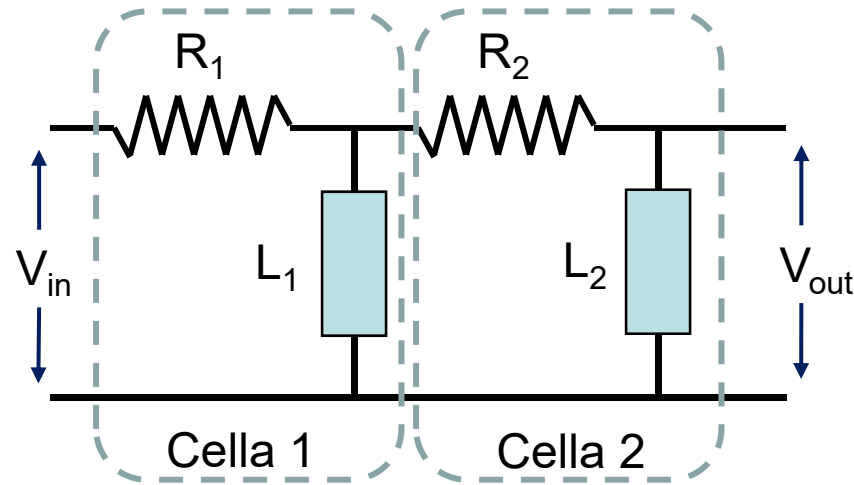




E' dato il circuito mostrato in figura, formato da due celle RL in cascata, dove V_{in} è un generatore ideale di tensione sinusoidale a frequenza f ; $R_1=10\Omega$, $R_2=100\Omega$, $L_1=10\text{mH}$, $L_2=1\text{mH}$ (induttori ideali).

1. Calcolare analiticamente la funzione di trasferimento complessa V_{out}/V_{in} , in modulo e sfasamento.
2. Calcolarne i limiti per bassa e alta frequenza.
3. Qual'è la condizione per cui la funzione di trasferimento calcolata come prodotto delle funzioni di trasferimento delle due celle è una buona approssimazione di quella reale calcolata al punto 1 ?

Esonero 2.1 - 08/06/2016 - Soluzione

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out}}{V_x} \frac{V_x}{V_{in}} \quad \frac{V_{out}}{V_x} = \frac{j\omega L_2}{R_2 + j\omega L_2}$$

$$\frac{V_x}{V_{in}} = \frac{Z_{//}}{R_1 + Z_{//}} = \frac{1}{1 + R_1 \frac{1}{Z_{//}}}$$

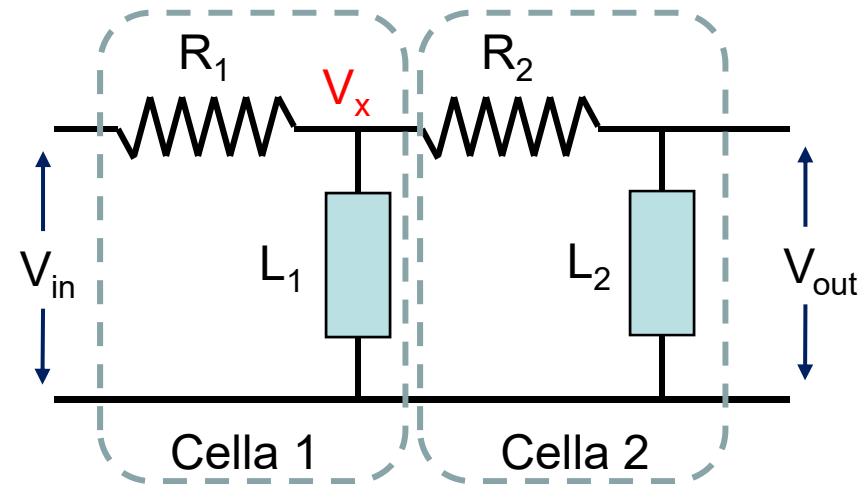
$$\frac{1}{Z_{//}} = \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_1}{j\omega L_1(R_2 + j\omega L_2)}$$

