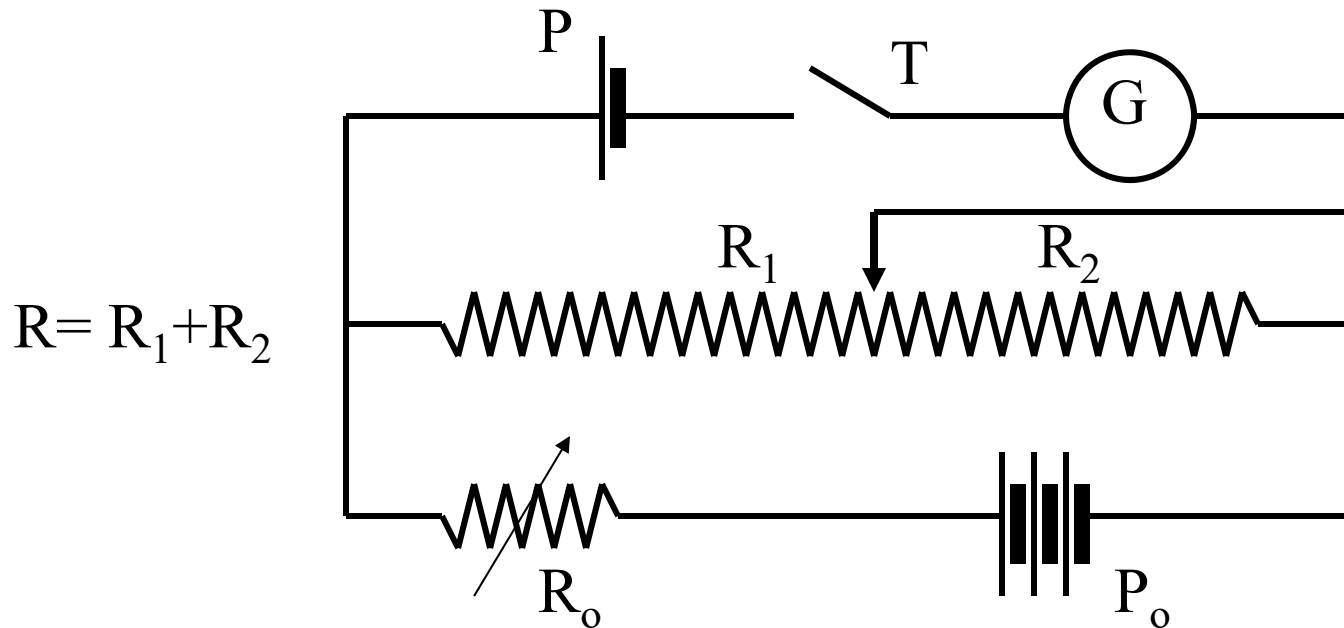


Misure di forze elettromotrici

- Il metodo potenziometrico o di Poggendorf permette di misurare la forza elettromotrice di un generatore confrontandola con una forza elettromotrice nota con precisione (pila campione).
- Si utilizzano un potenziometro ed un galvanometro (un amperometro estremamente sensibile) che viene usato come strumento di zero.

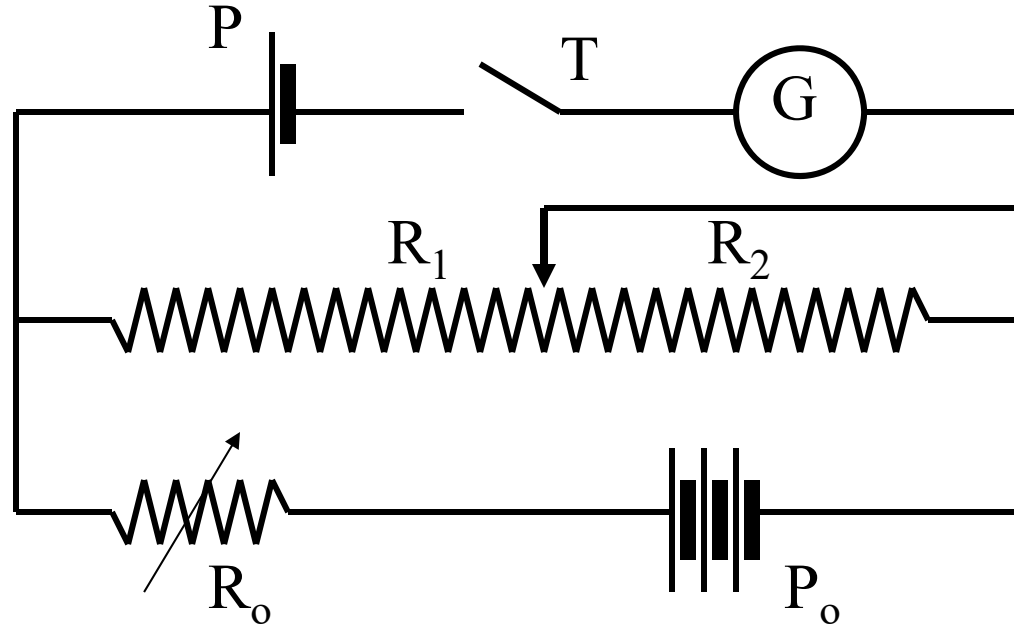
Misure di forze elettromotrici

- Si montano i componenti in modo che la f.e.m. campione si opponga alla f.e.m. da misurare nel ramo del galvanometro. Questa condizione si ottiene agendo sul potenziometro:



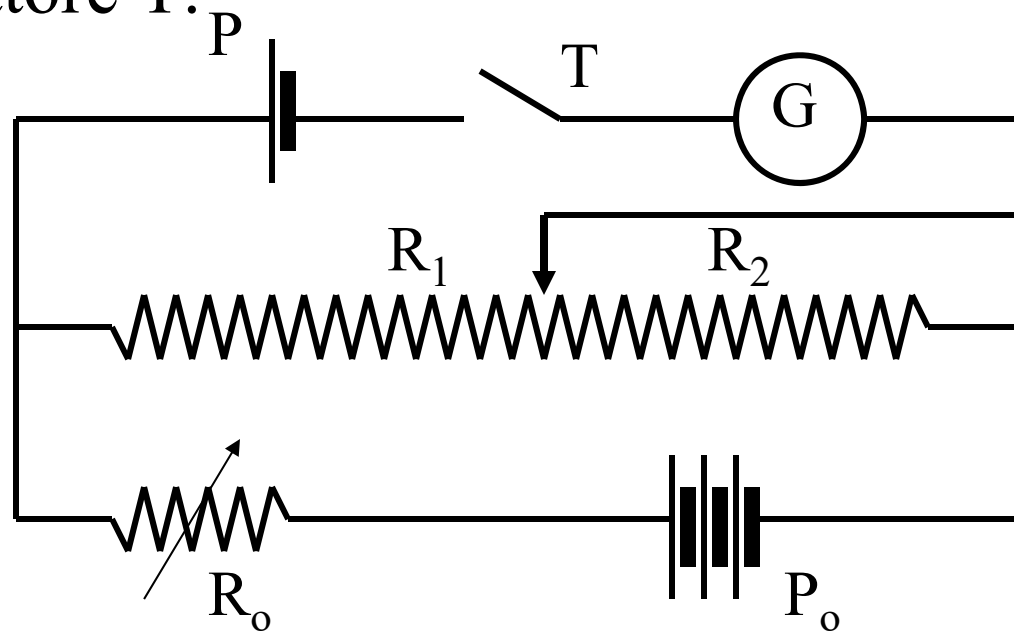
Misure di forze elettromotrici

- Quando l'interruttore T è aperto, la ddp ai capi della sezione R_1 del potenziometro è $V_1 = P_o R_1 / (R_1 + R_o + R_2)$.



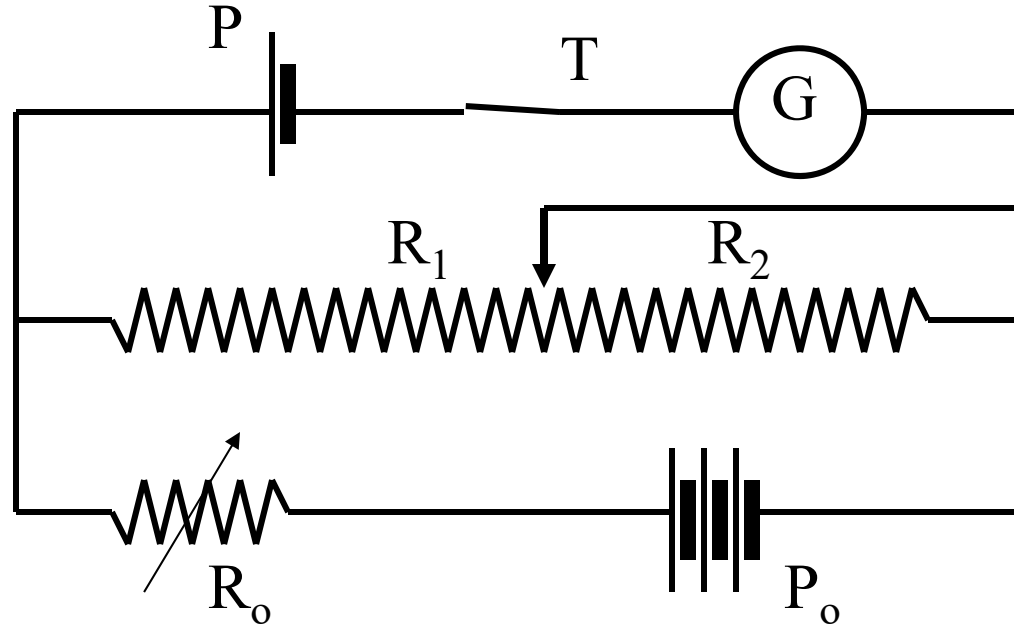
Misure di forze elettromotrici

- Quando l' interruttore T è aperto, la ddp ai capi della sezione R_1 del potenziometro è $V_1 = P_o R_1 / (R_1 + R_o + R_2)$.
- Si regola il cursore del potenziometro in modo che $V_1 = P$.
- Questa condizione si può ottenere con grande sensibilità, verificando l' immobilità del galvanometro al chiudersi dell' interruttore T.



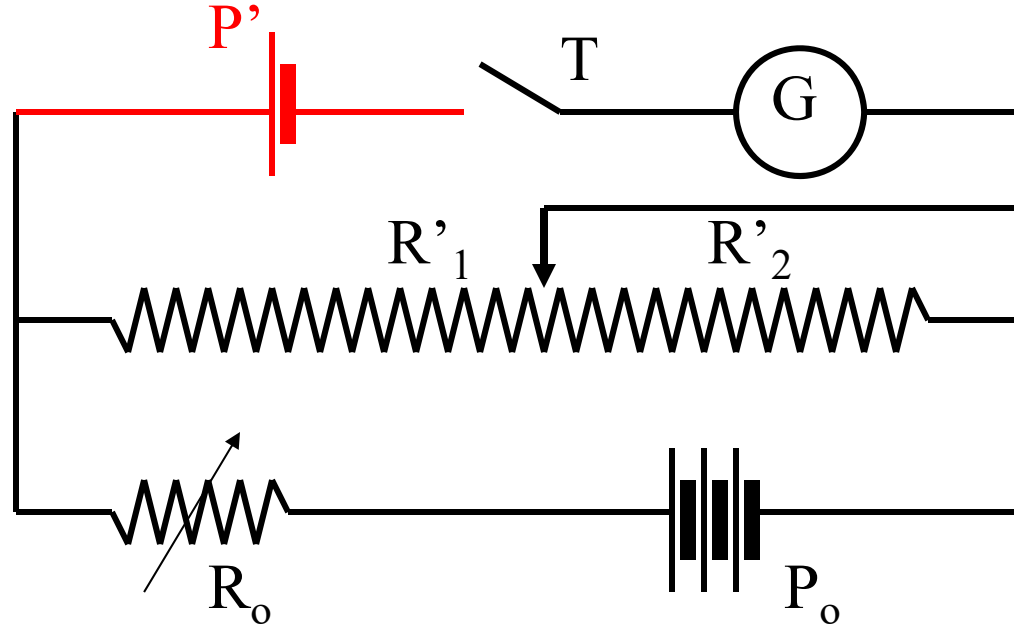
Misure di forze elettromotrici

- In queste condizioni $P = V_1 = P_o R_1 / (R_1 + R_o + R_2) ..$



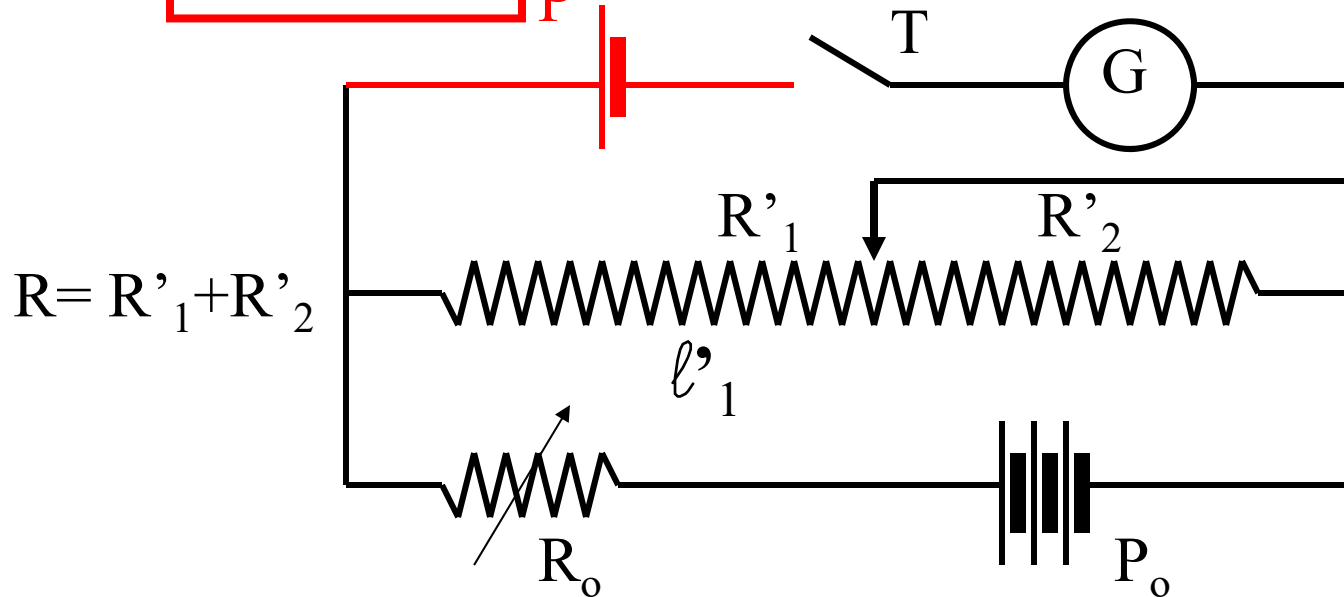
Misure di forze elettromotrici

- In queste condizioni $P = V_1 = P_o R_1 / (R_1 + R_o + R_2)$..
- A questo punto si sostituisce la pila incognita P con una pila campione P' .
- L'equilibrio si otterrà in una nuova posizione del potenziometro: $P' = P_o R'_1 / (R'_1 + R_o + R'_2)$.



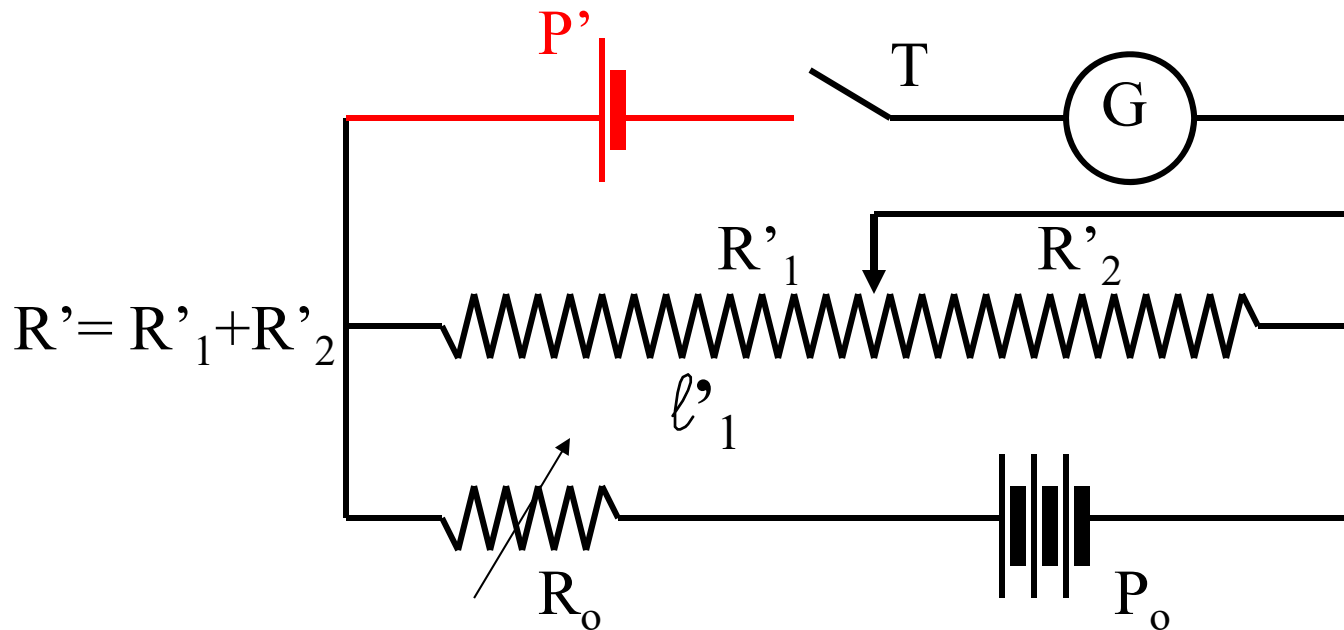
Misure di forze elettromotrici

- Confrontando le due relazioni $P = P_o R_1 / (R_1 + R_o + R_2)$ e $P' = P_o R'_1 / (R'_1 + R_o + R'_2)$ si ottiene (siccome $R'_1 + R'_2 = R = R_1 + R_2$ e quindi il denominatore è sempre lo stesso)
- $P = P' R_1 / R'_1$ dalla quale si misura P . Se il potenziometro è un semplice pezzo di conduttore omogeneo e di sezione costante, dalla legge di Ohm si ha $R_1 = \rho \ell_1 / S$ e $R'_1 = \rho \ell'_1 / S$ da cui $P = P' \ell_1 / \ell'_1$.



Misure di forze elettromotrici

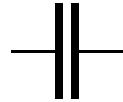
- $P = P' \ell_1 / \ell_1'$: la misura di P viene quindi effettuata grazie a due misure di lunghezza.
- Il galvanometro viene usato come strumento di zero, quindi il risultato è indipendente dalla sua calibrazione e dalla sua precisione, ma dipende solo dalla sua grande sensibilità.



