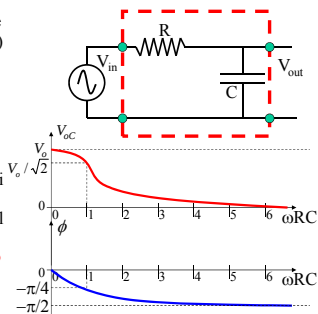
Regime sinusoidale

- Possiamo dire quindi che le pulsazioni ω molto minori di $1/RC$ (frequenze molto minori di $1/(2\pi RC)$) passano attraverso il blocco RC, mentre le pulsazioni ω molto maggiori di $1/RC$ non passano attraverso il blocco RC.

- Si conclude che, quando si prende il segnale in uscita ai capi del condensatore, il blocco RC si comporta come un **filtro passa basso**

- La frequenza $f_c = 1/(2\pi RC)$ viene detta **frequenza di taglio del filtro**.

O.D.G.: $R=1k\Omega$, $C=1\mu F$, $f_c=0.16$ kHz



- Alla rappresentazione complessa delle tensioni corrisponde una rappresentazione geometrica interessante.

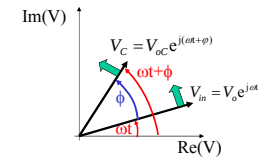
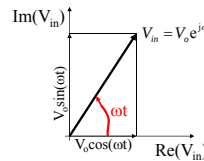
- Nel piano complesso i segnali

$$V_{in} = V_o \cos(\omega t) \Rightarrow V_{in} = V_o e^{j\omega t}$$

$$V_c = V_{oc} \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow V_c = V_{oc} e^{j(\omega t + \phi)}$$

sono vettori che ruotano in senso antiorario con velocità

ω . Se ϕ è positivo, V_c è in anticipo rispetto a V_{in}



Corrente

- La corrente che scorre nel circuito ... e'

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_c}{dt} = C \frac{d}{dt} (V_{oc} e^{j(\omega t + \phi)}) = CV_{oc} j\omega e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$i_c = i = (j\omega C) V_c$$

Legge di Ohm Generalizzata: basta pensare ad una "impedenza" del condensatore pari a $1/j\omega C$

$$i = j\omega CV_c = \frac{j\omega CV_{oc}}{RCj\omega + 1}$$

scrivendo la corrente nella forma $i = I_o e^{j(\omega t + \phi_I)}$ si ottiene :

$$I_o = V_o \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\phi_I = \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)$$

Corrente

- La corrente che scorre nel circ. durante la carica e scarica del condensatore e'

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_c}{dt} = C \frac{d}{dt} (V_{oc} e^{j(\omega t + \phi)}) = CV_{oc} j\omega e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$i_c = i = (j\omega C) V_c$$

Legge di Ohm Generalizzata: basta pensare ad una "impedenza" del condensatore pari a $1/j\omega C$

$$i = j\omega CV_c = \frac{j\omega CV_{oc}}{RCj\omega + 1}$$

scrivendo la corrente nella forma $i = I_o e^{j(\omega t + \phi_I)}$ si ottiene :

$$I_o = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} V_o$$

$$\phi_I = \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)$$

da confrontare con

$$V_{oc} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} V_o$$

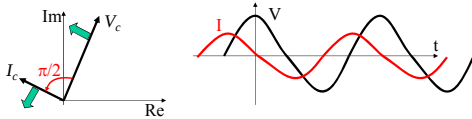
$$\phi_{V_c} = \arctan(-\omega\tau)$$

Corrente

- La corrente nel circuito e' quindi sfasata rispetto alla tensione ai capi del condensatore:

$$\tan(\varphi_I - \varphi_{V_C}) = \frac{\tan(\varphi_I) - \tan(\varphi_{V_C})}{1 + \tan(\varphi_{V_C})\tan(\varphi_I)} = \frac{\frac{1}{\omega\tau} + \omega\tau}{1 - \omega\tau \frac{1}{\omega\tau}} = +\infty$$
- Quindi

$$\varphi_I - \varphi_{V_C} = \frac{\pi}{2}$$
- La tensione ai capi del condensatore ha un ritardo di 90° rispetto alla corrente, indipendentemente dalla frequenza.



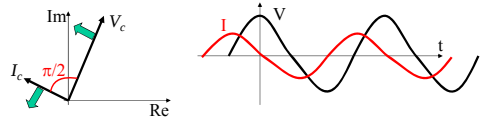
Corrente

- Con la notazione complessa si ritrova subito lo stesso risultato :

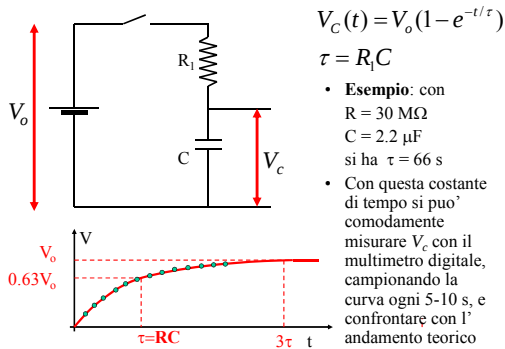
$$i_C = i = (j\omega C)V_C$$

$$V_{oC}e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{j\omega C}I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)} = -j\frac{1}{\omega C}I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)} = e^{-j\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\omega C}I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