$$\frac{V_x}{V_{in}} = \frac{1}{1 + R_1 \frac{1}{Z_{//}}} = \frac{1}{1 + R_1 \frac{R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_1}{j\omega L_1(R_2 + j\omega L_2)}} = \frac{j\omega L_1(R_2 + j\omega L_2)}{j\omega L_1(R_2 + j\omega L_2) + R_1(R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{out}}{V_{in}} &= \frac{j\omega L_2}{R_2 + j\omega L_2} \frac{j\omega L_1(R_2 + j\omega L_2)}{j\omega L_1(R_2 + j\omega L_2) + R_1(R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_1)} = \\ &= \frac{-\omega^2 L_2 L_1}{(R_1 R_2 - \omega^2 L_2 L_1) + j\omega(L_1 R_2 + R_1 L_2 + R_1 L_1)} = \frac{-\omega^2 L_2 L_1[(R_1 R_2 - \omega^2 L_2 L_1) - j\omega(L_1 R_2 + R_1 L_2 + R_1 L_1)]}{(R_1 R_2 - \omega^2 L_2 L_1)^2 + \omega^2(L_1 R_2 + R_1 L_2 + R_1 L_1)^2} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{\omega^2 L_2 L_1}{\sqrt{(R_1 R_2 - \omega^2 L_2 L_1)^2 + \omega^2(L_1 R_2 + R_1 L_2 + R_1 L_1)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\omega(L_1 R_2 + R_1 L_2 + R_1 L_1)}{R_1 R_2 - \omega^2 L_2 L_1}$$



$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tan \varphi = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \tan \varphi = 0$$

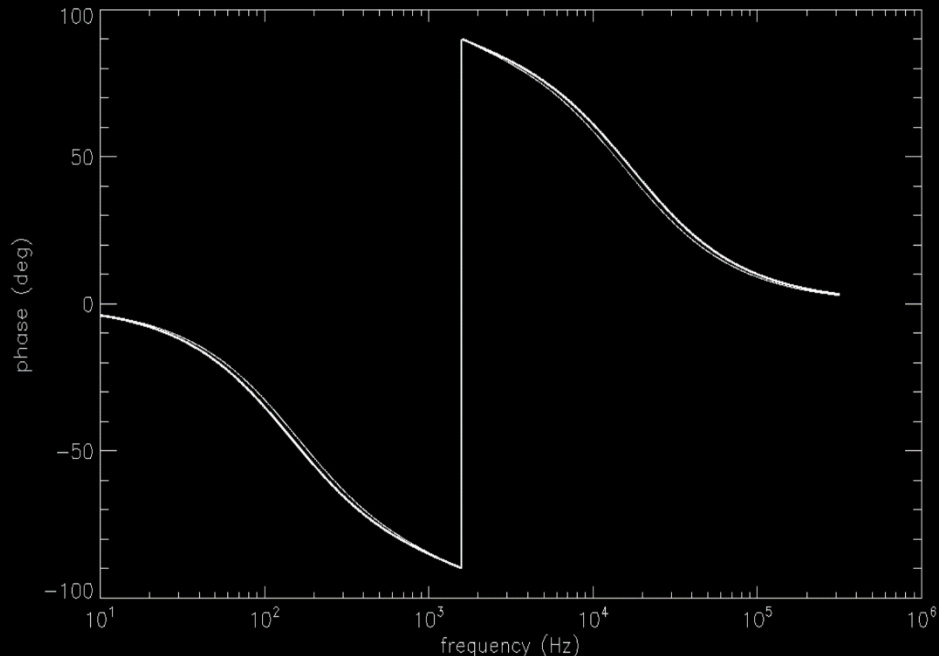
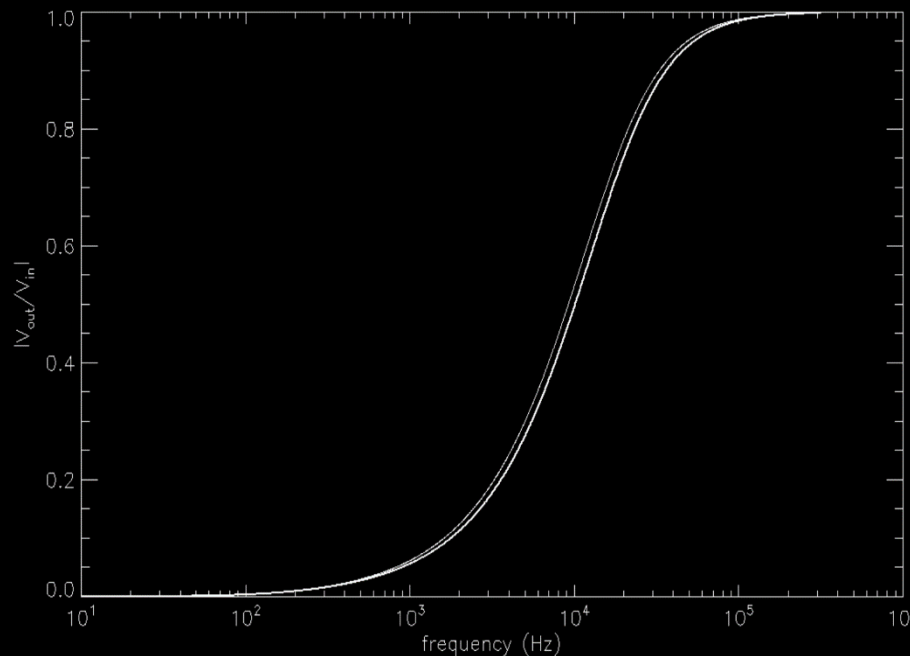
il prodotto delle funzioni di trasferimento delle due celle vale:

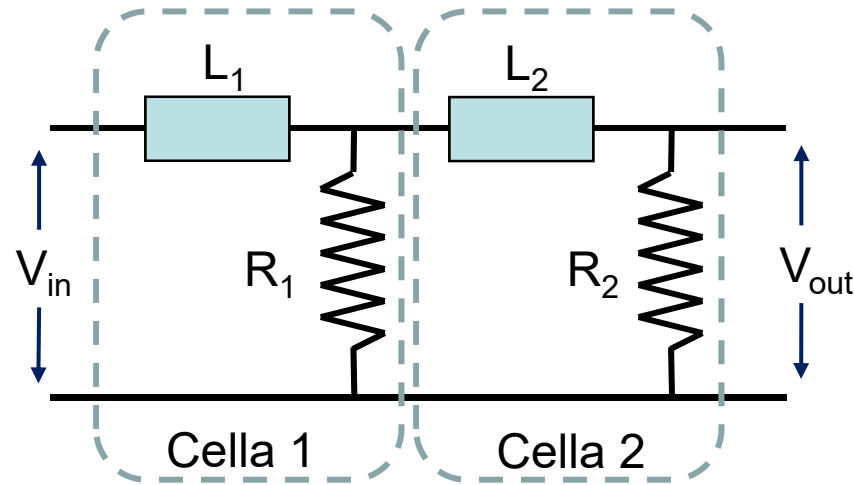
$$\frac{j\omega L_1}{R_1 + j\omega L_1} \cdot \frac{j\omega L_2}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{-\omega^2 L_1 L_2}{(R_1 R_2 - \omega^2 L_1 L_2) + j\omega(L_1 R_2 + R_1 L_2)}$$

Per confronto con la funzione di trasferimento completa, le due tendono a coincidere se

$$L_1 R_2 + R_1 L_2 \gg L_1 R_1$$

Nel caso numerico, la condizione è verificata. Le due FDT sono confrontate nelle figure sotto (linea spessa rigorosa, linea sottile approssimata).





E' dato il circuito mostrato in figura, formato da due celle LR in cascata, dove V_{in} è un generatore ideale di tensione sinusoidale a frequenza f ; $R_1=10\Omega$, $R_2=100\Omega$, $L_1=10\text{mH}$, $L_2=1\text{mH}$ (induttori ideali).

1. Calcolare analiticamente la funzione di trasferimento complessa V_{out}/V_{in} , in modulo e sfasamento.
2. Calcolarne i limiti per bassa e alta frequenza.
3. Qual'è la condizione per cui la funzione di trasferimento calcolata come prodotto delle funzioni di trasferimento delle due celle è una buona approssimazione di quella reale calcolata al punto 1 ?