Correnti variabili nel tempo

- Finora abbiamo studiato circuiti in corrente continua, cioè circuiti in cui siamo “a regime”, molto tempo ($t \gg \tau_i$) dopo l’inizio del processo, quando tutte le correnti si sono stabilizzate.
- Oggi cominciamo a studiare situazioni più dinamiche, partendo dal primo circuito che introduce una costante di tempo nel sistema: la carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore.
- Poi generalizzeremo a circuiti più complessi e al caso particolarmente importante di correnti variabili in modo periodico.

- Per gli elementi passivi valgono le seguenti relazioni, note dallo studio dell' elettromagnetismo:



$$V = RI ;$$

Legge di Ohm

$$I = V / R ;$$

$$V = \frac{1}{C} \int_0^t Idt ;$$

Def. di $C=Q/V$

$$I = C \frac{dV}{dt} ;$$

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

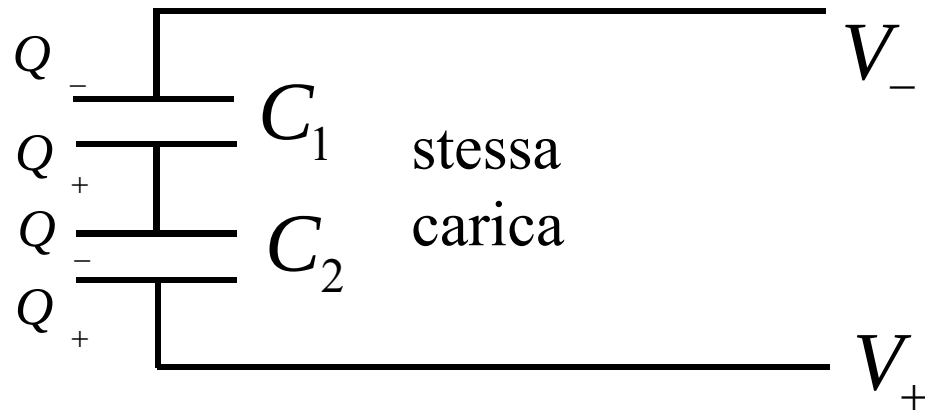
Legge di Lenz

$$I = \frac{1}{L} \int_0^t Vdt$$

- Dove:

- V = differenza di potenziale ai capi dell' elemento considerato,
- I = intensità di corrente che attraversa l' elemento stesso,
- R =resistenza,
- C =capacità,
- L =coefficiente di autoinduzione (o induttanza), t = tempo

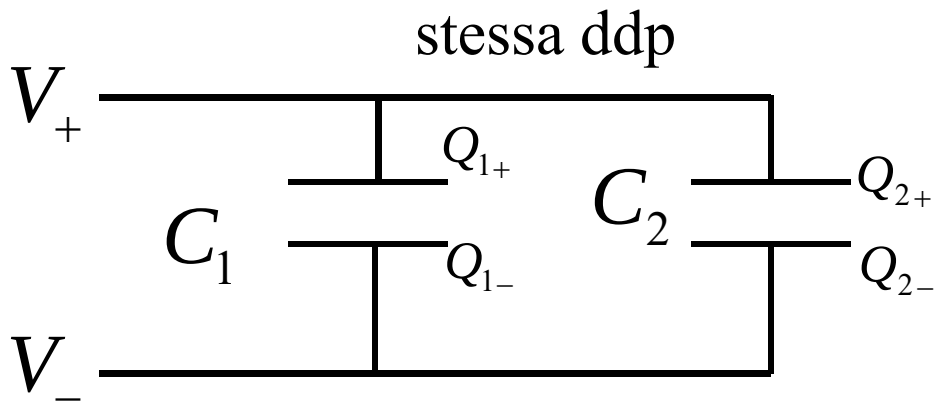
Condensatori in serie e in parallelo



$$V_+ - V_- = V_{C_1} + V_{C_2} = \frac{Q_+}{C_1} + \frac{Q_+}{C_2}$$

$$C_s = \frac{Q_+}{V_+ - V_-} = \frac{Q_+}{\frac{Q_+}{C_1} + \frac{Q_+}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

$$C_s^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

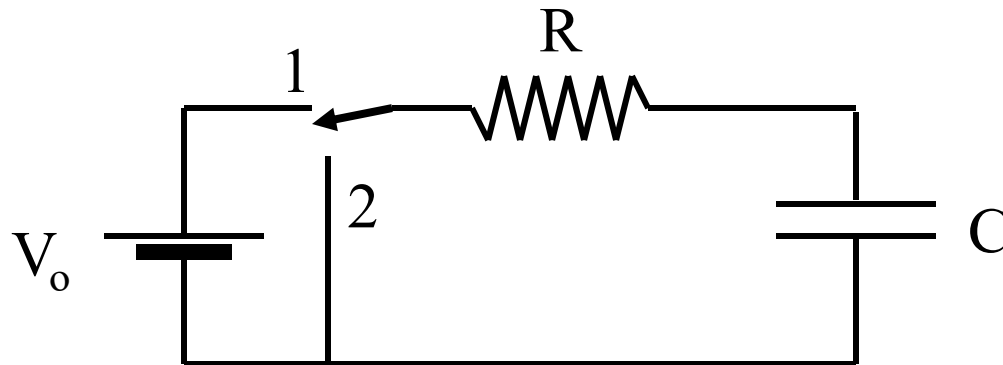


$$C_p = \frac{Q_{1+} + Q_{2+}}{V_+ - V_-} = \frac{Q_{1+}}{V_+ - V_-} + \frac{Q_{2+}}{V_+ - V_-}$$

$$C_p = C_1 + C_2$$

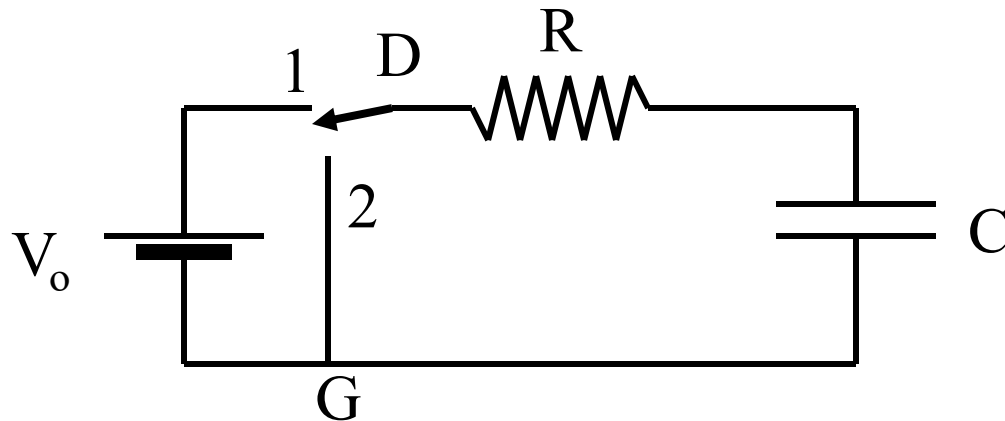
Carica e scarica di un condensatore

- Un condensatore può essere caricato collegando le sue armature ad un generatore di tensione.
- Nel circuito sarà sempre presente una resistenza, sia essa quella interna del generatore, quella dei conduttori di collegamento, o quella di un resistore inserito in serie per rallentare il processo.



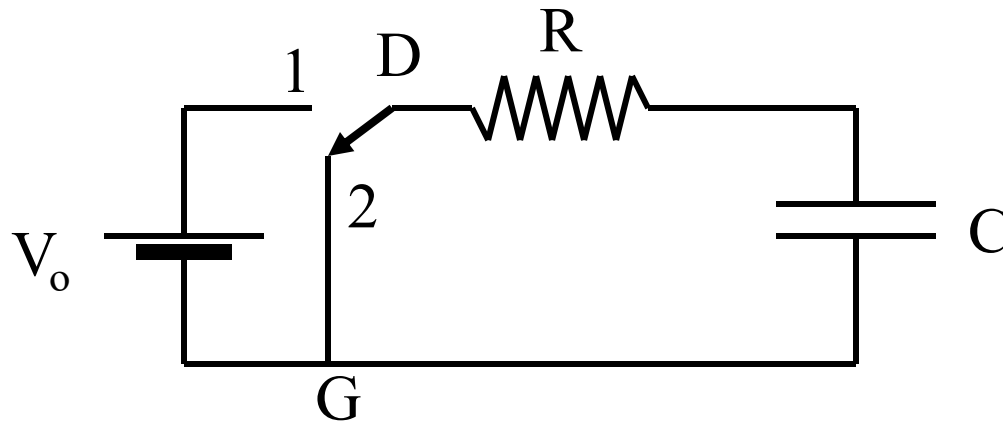
Carica e scarica di un condensatore

- Consideriamo quindi il circuito sotto, con il deviatore D che può connettere il punto D al generatore (nella posizione 1), oppure al conduttore G (“massa”, o riferimento delle ddp) nella posizione 2.



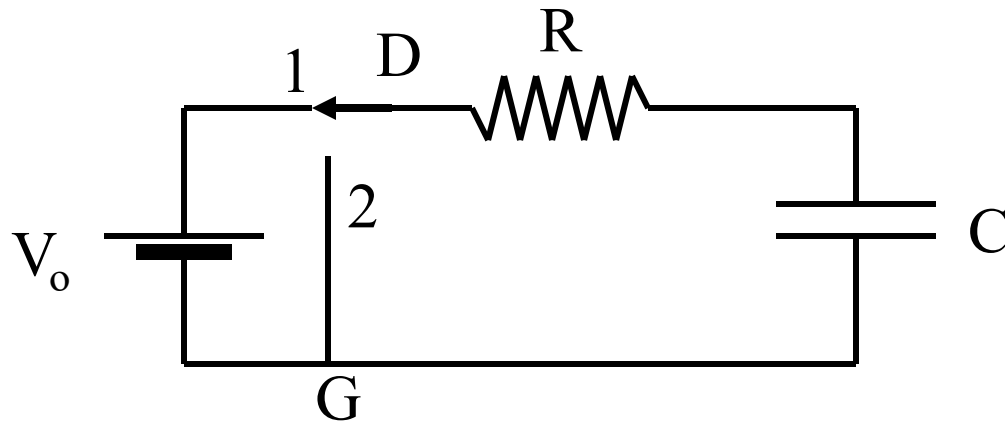
Carica e scarica di un condensatore

- Se il deviatore è stato nella posizione 2 per un tempo abbastanza lungo, il condensatore è completamente scarico.



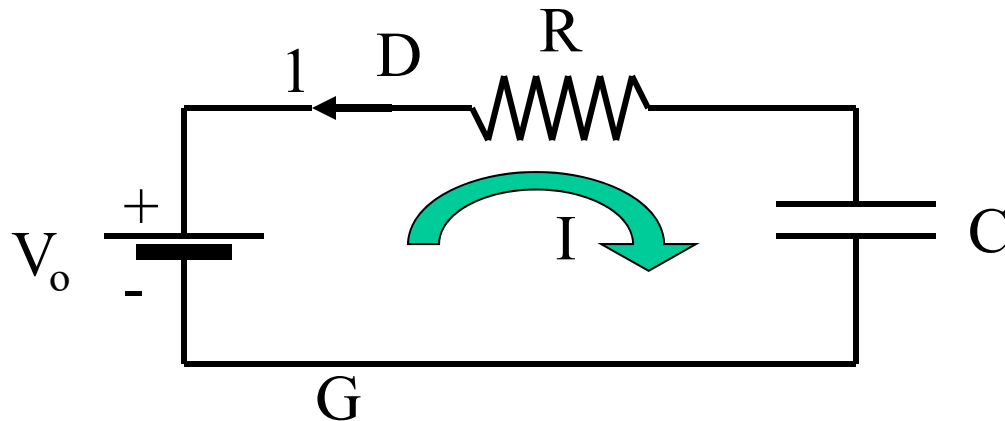
Carica e scarica di un condensatore

- Al tempo $t=0$ commutiamo il deviatore nella posizione 1, e quindi connettiamo il condensatore al generatore attraverso la resistenza.



Carica e scarica di un condensatore

- Al tempo $t=0$ commutiamo il deviatore nella posizione 1, e quindi connettiamo il condensatore al generatore attraverso la resistenza.
- Risolviamo il circuito considerando il verso orario della corrente come positivo:



Carica e scarica di un condensatore

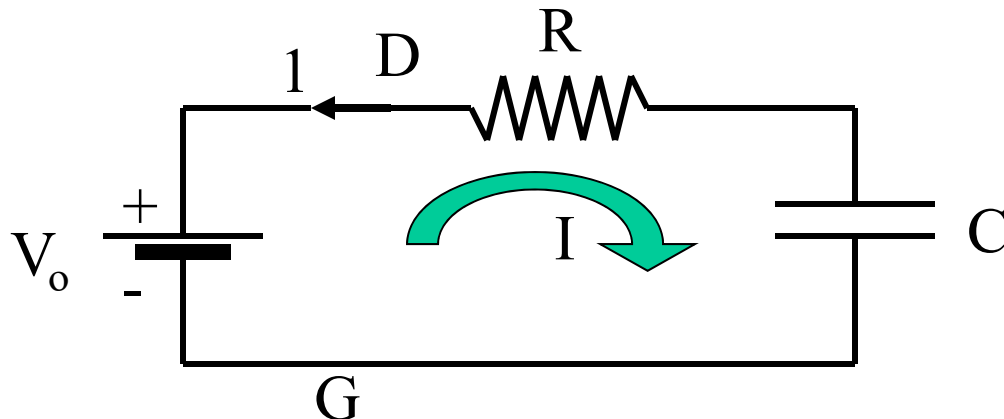
- Possiamo scrivere subito $V_o = IR + V_C$

- E quindi

$$V_o = \frac{dQ}{dt} R + \frac{Q}{C} \Rightarrow RC \frac{dQ}{dt} = CV_o - Q$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{CV_o - Q} = \frac{dt}{RC} \Rightarrow -\ln(CV_o - Q) \Big|_{t_0}^t = \frac{t}{RC} \Big|_{t_0}^t$$

$$-\ln\left(\frac{CV_o - Q}{CV_o - Q_o}\right) = \frac{t}{RC}$$



Carica e scarica di un condensatore

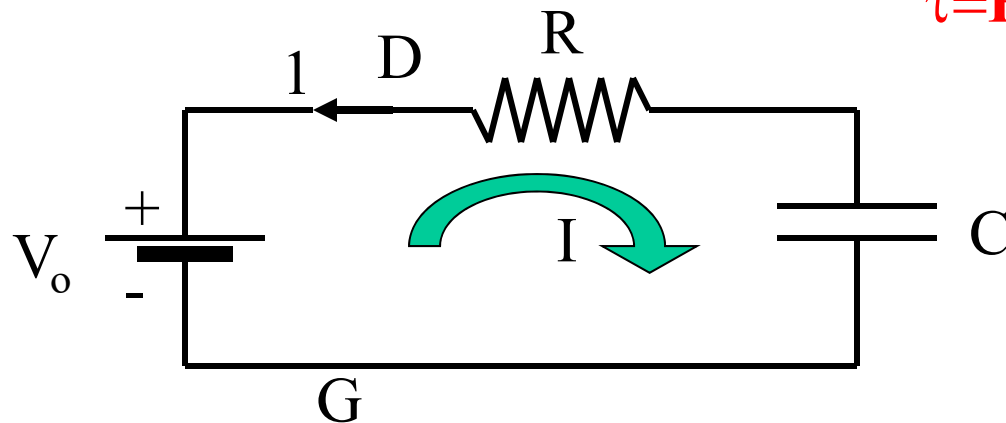
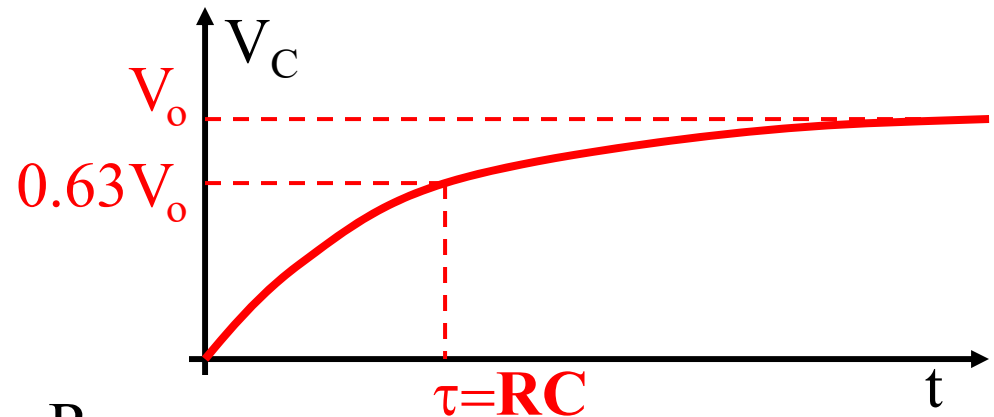
qui Q_o e' la eventuale carica iniziale. Nel nostro caso

$Q_o = Q(t = 0) = 0$ e quindi

$$-\ln\left(\frac{CV_o - Q}{CV_o}\right) = \frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{CV_o - Q}{CV_o} = e^{-t/RC} \Rightarrow Q(t) = CV_o(1 - e^{-t/\tau})$$

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_o(1 - e^{-t/\tau})$$

dove $\tau = RC$ e' la
costante di tempo del processo



Carica e scarica di un condensatore

qui Q_o e' la eventuale carica iniziale. Nel nostro caso

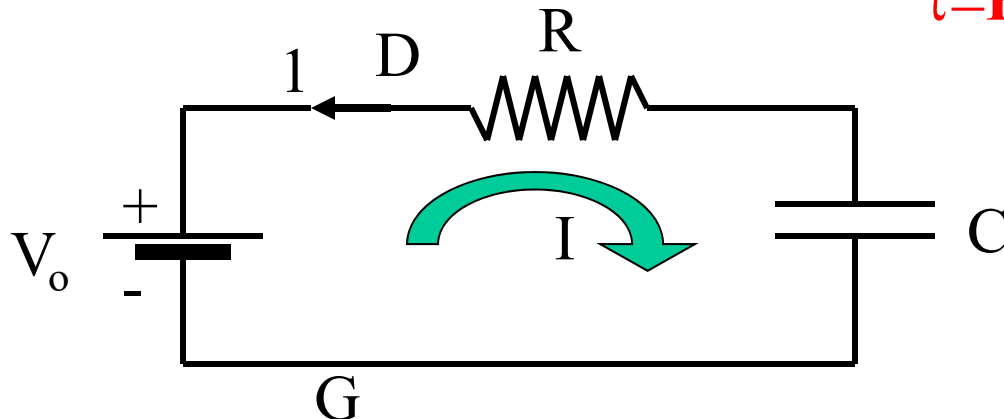
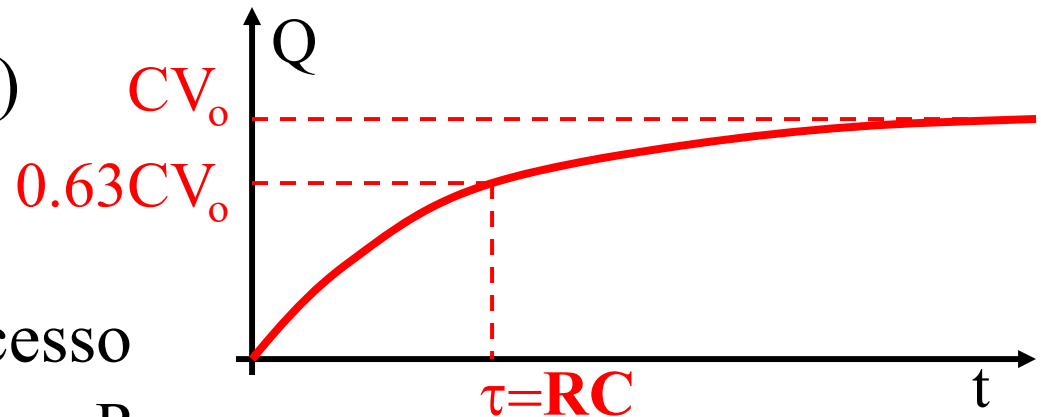
$Q_o = Q(t = 0) = 0$ e quindi

$$-\ln\left(\frac{CV_o - Q}{CV_o}\right) = \frac{t}{RC} \Rightarrow Q(t) = CV_o(1 - e^{-t/\tau})$$