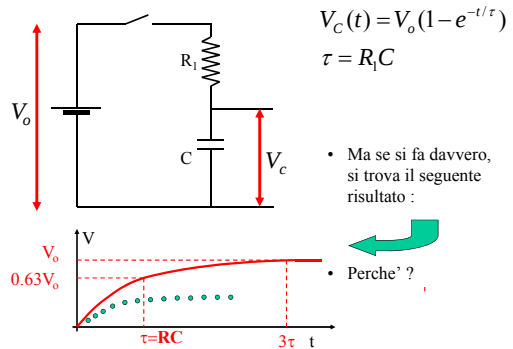
$$V_{oC}e^{j\varphi_{V_C}} = \frac{I_o}{\omega C}e^{j(\varphi_I - \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \varphi_I - \varphi_{V_C} = \frac{\pi}{2}$$



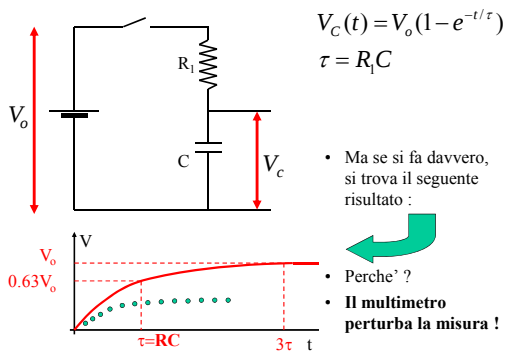
Esperienza: carica di un condensatore



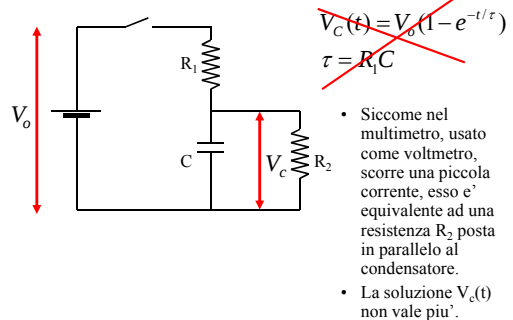
Carica di un condensatore



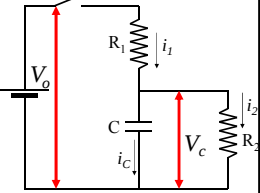
Carica di un condensatore



Carica di un condensatore



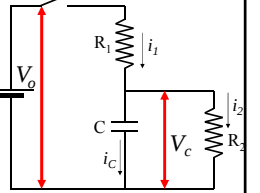
Carica di un condensatore

$$\begin{cases} V_o = V_C + R_1 i_1 \\ V_C = R_2 i_2 \\ V_C = \frac{Q}{C} \\ i_1 = i_2 + i_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_o = V_C + R_1 i_1 \\ V_C = R_2 i_2 \\ \frac{dV_C}{dt} = \frac{i_C}{C} \\ i_1 = i_2 + i_C \end{cases}$$


$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{i_1 - i_2}{C} = \frac{1}{C} \frac{V_o - V_C}{R_1} - \frac{1}{C} \frac{V_C}{R_2}$$

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_C = \frac{V_o}{CR_1} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{CR_p} V_C = \frac{V_o}{CR_1}$$

Carica di un condensatore

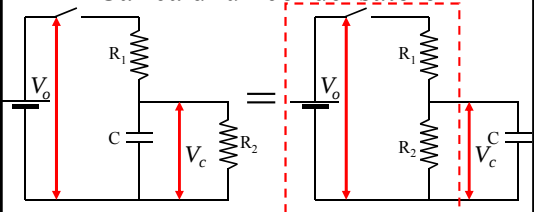
$$\begin{cases} V_o = V_C + R_1 i_1 \\ V_C = R_2 i_2 \\ V_C = \frac{Q}{C} \\ i_1 = i_2 + i_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_o = V_C + R_1 i_1 \\ V_C = R_2 i_2 \\ \frac{dV_C}{dt} = \frac{i_C}{C} \\ i_1 = i_2 + i_C \end{cases}$$


$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{i_1 - i_2}{C} = \frac{1}{C} \frac{V_o - V_C}{R_1} - \frac{1}{C} \frac{V_C}{R_2}$$

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_C = \frac{V_o}{CR_1} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{CR_p} V_C = \frac{V_o}{CR_1}$$

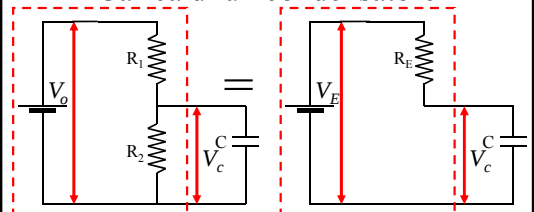
Ma c'è un metodo molto più semplice!

Carica di un condensatore



Per il Teorema di Thevenin, il circuito riquadrato è equivalente ad un generatore ideale di tensione con in serie una resistenza.

Carica di un condensatore

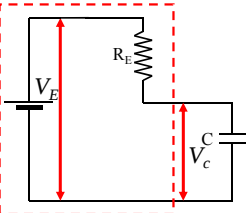


Per il Teorema di Thevenin, il circuito riquadrato è equivalente ad un generatore ideale di tensione con in serie una resistenza con:

$$R_E = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_E = V_o \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Carica di un condensatore



$$R_E = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_E = V_o \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Ma ora il circuito è proprio uguale al circuito ideale della carica di un condensatore, del quale abbiamo già la soluzione:

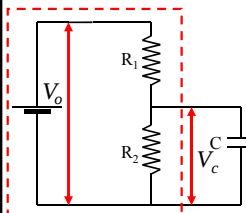
$$V_C(t) = V_E (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = R_E C$$

$$V_C(t) = V_o \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

Carica di un condensatore



$$V_C(t) = V_o \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$