Esonero 2.2 - 08/06/2016 - Soluzione

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out}}{V_x} \frac{V_x}{V_{in}} \quad \frac{V_{out}}{V_x} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_2}$$

$$\frac{V_x}{V_{in}} = \frac{Z_{//}}{j\omega L_1 + Z_{//}} = \frac{1}{1 + j\omega L_1 \frac{1}{Z_{//}}}$$

$$\frac{1}{Z_{//}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{R_2 + j\omega L_2 + R_1}{R_1(R_2 + j\omega L_2)}$$

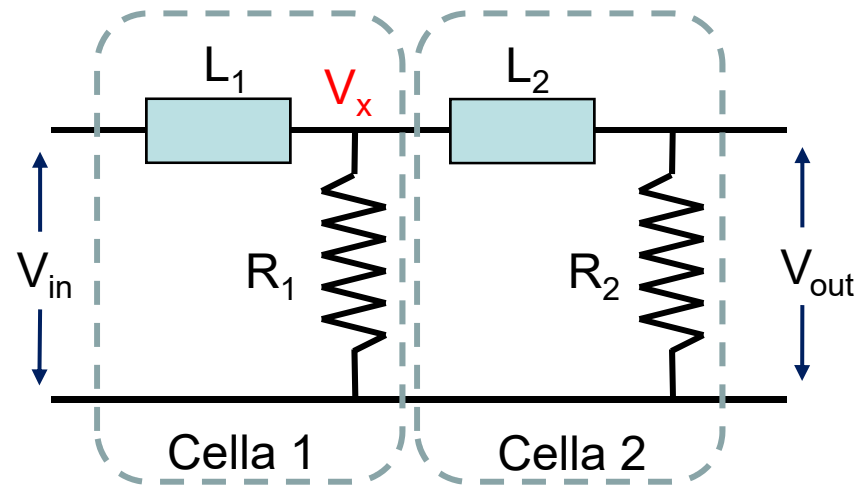
$$\frac{V_x}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega L_1 \frac{1}{Z_{//}}} = \frac{1}{1 + j\omega L_1 \frac{R_2 + j\omega L_2 + R_1}{R_1(R_2 + j\omega L_2)}} = \frac{R_1(R_2 + j\omega L_2)}{R_1(R_2 + j\omega L_2) + j\omega L_1(R_2 + j\omega L_2 + R_1)}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_2} \frac{R_1(R_2 + j\omega L_2)}{R_1(R_2 + j\omega L_2) + j\omega L_1(R_2 + j\omega L_2 + R_1)} =$$

$$= \frac{R_2 R_1}{(R_1 R_2 - \omega^2 L_2 L_1) + j\omega(L_1 R_2 + R_1 L_2 + R_1 L_1)} = \frac{R_2 R_1 [(R_1 R_2 - \omega^2 L_2 L_1) - j\omega(L_1 R_2 + R_1 L_2 + R_1 L_1)]}{(R_1 R_2 - \omega^2 L_2 L_1)^2 + \omega^2 (L_1 R_2 + R_1 L_2 + R_1 L_1)^2}$$

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{R_2 R_1}{\sqrt{(R_1 R_2 - \omega^2 L_2 L_1)^2 + \omega^2 (L_1 R_2 + R_1 L_2 + R_1 L_1)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\omega(L_1 R_2 + R_1 L_2 + R_1 L_1)}{R_1 R_2 - \omega^2 L_2 L_1}$$



$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tan \varphi = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \tan \varphi = 0$$

il prodotto delle funzioni di trasferimento delle due celle vale:

$$\frac{R_1}{R_1 + j\omega L_1} \cdot \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 R_2 - \omega^2 L_1 L_2) + j\omega(L_1 R_2 + R_1 L_2)}$$

Per confronto con la funzione di trasferimento completa, le due tendono a coincidere se

$$L_1 R_2 + R_1 L_2 \gg L_1 R_1$$

Nel caso numerico, la condizione è verificata. Le due FDT sono confrontate nelle figure sotto (linea spessa rigorosa, linea sottile approssimata).