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_o(1 - e^{-t/\tau})$$

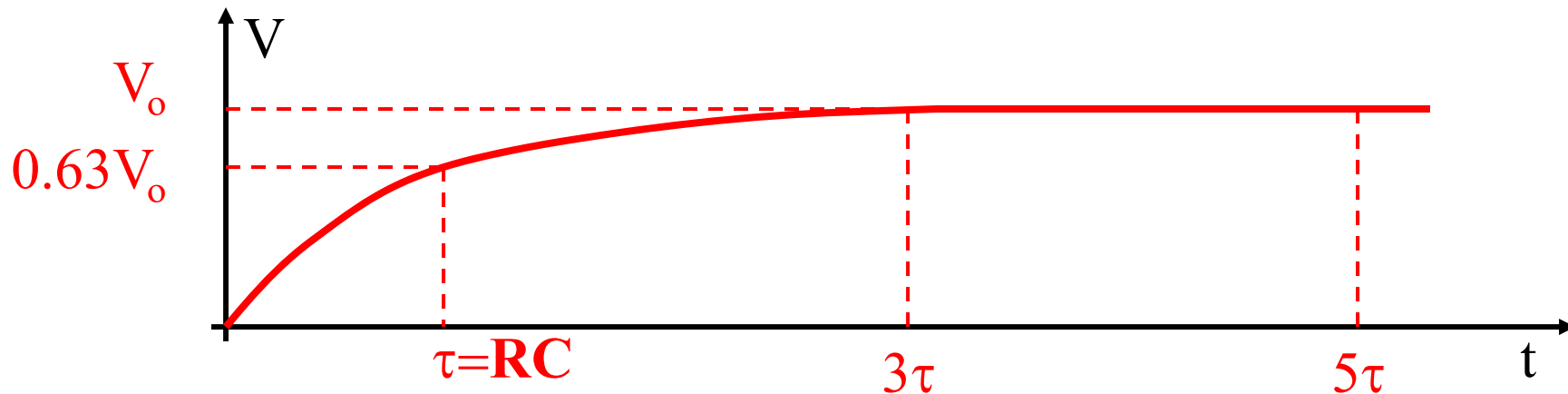
dove $\tau = RC$ e' la

costante di tempo del processo



Carica e scarica di un condensatore

- Dopo un tempo pari a circa 3 o 4 costanti di tempo τ il processo è praticamente a regime:
- $V(\tau)=[1-\exp(-1)]V_o=0.63V_o$
- $V(3\tau)=[1-\exp(-3)]V_o=0.95V_o$
- $V(4\tau)=[1-\exp(-4)]V_o=0.98V_o$
- $V(5\tau)=[1-\exp(-5)]V_o=0.993V_o$



- Ordine di grandezza: $R=1\text{M}\Omega$, $C=1\mu\text{F}$ $\rightarrow \tau=1\text{s}$
- Per altri valori, si scala linearmente !

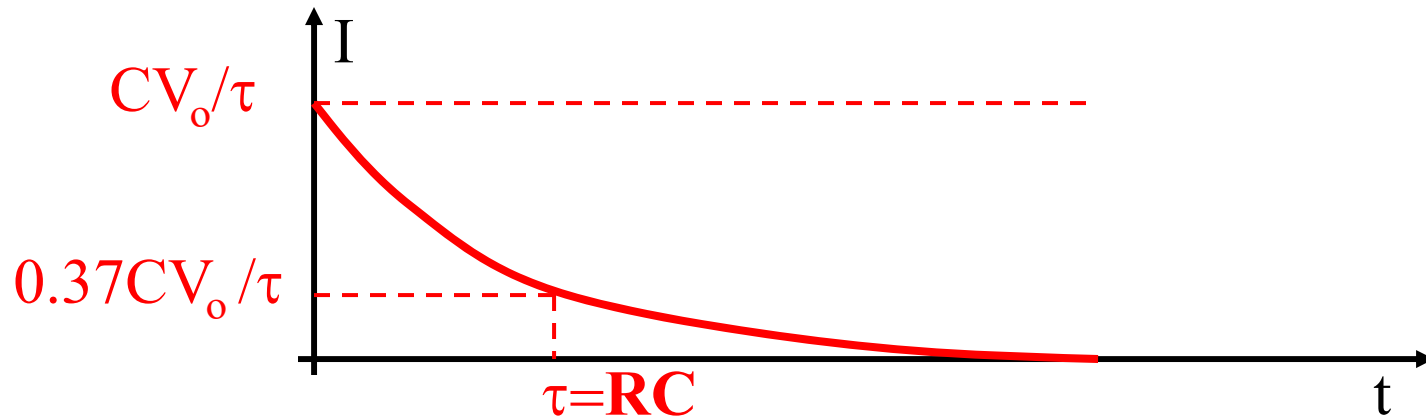
Carica e scarica di un condensatore

La tensione ai capi di R e la corrente si trovano

facilmente da $I = \frac{dQ}{dt}$ e $V = RI$ sapendo che

$$Q(t) = CV_o(1 - e^{-t/\tau}).$$

Si ottiene subito $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{CV_o}{\tau} e^{-t/\tau}$ e $V_R = V_o e^{-t/\tau}$



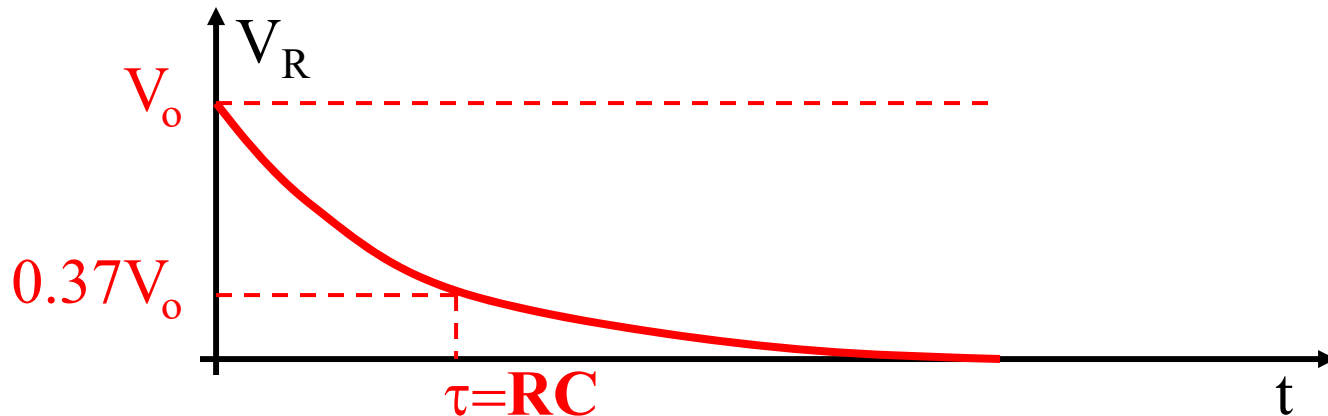
Carica e scarica di un condensatore

La tensione ai capi di R e la corrente si trovano

facilmente da $I = \frac{dQ}{dt}$ e $V = RI$ sapendo che

$$Q(t) = CV_o(1 - e^{-t/\tau}).$$

Si ottiene subito $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{CV_o}{\tau} e^{-t/\tau}$ e $V_R = V_o e^{-t/\tau}$



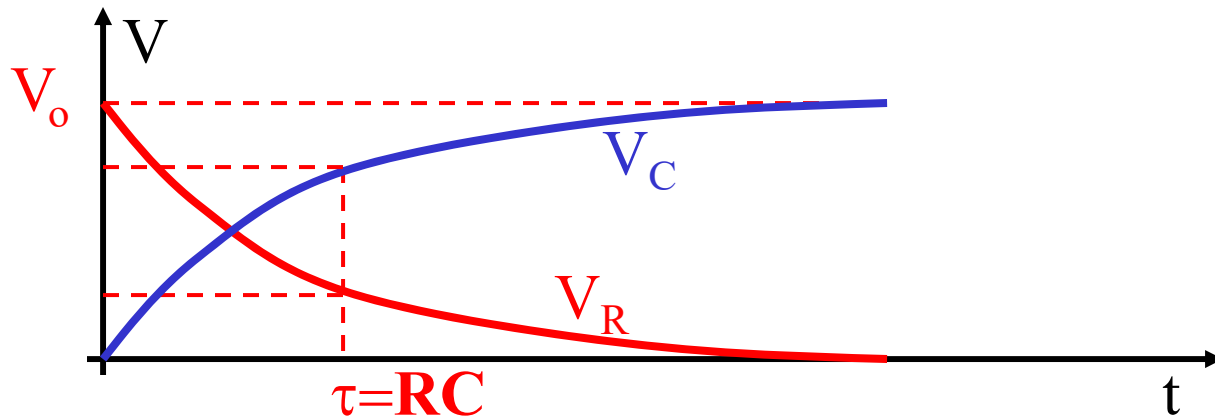
Carica e scarica di un condensatore

La tensione ai capi di R e la corrente si trovano

facilmente da $I = \frac{dQ}{dt}$ e $V = RI$ sapendo che

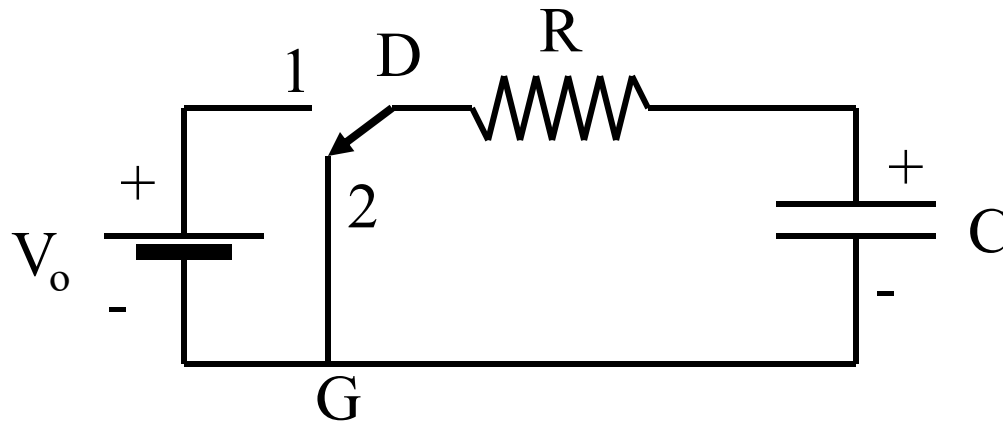
$$Q(t) = CV_o(1 - e^{-t/\tau}).$$

Si ottiene subito $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{CV_o}{\tau} e^{-t/\tau}$ e $V_R = V_o e^{-t/\tau}$



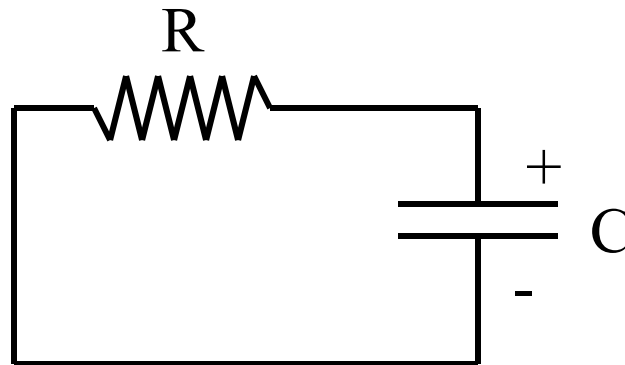
Carica e scarica di un condensatore

- Consideriamo adesso il processo di scarica.
- Dopo averlo caricato ad una carica Q ed una ddp V_o , connettiamo il condensatore alla resistenza R commutando il deviatore nella posizione 2.



Carica e scarica di un condensatore

- Consideriamo adesso il processo di scarica.
- Dopo averlo caricato ad una carica Q ed una ddp V_0 , connettiamo il condensatore alla resistenza R commutando il deviatore nella posizione 2.
- Il condensatore si scaricherà facendo fluire corrente in R in modo da annullare le cariche sulle sue armature.



Carica e scarica di un condensatore con la solita convenzione per il verso

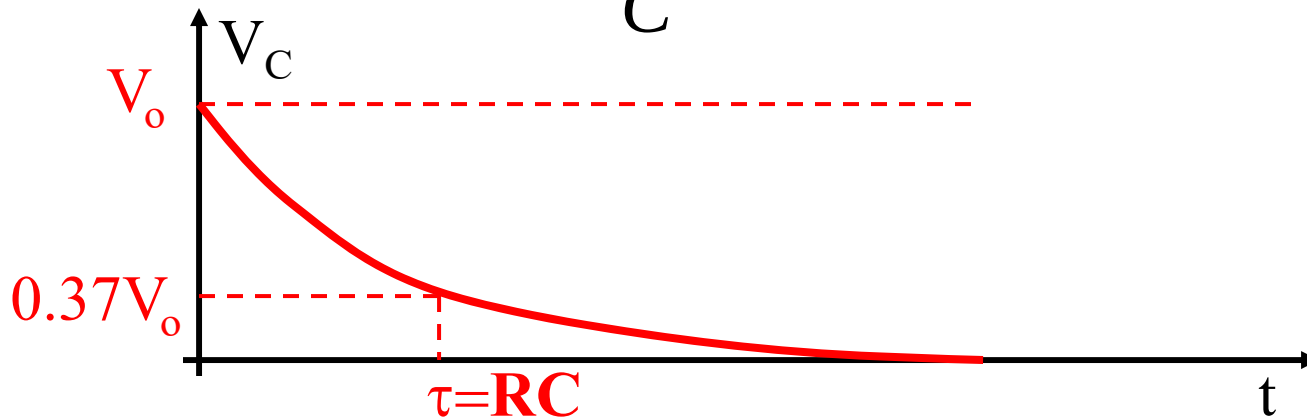
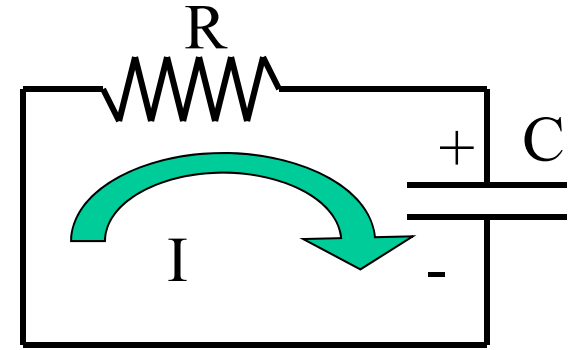
della corrente otteniamo :

$$-IR - V_C = 0$$

$$-\frac{dQ}{dt}R - \frac{Q}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

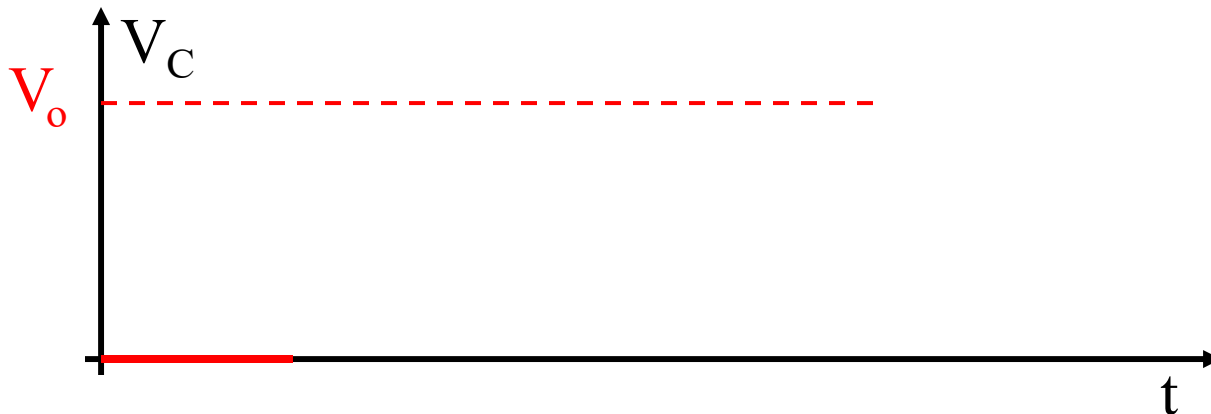
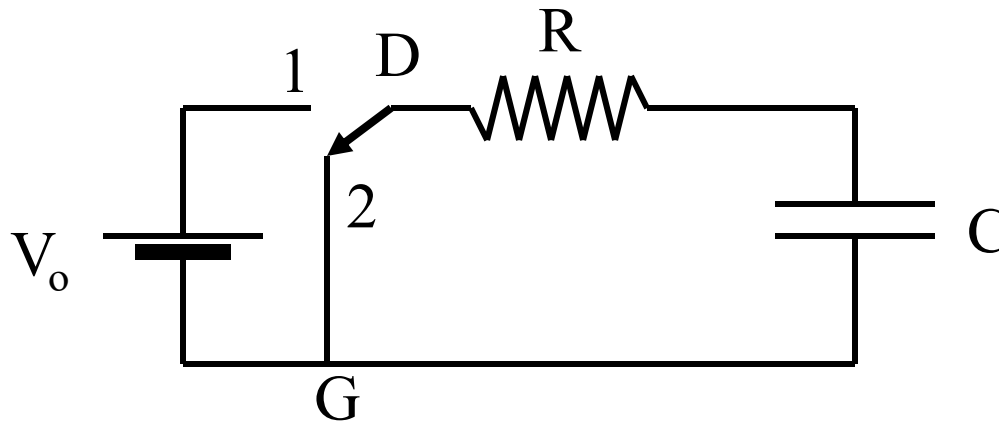
e quindi $Q(t) = CV_o e^{-t/\tau}$

ed anche $V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_o e^{-t/\tau}$



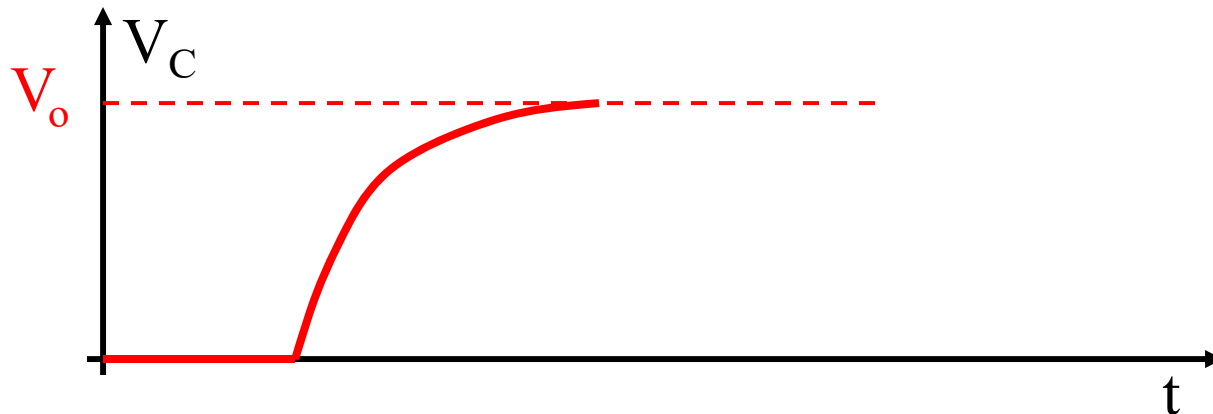
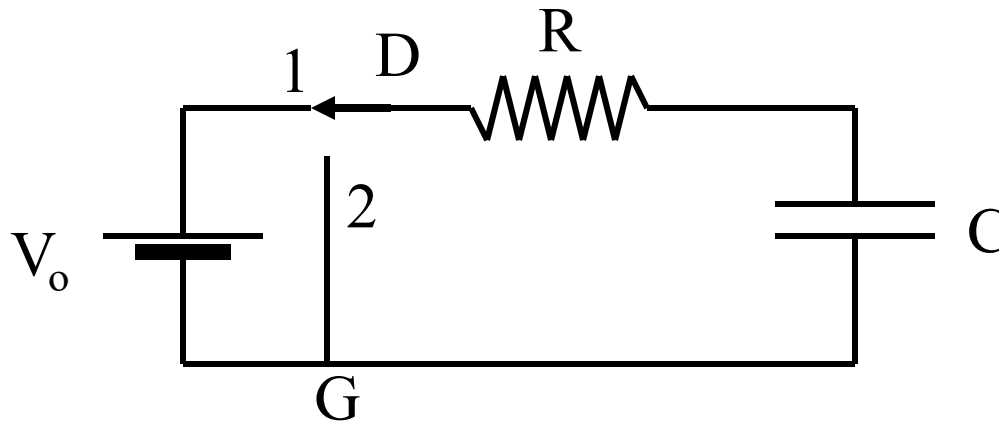
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:



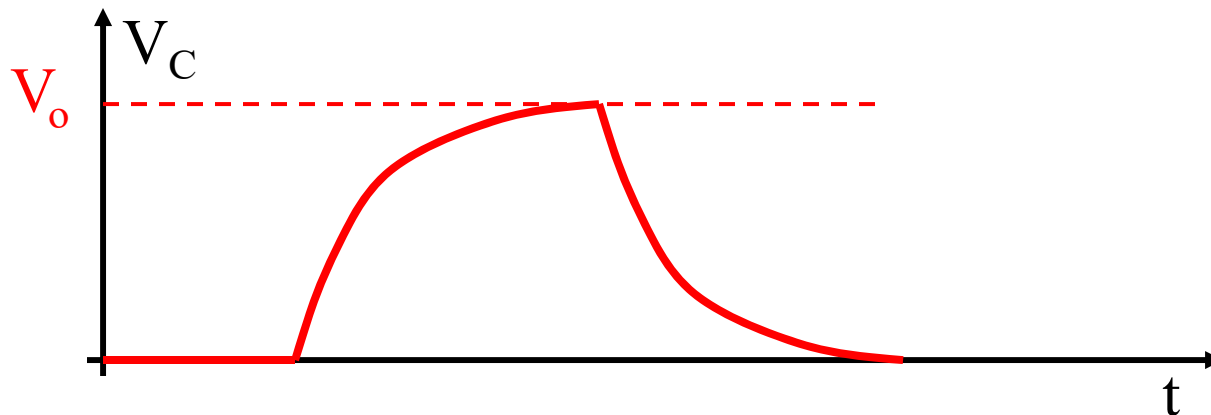
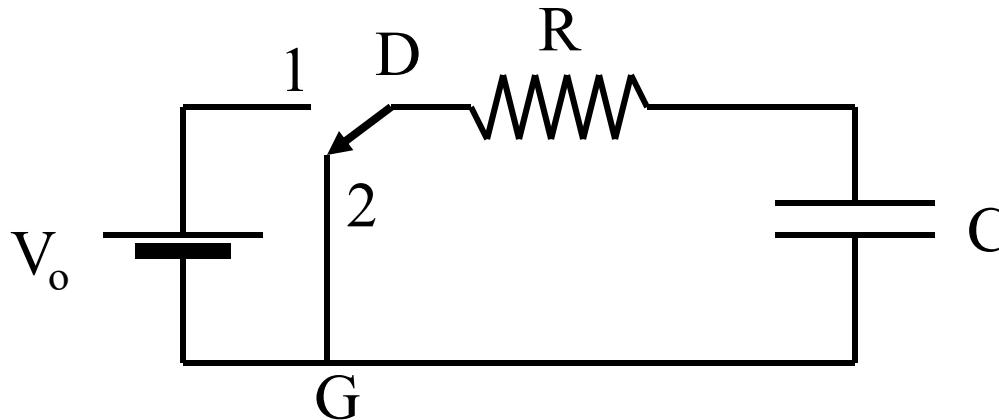
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:



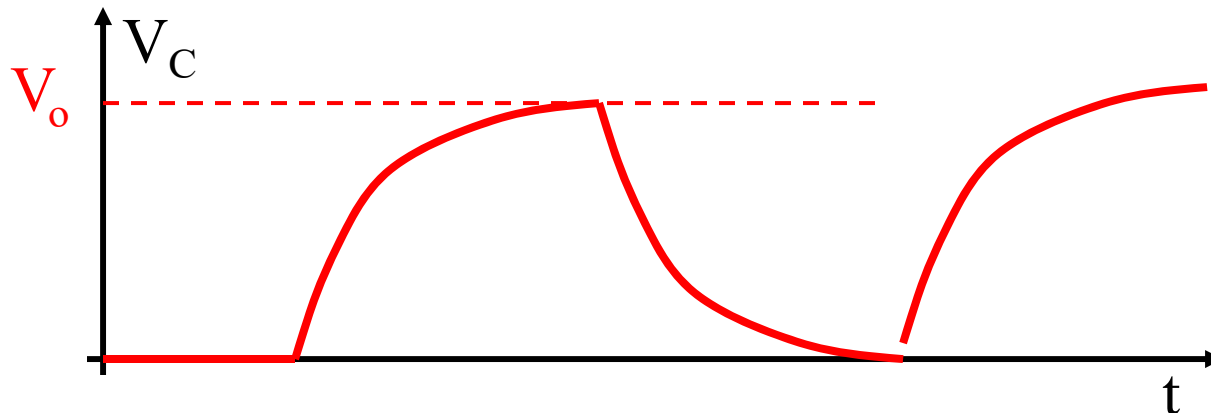
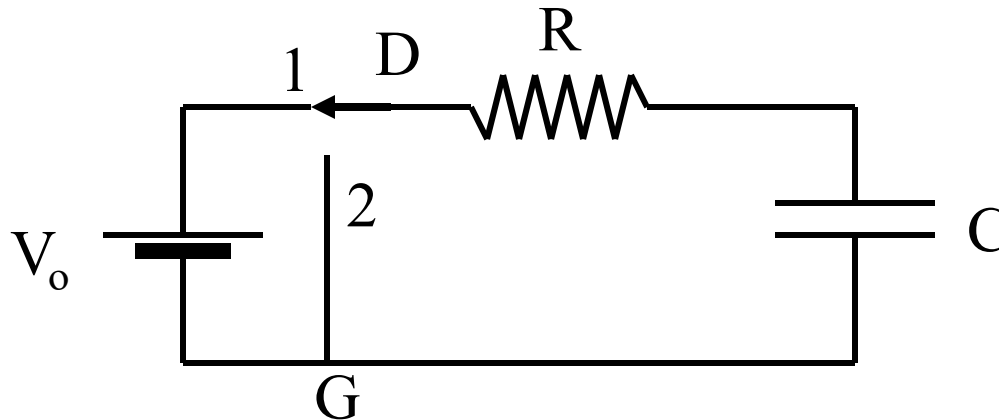
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:



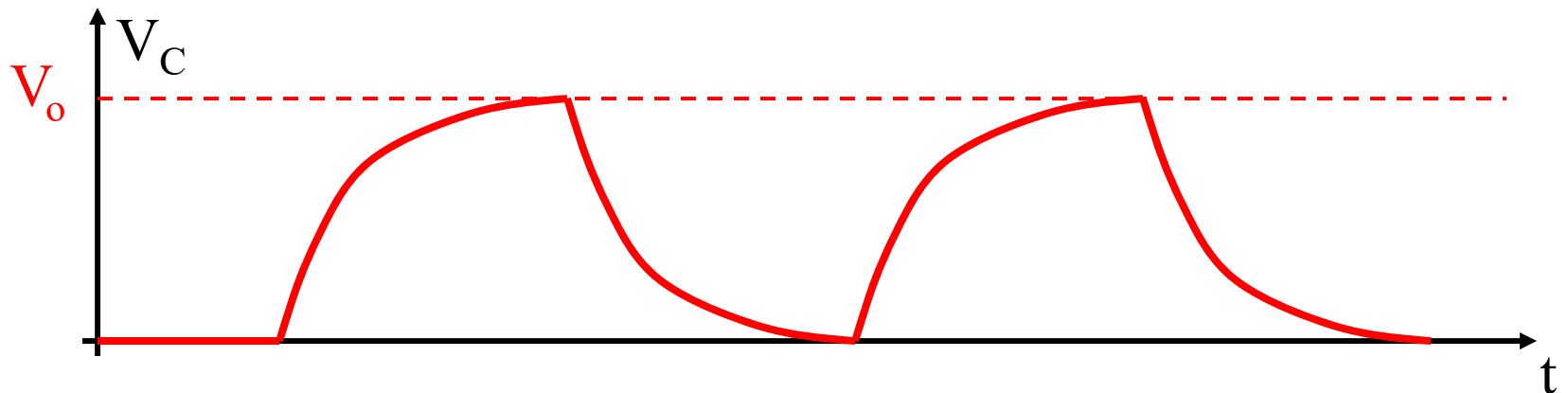
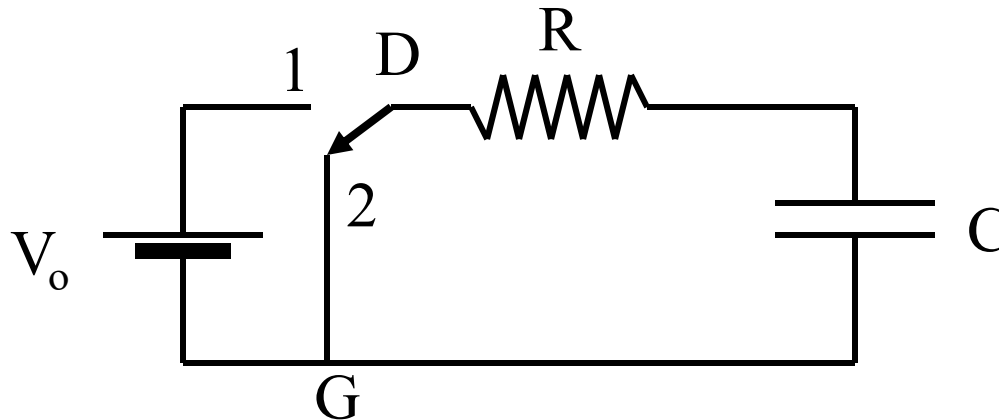
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:



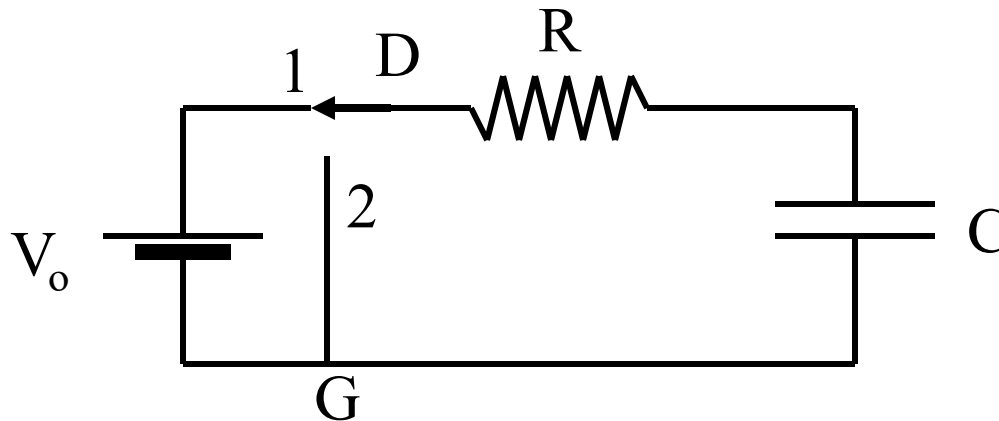
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:

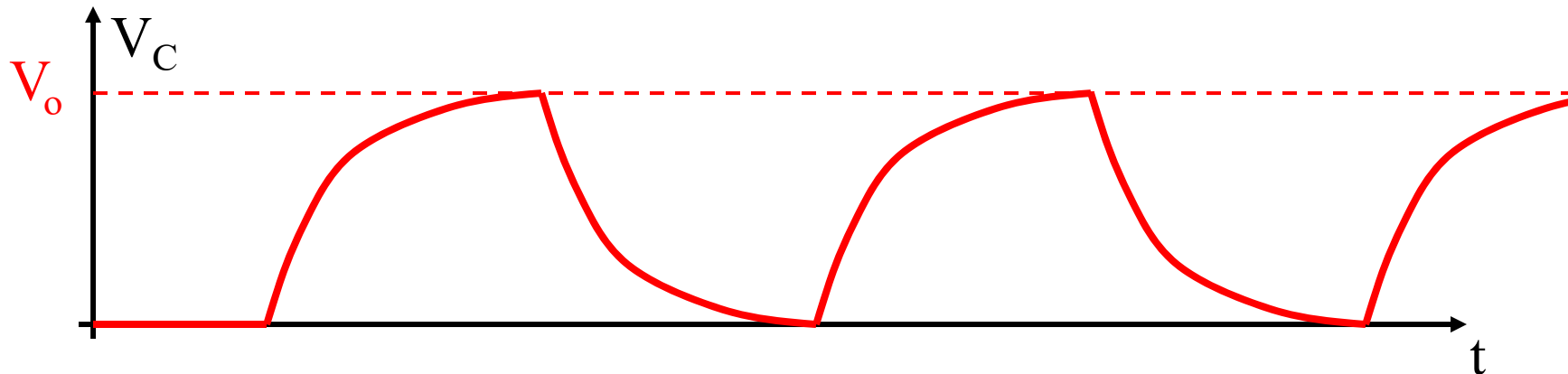


Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, aspettando ogni volta molte costanti di tempo:

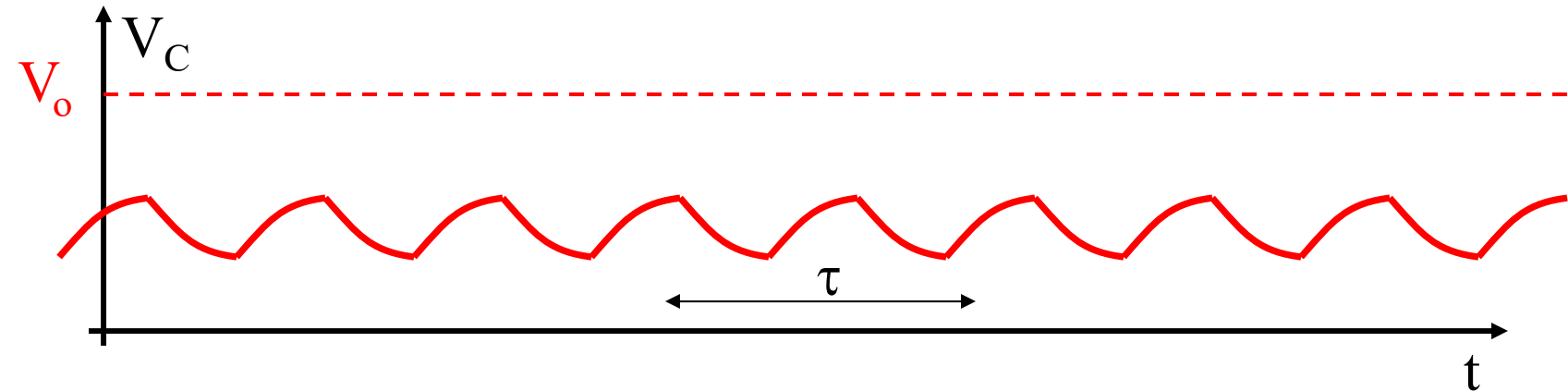


- Al passare del tempo otteniamo una tensione periodica ai capi del condensatore.



Carica e scarica di un condensatore

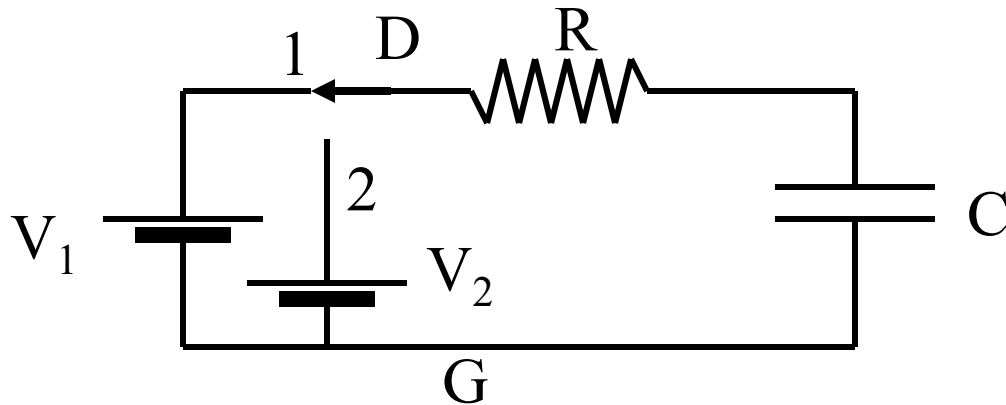
- Se non aspettiamo molte costanti di tempo, il condensatore non farà a tempo a caricarsi e scaricarsi completamente.
- Otterremo una forma d' onda di questo genere:



- Vediamo quantitativamente cosa succede.

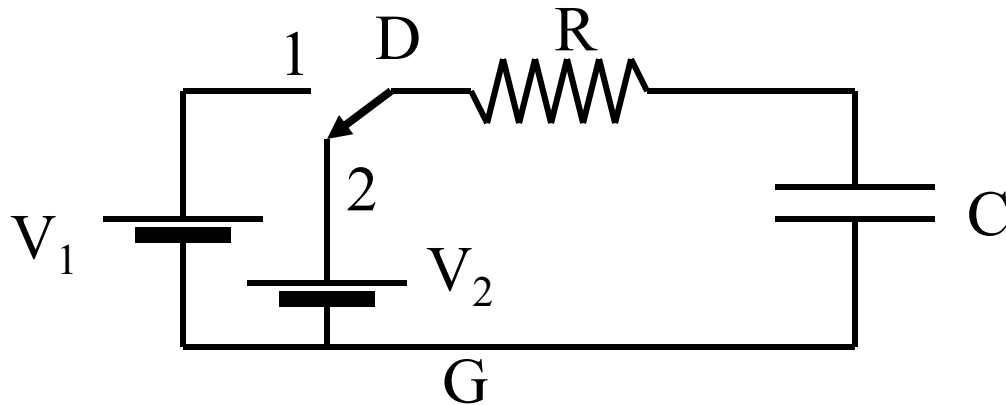
Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D , tra la tensione V_2 e la tensione V_1 .



Carica e scarica di un condensatore

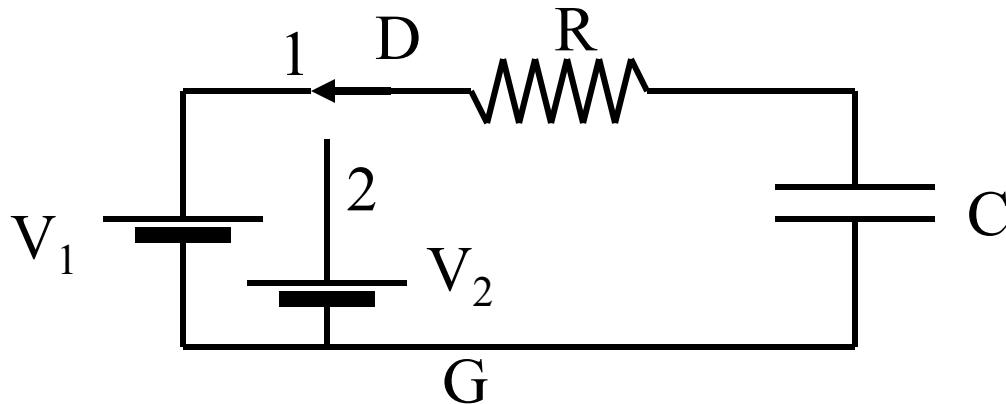
- Supponiamo di commutare periodicamente D, tra la tensione V_2 e la tensione V_1 .



Carica e scarica di un condensatore

- Supponiamo di commutare periodicamente D, tra la tensione V_2 e la tensione V_1 .
- Possiamo modificare la formula che avevamo trovato per la carica del condensatore:

$$-\ln\left(\frac{CV_{gen} - Q(t)}{CV_{gen} - Q_{ini}}\right) = \frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad -\ln\left(\frac{CV_{new} - Q(t)}{CV_{new} - CV_{old}}\right) = \frac{t}{RC}$$

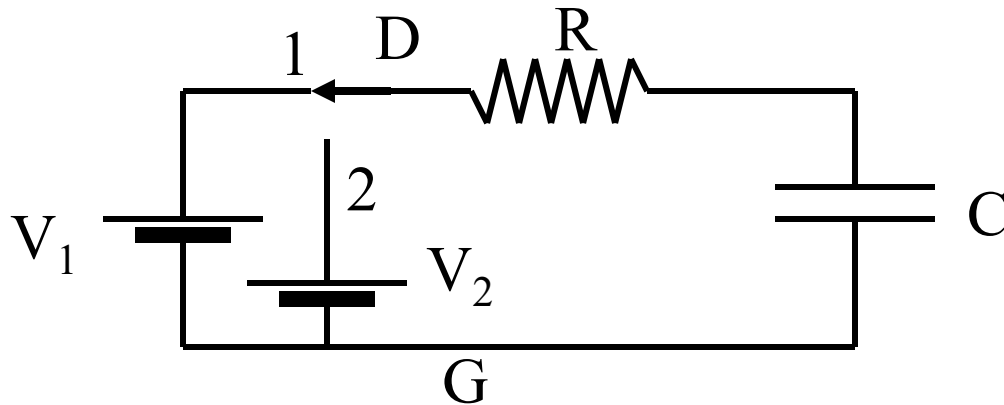


- Ottenendo $V_C(t) = V_{new} - (V_{new} - V_{old})e^{-t/\tau}$
- Qui new e old sono i valori di V_c rispettivamente prima e dopo la commutazione, cioè alternativamente V_1 e V_2 .

Carica e scarica di un condensatore

- In pratica, se il deviatore viene mosso su 2, abbiamo $V_{old}=V_1$ e $V_{new}=V_2$; quando invece il deviatore viene mosso su 1, abbiamo $V_{old}=V_2$ e $V_{new}=V_1$.
- In ogni caso:

$$V_C(t) = V_{new} - (V_{new} - V_{old})e^{-t/\tau}$$



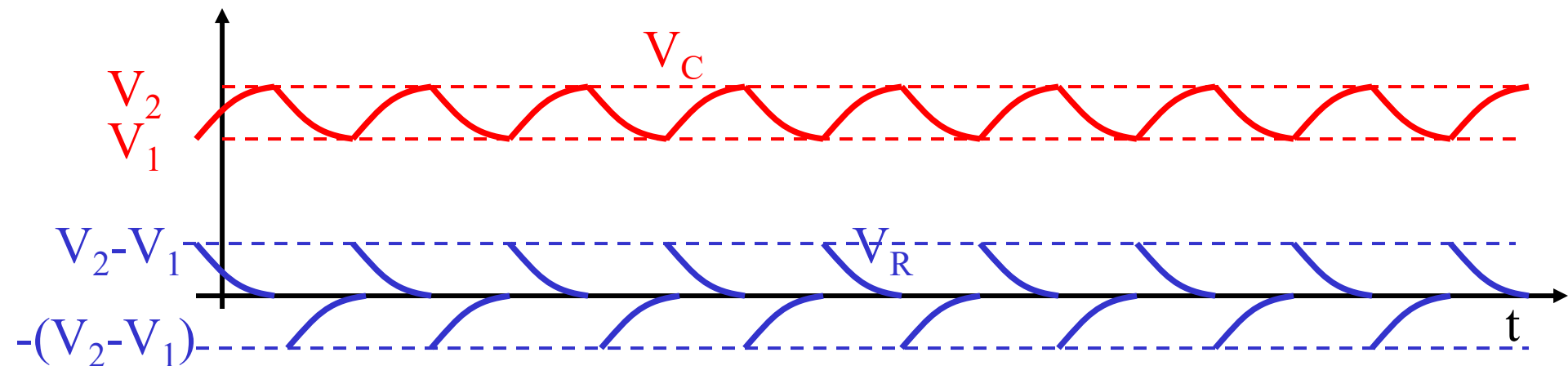
Carica e scarica di un condensatore

$$V_C(t) = V_{new} - (V_{new} - V_{old})e^{-t/\tau} \Rightarrow V_{old} < V_C(t) < V_{new}$$

- Ad esempio se $V_{new}=V_o$ e $V_{old}=0$ si ottiene il caso della carica del condensatore; se $V_{new}=0$ e $V_{old}=V_o$ si ottiene la scarica.
- In generale avremo anche:

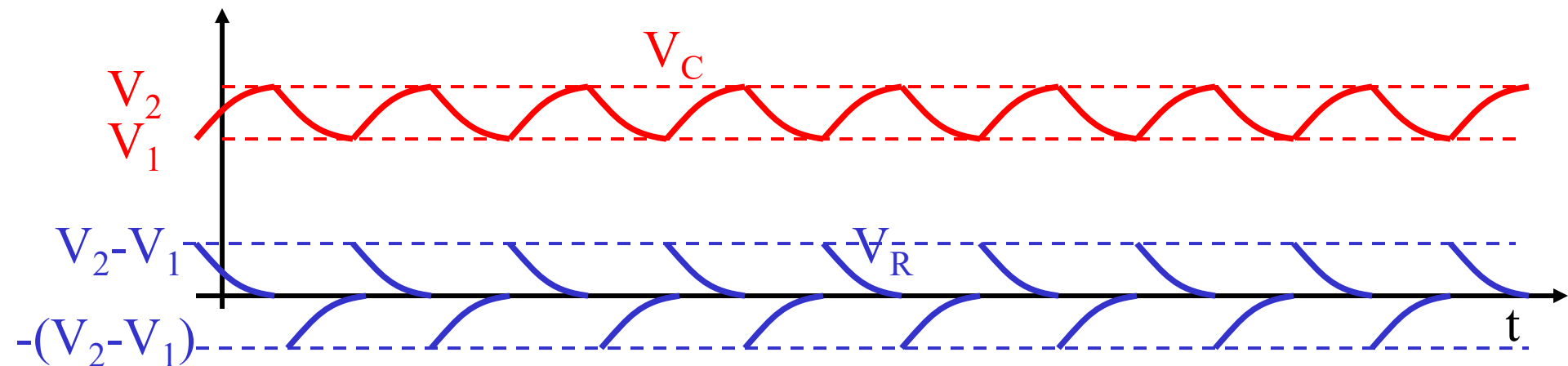
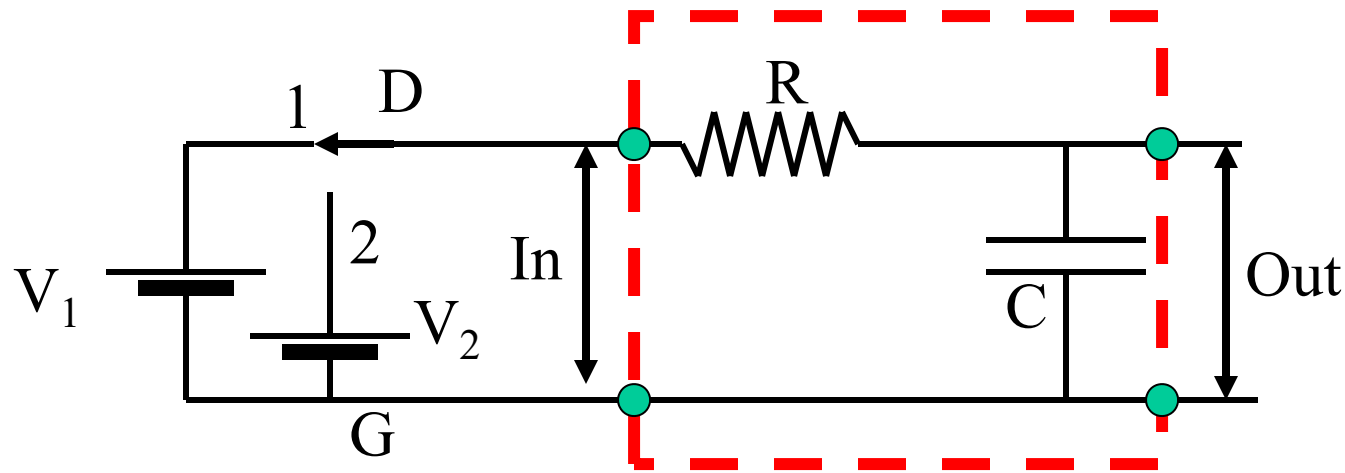
$$V_R(t) = RI = R \frac{dQ}{dt} = RC \frac{dV_C}{dt} = (V_{new} - V_{old}) e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow 0 < |V_R(t)| < |V_{new} - V_{old}|$$



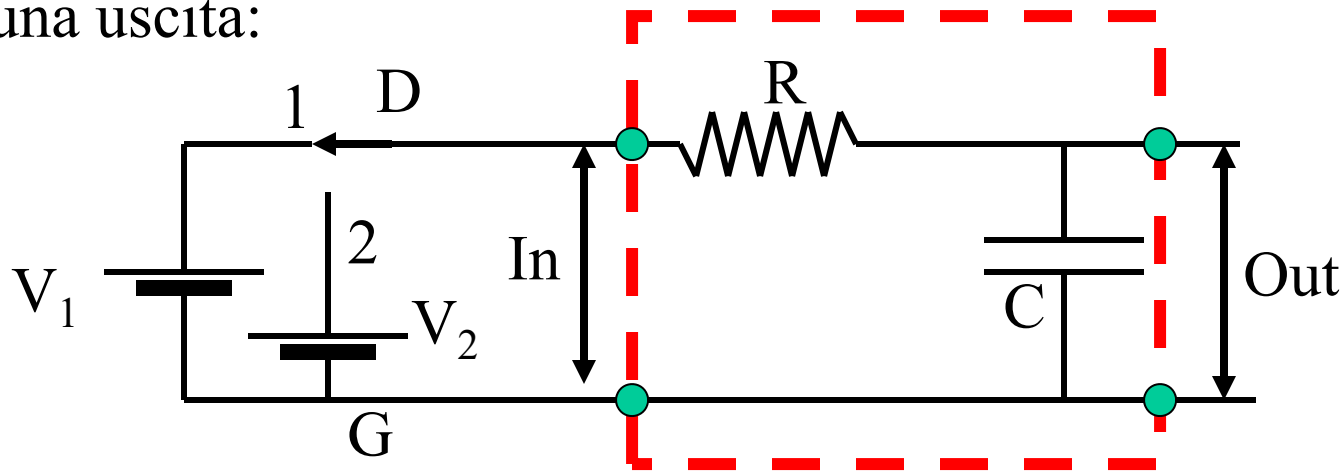
Carica e scarica di un condensatore

- Se consideriamo il **circuito RC** come un blocco con un ingresso ed una uscita:

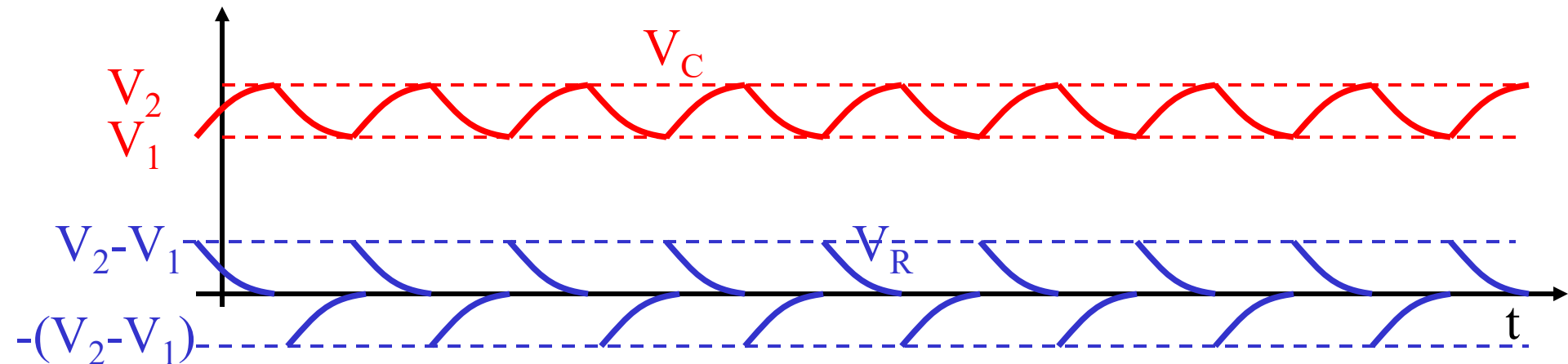


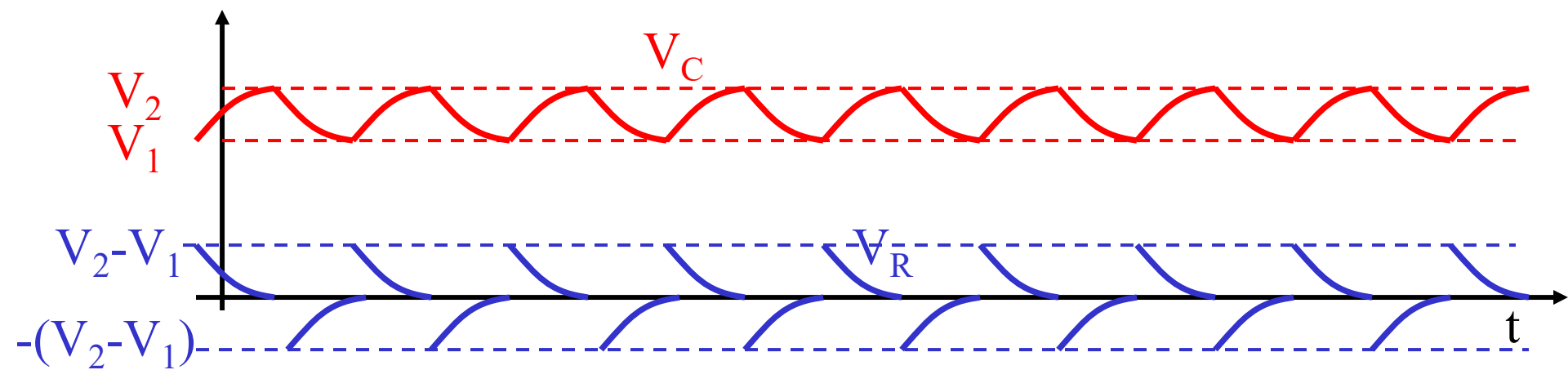
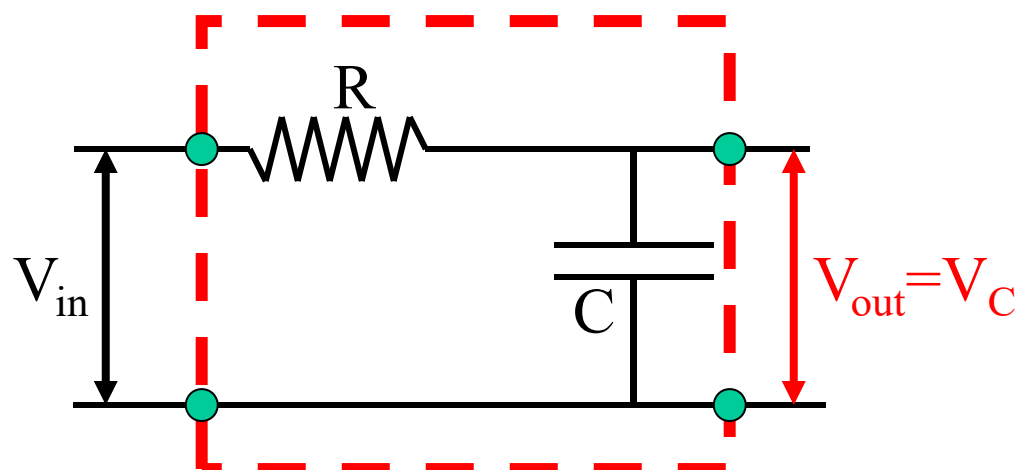
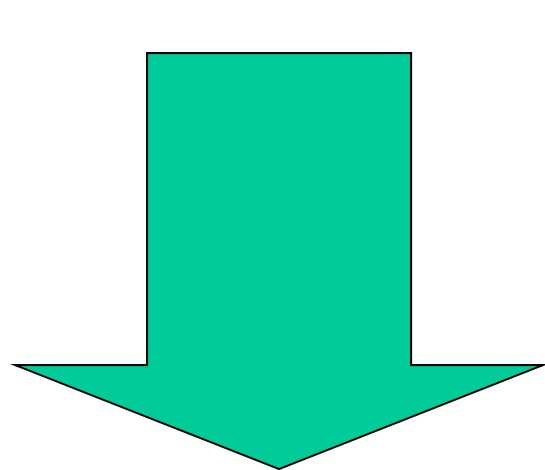
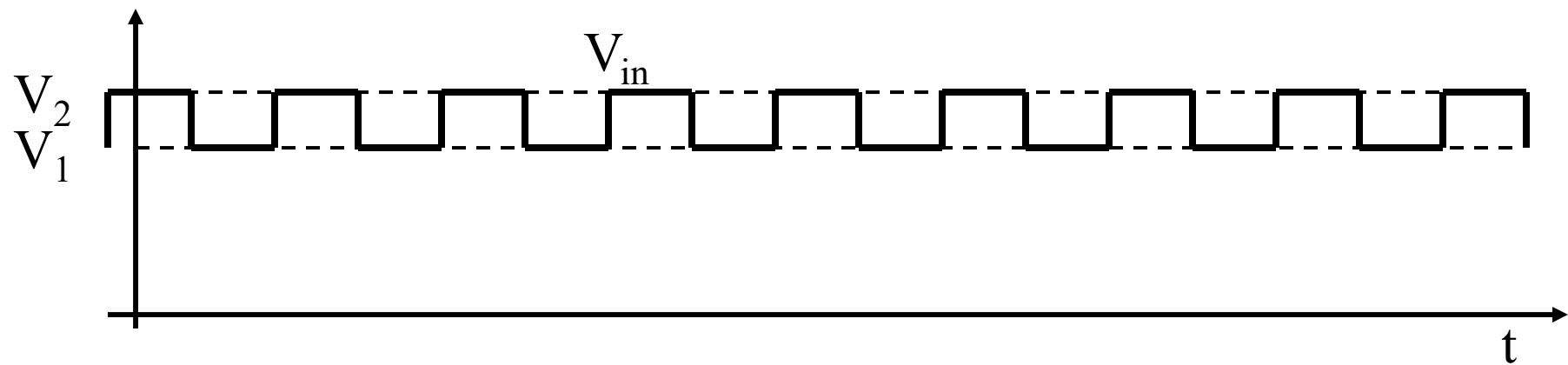
Carica e scarica di un condensatore

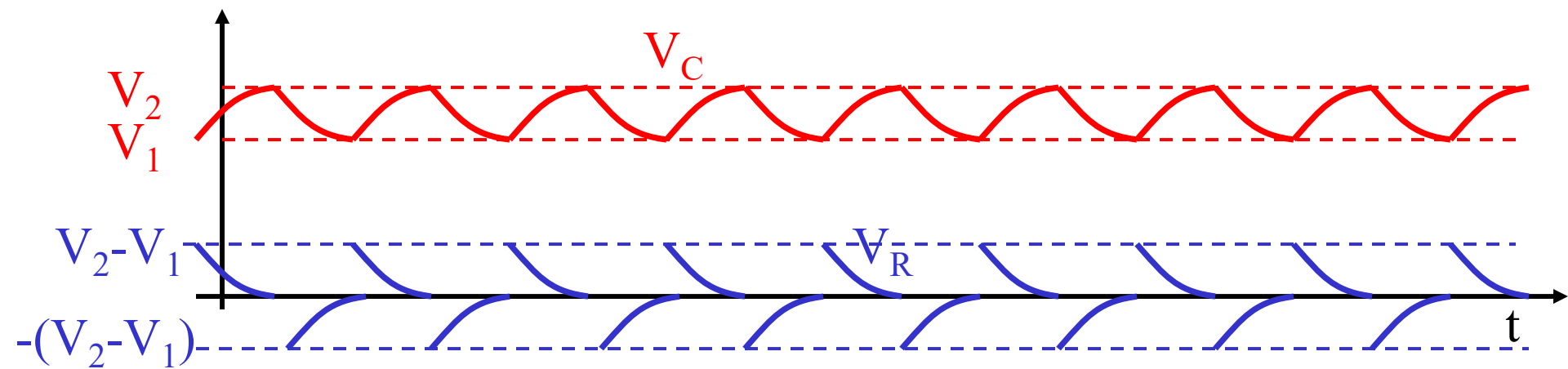
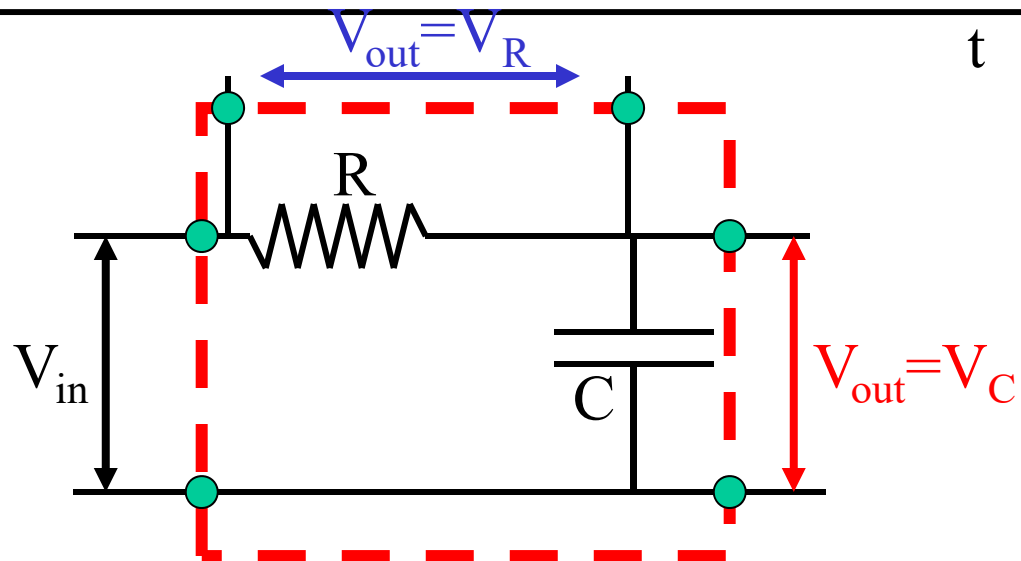
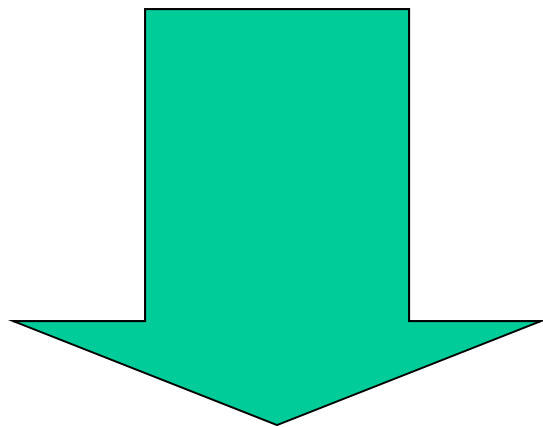
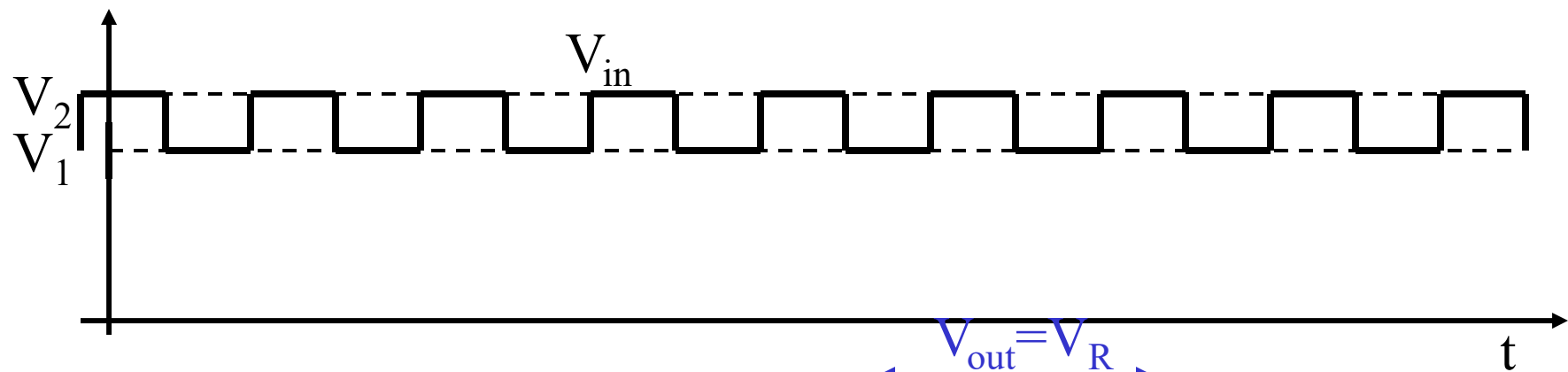
- Se consideriamo il **circuito RC** come un blocco con un ingresso ed una uscita:



- Abbiamo applicato una V_{in} quadra tra V_1 e V_2 , e ottenuto in uscita una V_{out} fatta da rami di esponenziali crescenti e decrescenti

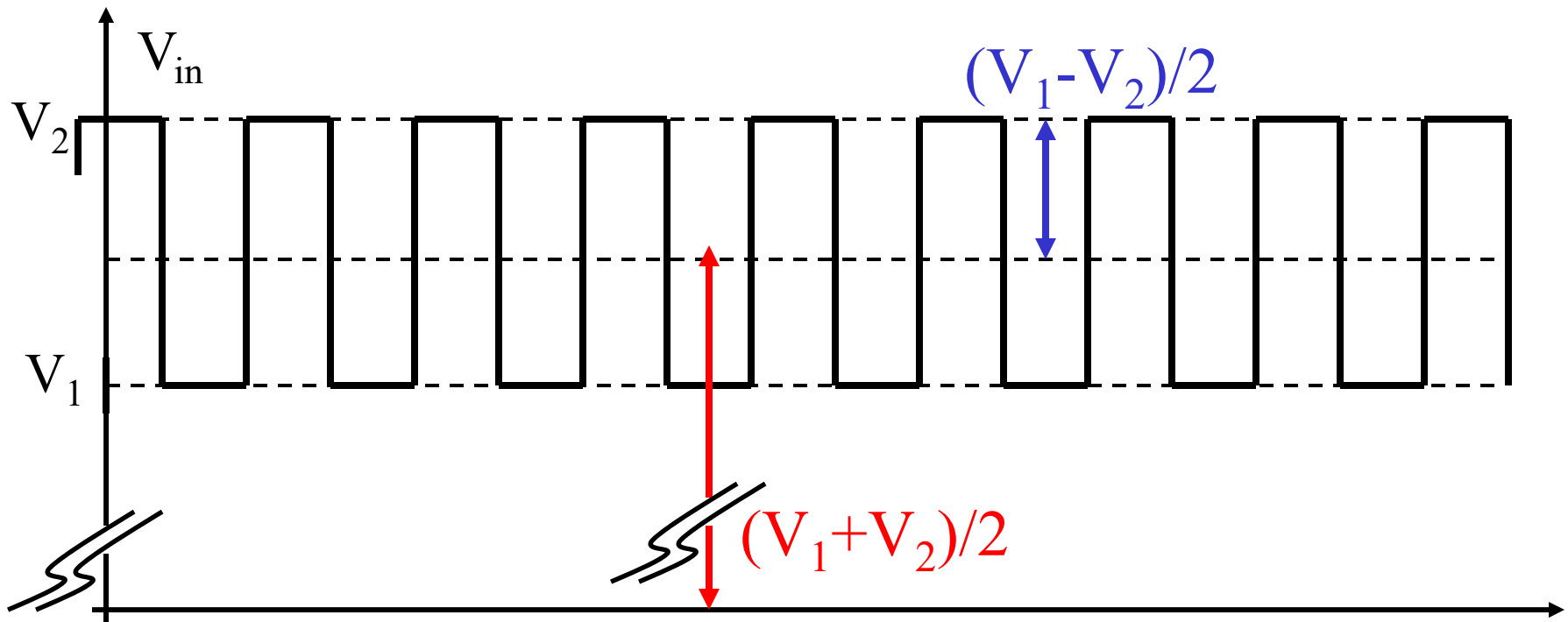






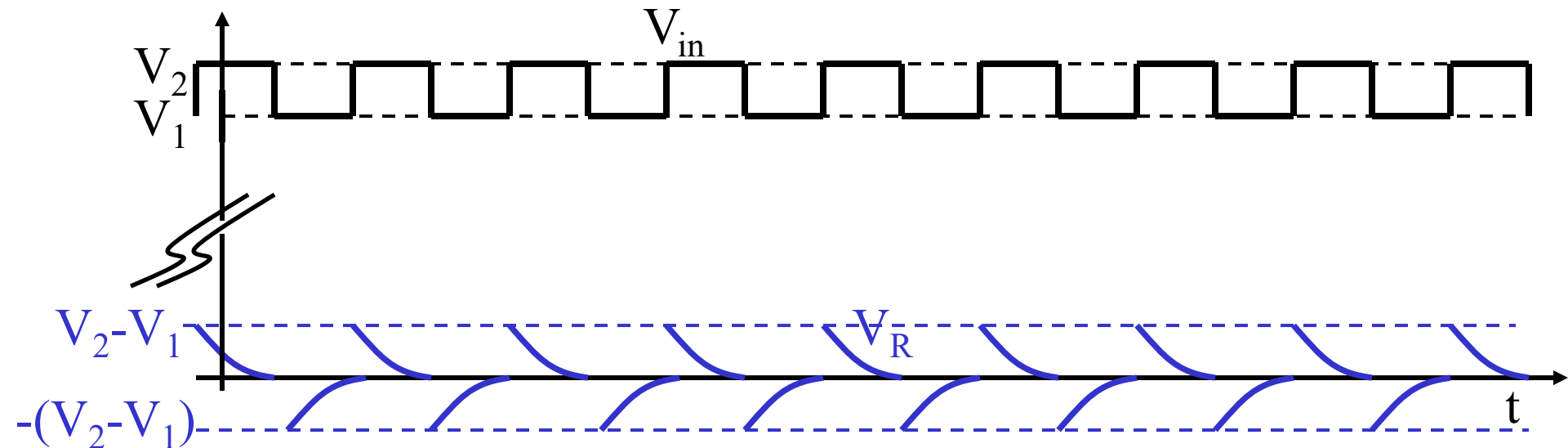
CR come “filtro per la continua”

- è interessante considerare la tensione quadra V_{in} come la somma di una tensione costante di valore $(V_1+V_2)/2$ e di una componente a media nulla di valore $\pm(V_1-V_2)/2$:
- $V_{in} = (V_1+V_2)/2 \pm (V_1-V_2)/2$



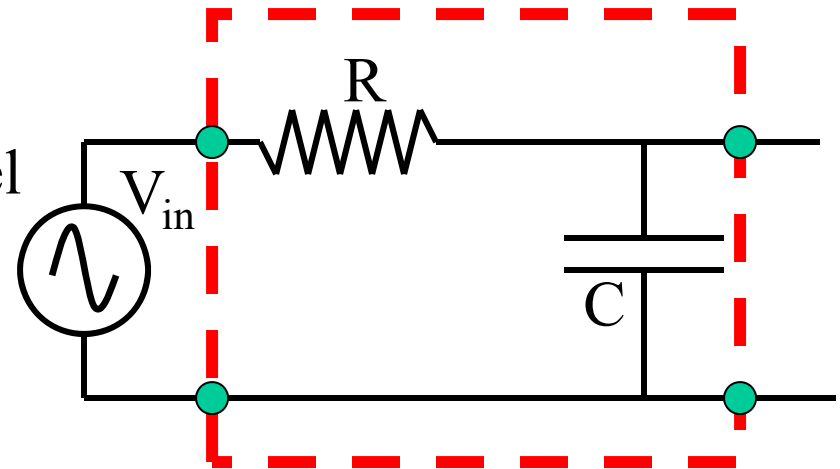
CR come “filtro per la continua”

- $V_{in} = (V_1 + V_2)/2 \pm (V_1 - V_2)/2$
- Dai nostri risultati è evidente che il valore del segnale in uscita **ai capi della resistenza** dipende solo dalla componente $\pm(V_1 - V_2)/2$, ed è assolutamente indipendente dal valore continuo $(V_1 + V_2)/2$.
- Cioè V_1 e V_2 possono essere anche molto grandi, ma ai capi della resistenza si misura un segnale che dipende solo dalla loro differenza.
- Far passare il segnale attraverso il condensatore permette quindi di **disaccoppiare la componente alternata da quella continua**.



Regime sinusoidale

- Consideriamo il solito circuito RC, ma utilizziamo una V_{in} sinusoidale invece che quadra.
- Il caso sinusoidale è molto importante perchè
 - Una forma d'onda periodica qualsiasi può essere sviluppata in serie di armoniche (sviluppo di Fourier). Siccome le equazioni del circuito sono lineari, la risposta all'onda qualsiasi è la somma delle risposte alle singole componenti sinusoidali.
 - Ci sono generatori di segnali sinusoidali importanti (la rete elettrica ad es., e molti componenti elettromeccanici (alternatori ad es.).



Regime sinusoidale

$$V_{in} = V_o \cos(\omega t)$$

$$V(t) - R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$V(t) - RC \frac{dV_C}{dt} - V_C = 0$$

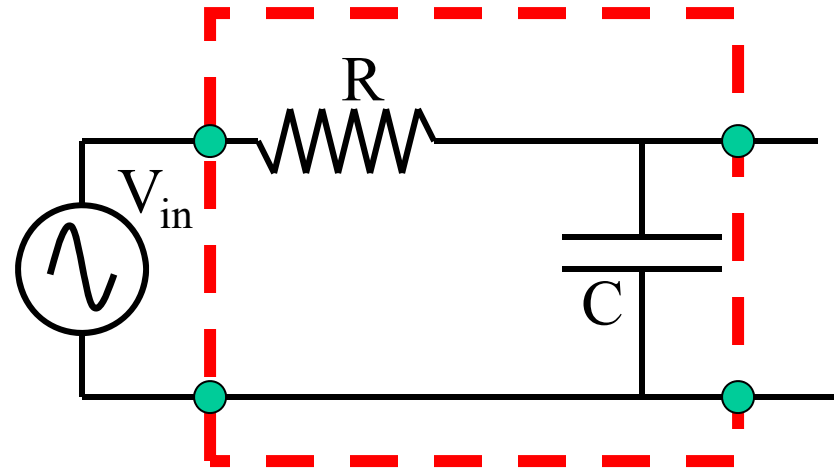
$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_o \cos(\omega t)$$

si cerca una soluzione del tipo

$$V_C = V_{oC} \cos(\omega t + \phi)$$

Sostituendo si trovano le costanti

$$V_{oC} \quad \text{e} \quad \phi$$



Regime sinusoidale

si preferisce pero' usare la notazione complessa, che rende piu' semplici i calcoli. Si usa l'identita'

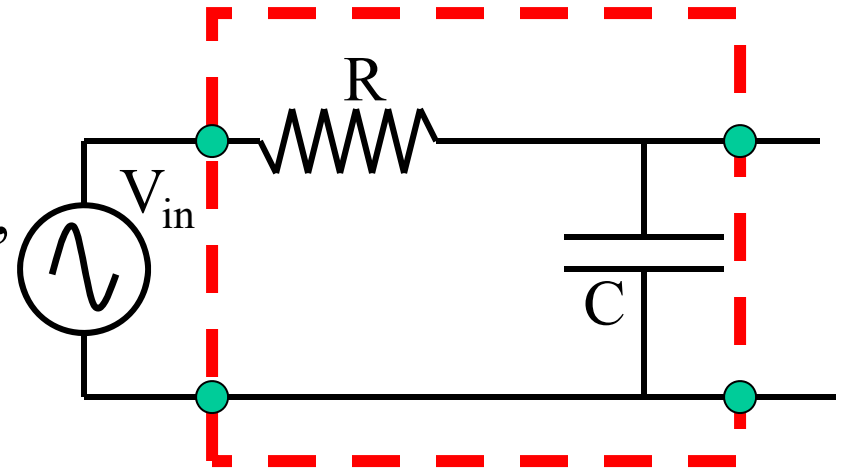
$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$$

e si considera, convenzionalmente, l'equazione per $V(t)$ come la parte reale di una equazione complessa :

Quindi :

$$V_C = V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{e} \quad V_{in} = V_o e^{j\omega t} \quad \text{e quindi}$$

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V_o \cos(\omega t) \Rightarrow RCj\omega V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)} + V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)} = V_o e^{j\omega t}$$



Regime sinusoidale

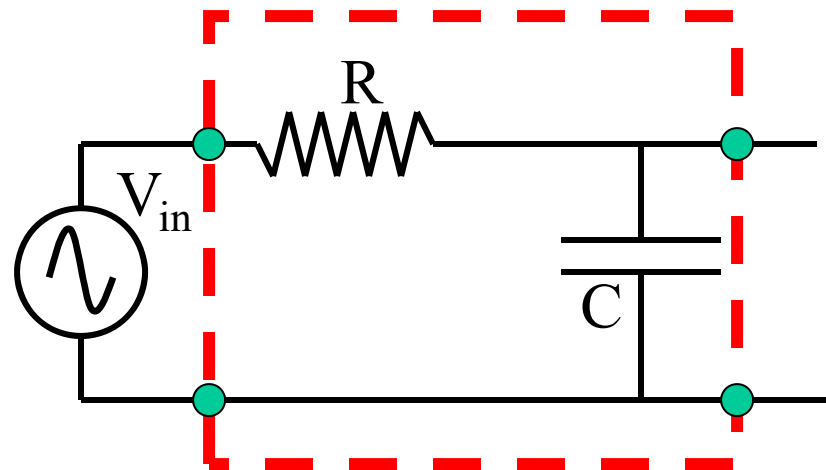
$$RCj \omega V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)} + V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)} = V_o e^{j\omega t}$$

$$RCj \omega V_{oC} e^{j\omega t} e^{j\varphi} + V_{oC} e^{j\omega t} e^{j\varphi} = V_o e^{j\omega t}$$

$$RCj \omega V_{oC} e^{j\varphi} + V_{oC} e^{j\varphi} = V_o$$

$$V_{oC} e^{j\varphi} = \frac{V_o}{RCj \omega + 1} \quad \text{e quindi}$$

$$V_{oC} = \frac{V_o}{\sqrt{(RC \omega)^2 + 1}}$$



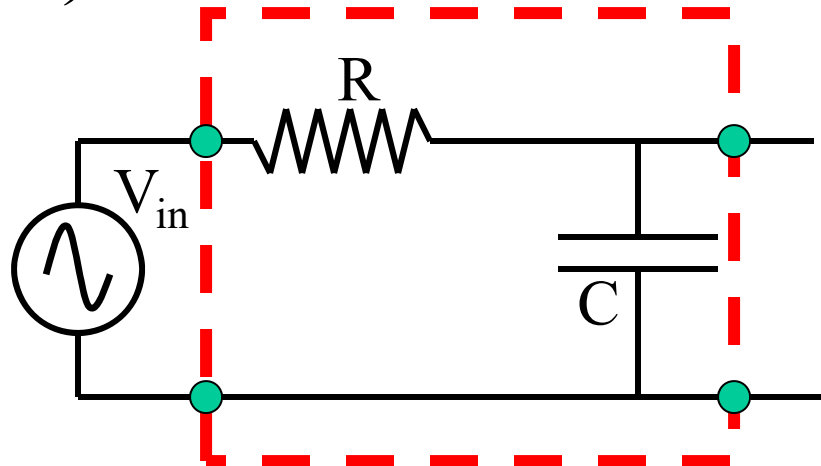
Regime sinusoidale

inoltre si puo' anche scrivere

$$V_{oc} e^{j\varphi} = \frac{V_o}{RCj\omega + 1} = \frac{V_o}{(RC\omega)^2 + 1} (1 - jRC\omega)$$

usando il fatto che $\varphi = \arctan \left(\frac{\text{Im}(V_{oc} e^{j\varphi})}{\text{Re}(V_{oc} e^{j\varphi})} \right)$ si trova subito

$$\varphi = \arctan \left(-\frac{RC\omega}{1} \right) = \arctan(-RC\omega) = \arctan(-\tau\omega)$$



- Possiamo quindi graficare, in **Regime sinusoidale** funzione della frequenza del segnale d'ingresso, l'ampiezza del segnale in uscita, ed il suo sfasamento:

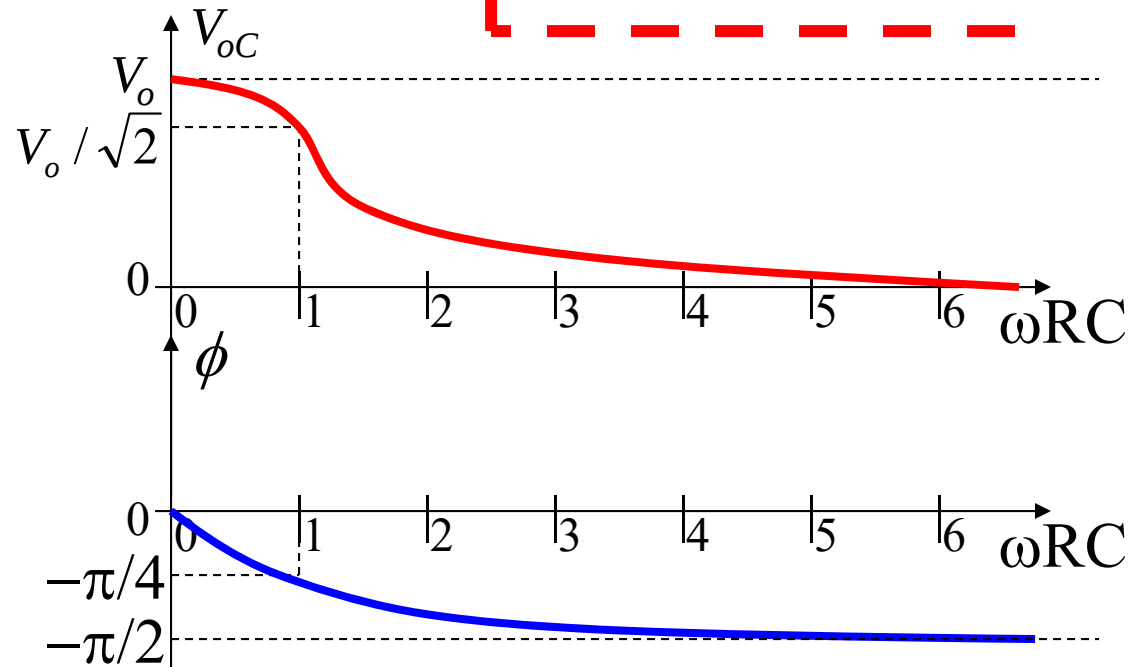
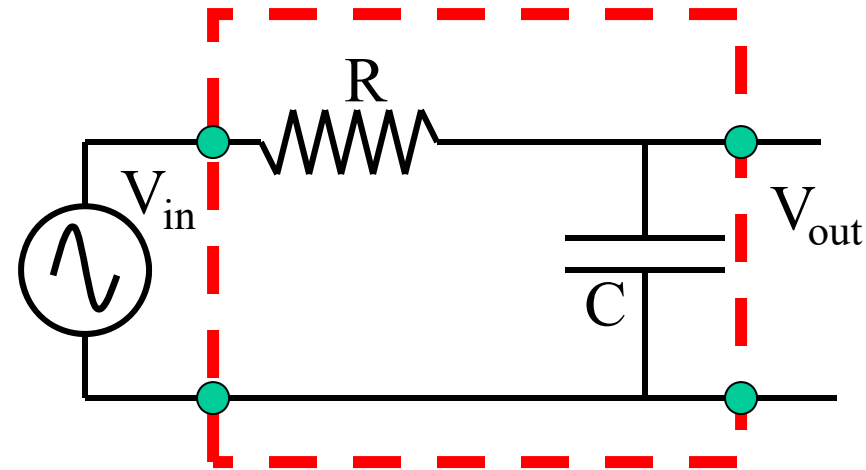
$$V_{in} = V_o e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$V_{out} = V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

dove

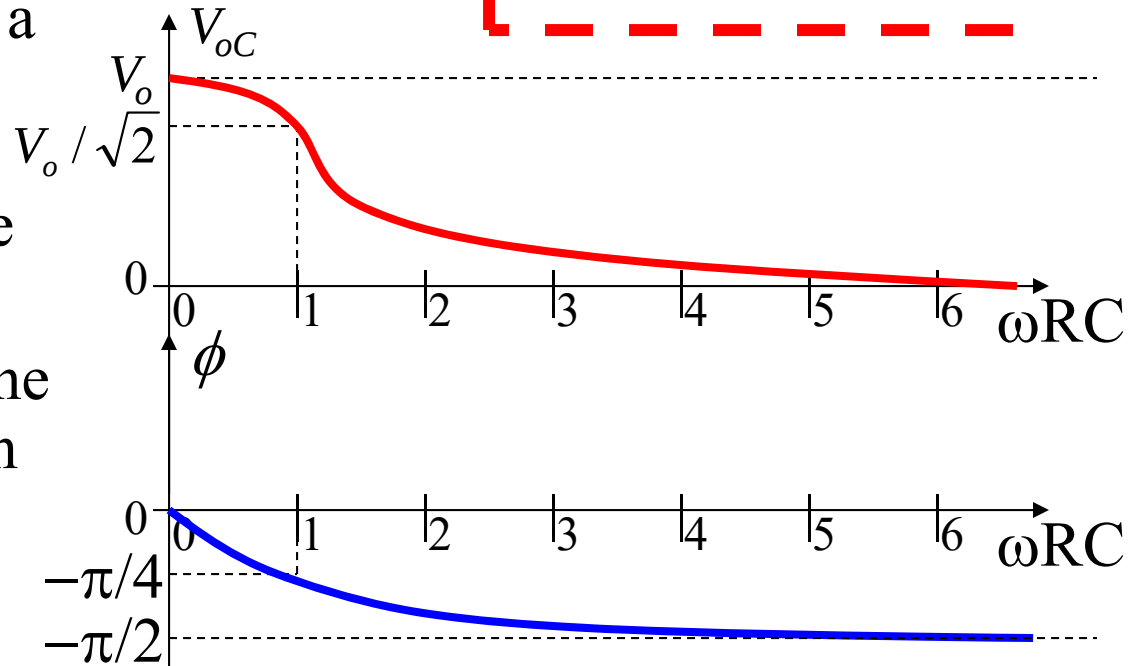
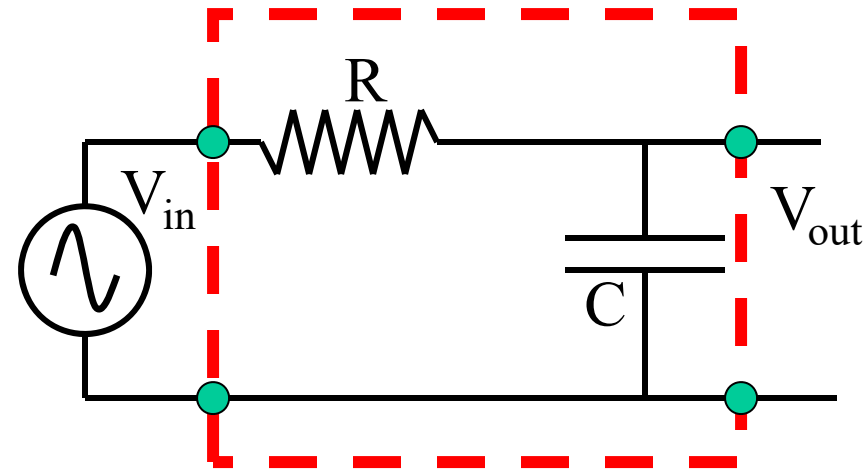
$$V_{oC} = \frac{V_o}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}$$

$$\varphi = \arctan(-\omega\tau)$$



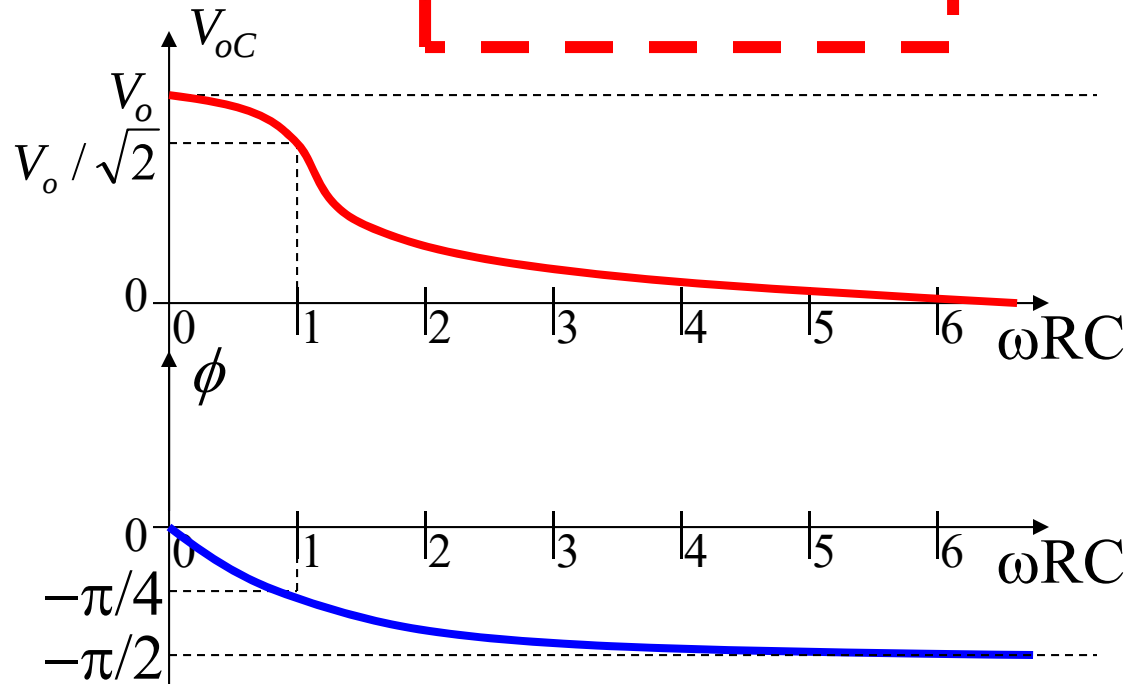
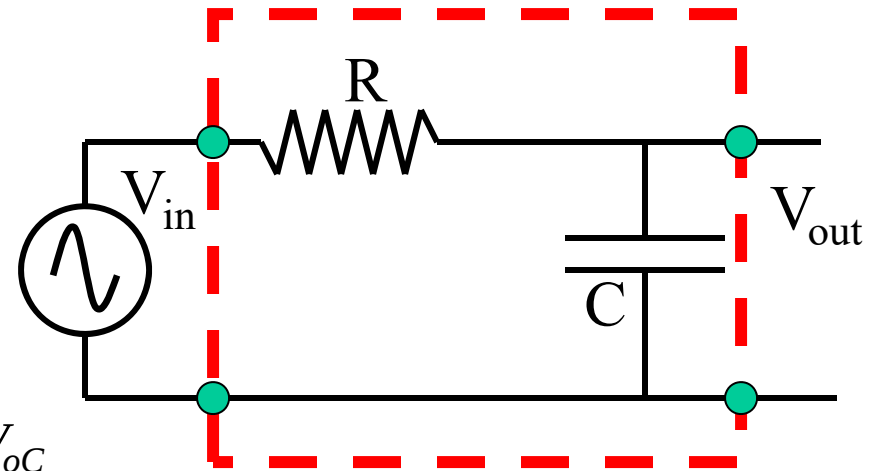
Regime sinusoidale

- Per $\omega \rightarrow 0$ la tensione ai capi del condensatore tende ad essere in ogni istante uguale a quella del generatore: condizioni quasistatiche
- Per $\omega \rightarrow \infty$ le variazioni di tensione in ingresso sono talmente veloci che il condensatore non riesce né a caricarsi né a scaricarsi in tempo. Di conseguenza la tensione ai suoi capi rimane nulla.
- Per ω intermedi, la tensione del condensatore segue, con un certo ritardo e ridotta in ampiezza, la tensione di ingresso.



Regime sinusoidale

- Possiamo dire quindi che le pulsazioni ω molto minori di $1/RC$ (frequenze molto minori di $1/(2\pi RC)$) passano attraverso il blocco RC, mentre le pulsazioni ω molto maggiori di $1/RC$ non passano attraverso il blocco RC.
- Si conclude che, quando si prende il segnale in uscita ai capi del condensatore, il blocco RC si comporta come un **filtro passa basso**
- La frequenza $f_o = 1/(2\pi RC)$ viene detta **frequenza di taglio del filtro**.



O.D.G.: $R=1\text{k}\Omega$, $C=1\mu\text{F}$, $f_o=0.16\text{ kHz}$

I fasori

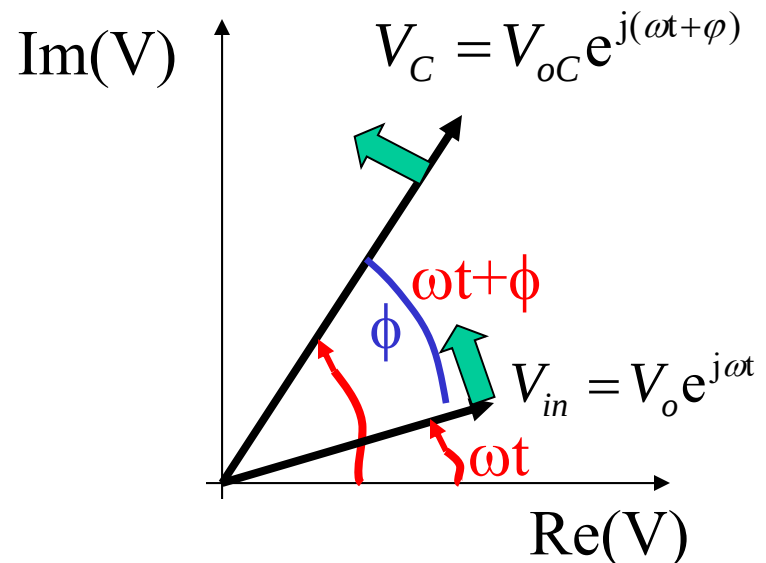
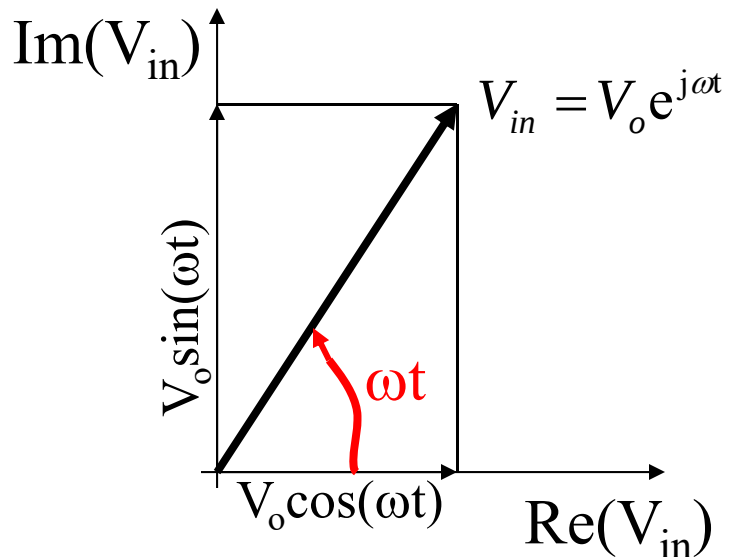
- Alla rappresentazione complessa delle tensioni corrisponde una rappresentazione geometrica interessante.

- Nel piano complesso i segnali

$$V_{in} = V_o \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad V_{in} = V_o e^{j\omega t}$$

$$V_C = V_{oC} \cos(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad V_C = V_{oC} e^{j(\omega t + \phi)}$$

- Sono vettori che ruotano in senso antiorario con velocità ω :



Corrente

- La corrente che scorre nel circuito ... è

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)}) = CV_{oC} j\omega e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$i_C = i = (j\omega C) V_C$$



Legge di Ohm Generalizzata:
basta pensare ad una “impedenza”
del condensatore pari a $1/j\omega C$

$$i = j\omega C V_C = \frac{j\omega C V_{in}}{RCj\omega + 1}$$

scrivendo la corrente nella forma $i = I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$ si ottiene :

$$I_o = V_o \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi_I = \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)$$

Corrente

- La corrente che scorre nel circ. durante la carica e scarica del condensatore è

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)}) = CV_{oC} j\omega e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$i_C = i = (j\omega C) V_C$$



Legge di Ohm Generalizzata:
basta pensare ad una “impedenza”
del condensatore pari a $1/j\omega C$

$$i = j\omega C V_C = \frac{j\omega C V_{in}}{RCj\omega + 1}$$

scrivendo la corrente nella forma $i = I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$ si ottiene :

$$I_o = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} V_o$$

$$\varphi_I = \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)$$

da
confrontare
con

$$V_{oC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} V_o$$

$$\varphi_{v_C} = \arctan(-\omega\tau)$$

Corrente

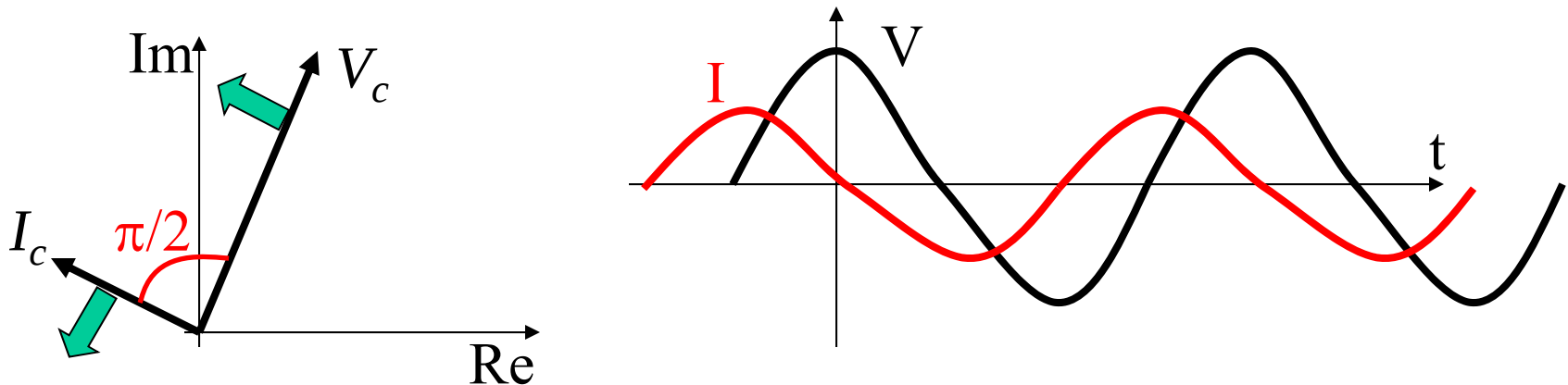
- La corrente nel circuito è quindi sfasata rispetto alla tensione ai capi del condensatore:

$$\tan(\varphi_I - \varphi_{V_C}) = \frac{\tan(\varphi_I) - \tan(\varphi_{V_C})}{1 + \tan(\varphi_{V_C})\tan(\varphi_I)} = \frac{\frac{1}{\omega\tau} + \omega\tau}{1 - \omega\tau \frac{1}{\omega\tau}} = +\infty$$

- Quindi

$$\varphi_I - \varphi_{V_C} = \frac{\pi}{2}$$

- La tensione ai capi del condensatore ha un ritardo di 90° rispetto alla corrente, indipendentemente dalla frequenza.



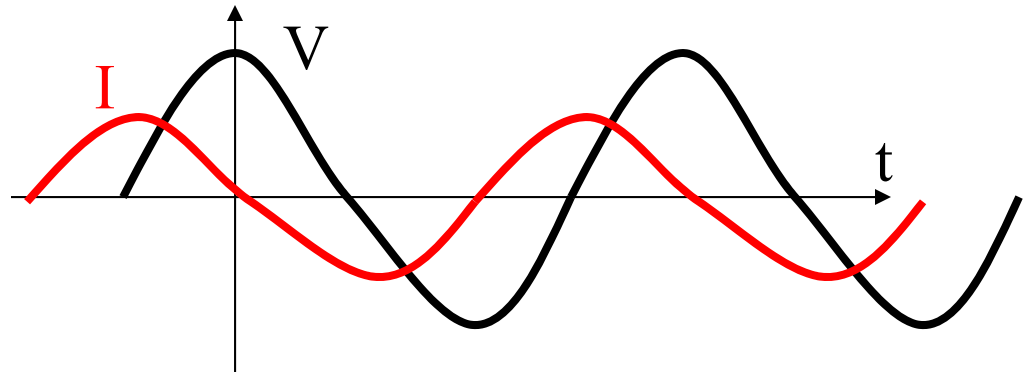
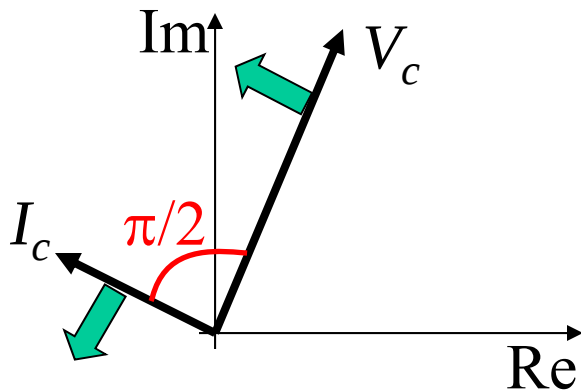
Corrente

- Con la notazione complessa si ritrova subito lo stesso risultato

$$\text{da } i_C = i = (j\omega C)V_C$$

$$V_{oC}e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{j\omega C} I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)} = -j \frac{1}{\omega C} I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega C} I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

$$V_{oC}e^{j\varphi_{V_C}} = \frac{I_o}{\omega C} e^{j(\varphi_I - \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \varphi_I - \varphi_{V_C} = \frac{\pi}{2}$$



Esperienza del 6 Aprile 2016

- Divisa in tre parti:
- Misure in corrente continua su una catena di resistori in serie – Scopo:
 - Imparare ad usare lo strumento universale ed il multimetro digitale
 - Verifica delle leggi di Ohm e di Thevenin
 - Verifica delle perturbazioni introdotte dagli strumenti
- Trasferimento di potenza (opzionale)– Scopo:
 - Imparare ad usare lo strumento universale ed il multimetro digitale
 - Verifica dell' effetto della resistenza interna del generatore (che viene aumentata artificialmente).
- Misura della carica e scarica di un condensatore
 - Vedere processi dinamici (lenti) e verificare le perturbazioni introdotte dagli strumenti

Esperienza del 6 Aprile 2016

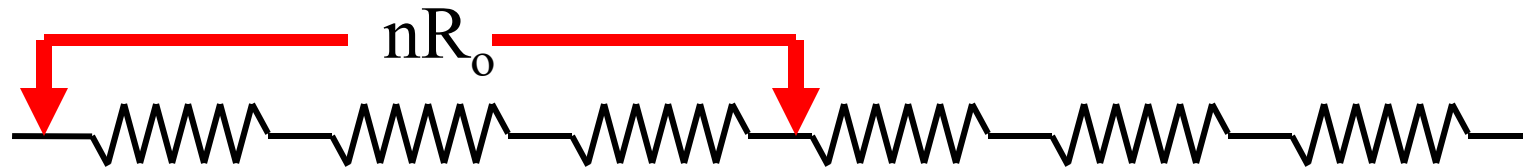
Avrete a disposizione:

- “Strumento universale” (multimetro analogico)
- Multimetro elettronico digitale
- Alimentatore (generatore reale di tensione)
- Batteria (generatore reale di tensione)
- Catena di resistori (10 x 100 k Ω)
- Resistori vari

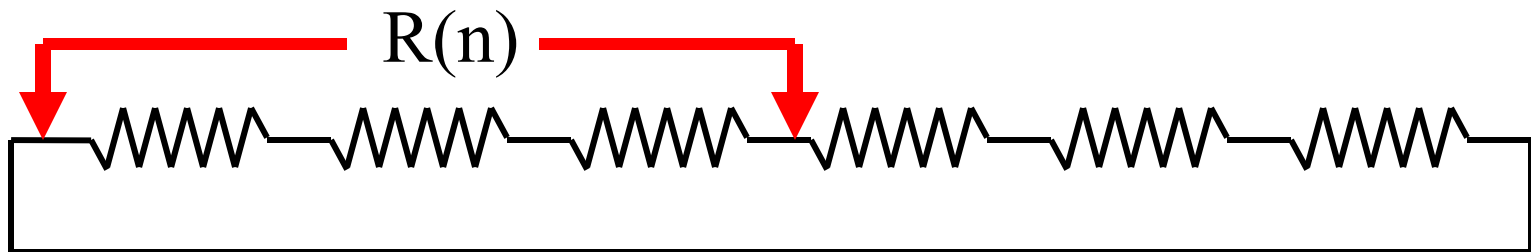
Misure sulla catena di resistori:

Misura preliminare.

- Verificare coi multimetri i valori delle resistenze
- Verificare i valori della serie di n resistori, per n che va da 1 a 10, con la catena aperta



- Verificare i valori della serie di n resistori, per n che va da 1 a 9, con la catena chiusa su se stessa.

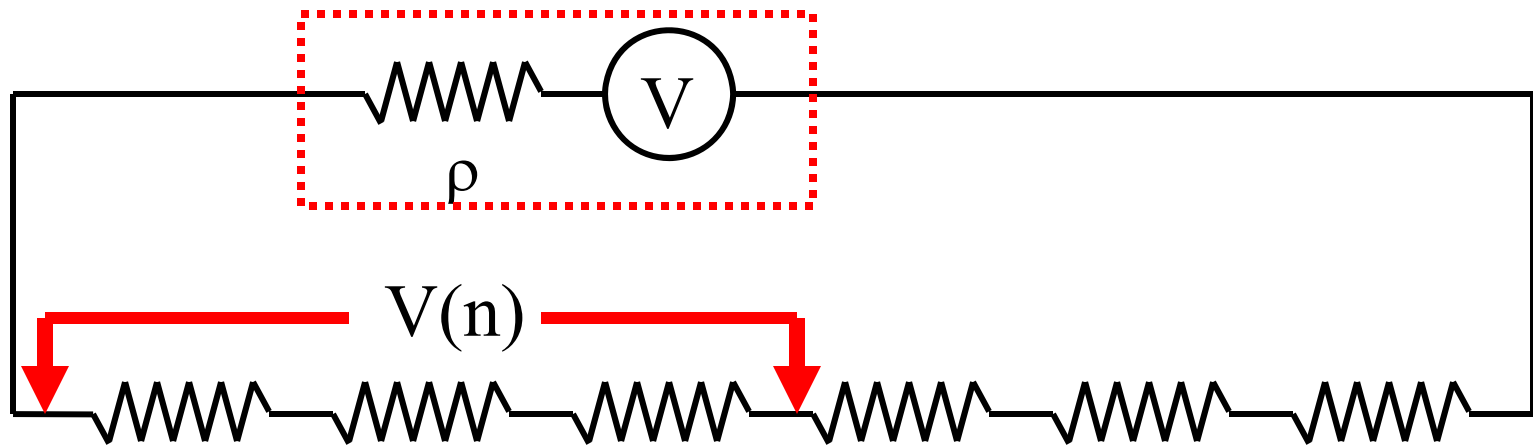


Misure sulla catena di resistori:

Misura della ddp ai capi di n resistori.

Si connette la catena al generatore.

- Si misurano le ddp $V(n)$ con
 - Strumento universale FS 2V
 - Strumento universale FS 10 V
 - Multimetro elettronico digitale

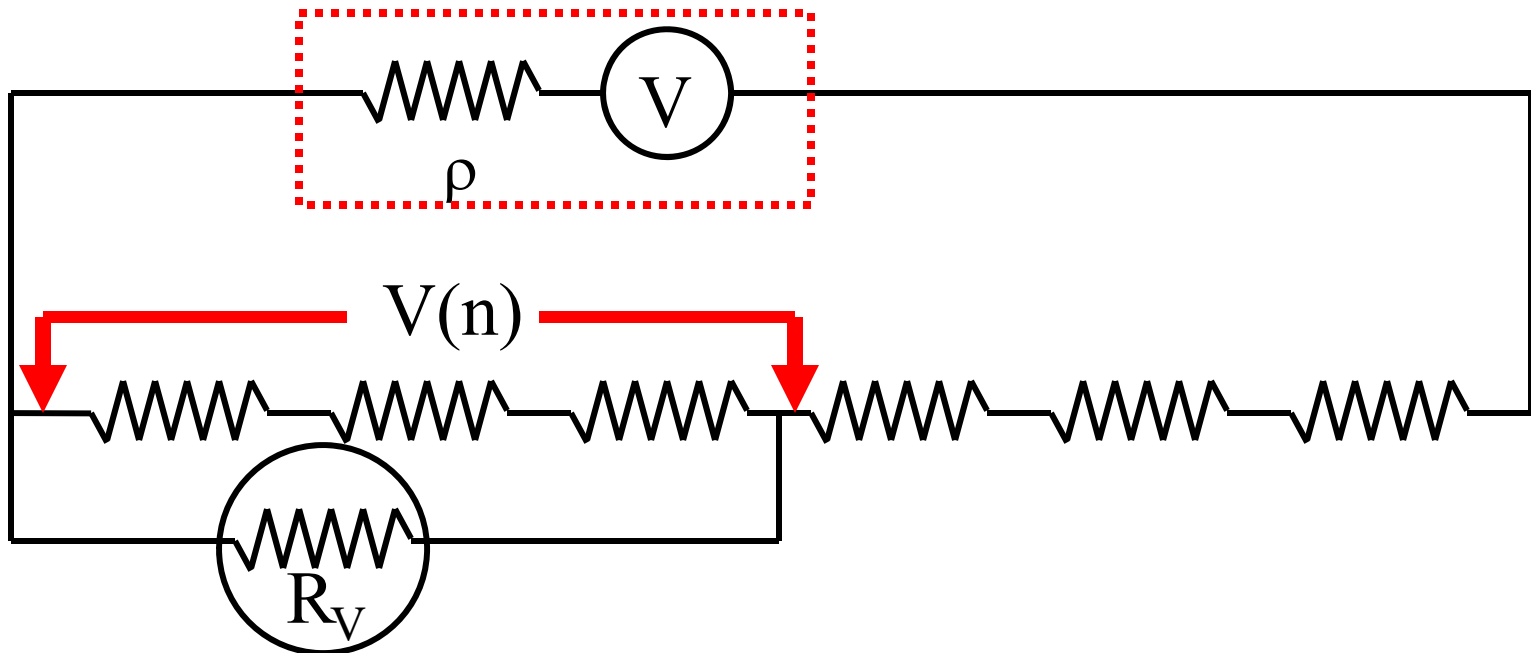


Misure sulla catena di resistori:

Misura della ddp ai capi di n resistori.

Si connette la catena al generatore.

- Si misurano le ddp $V(n)$ con
 - Strumento universale FS 2V
 - Strumento universale FS 10 V
 - Multimetro elettronico digitale

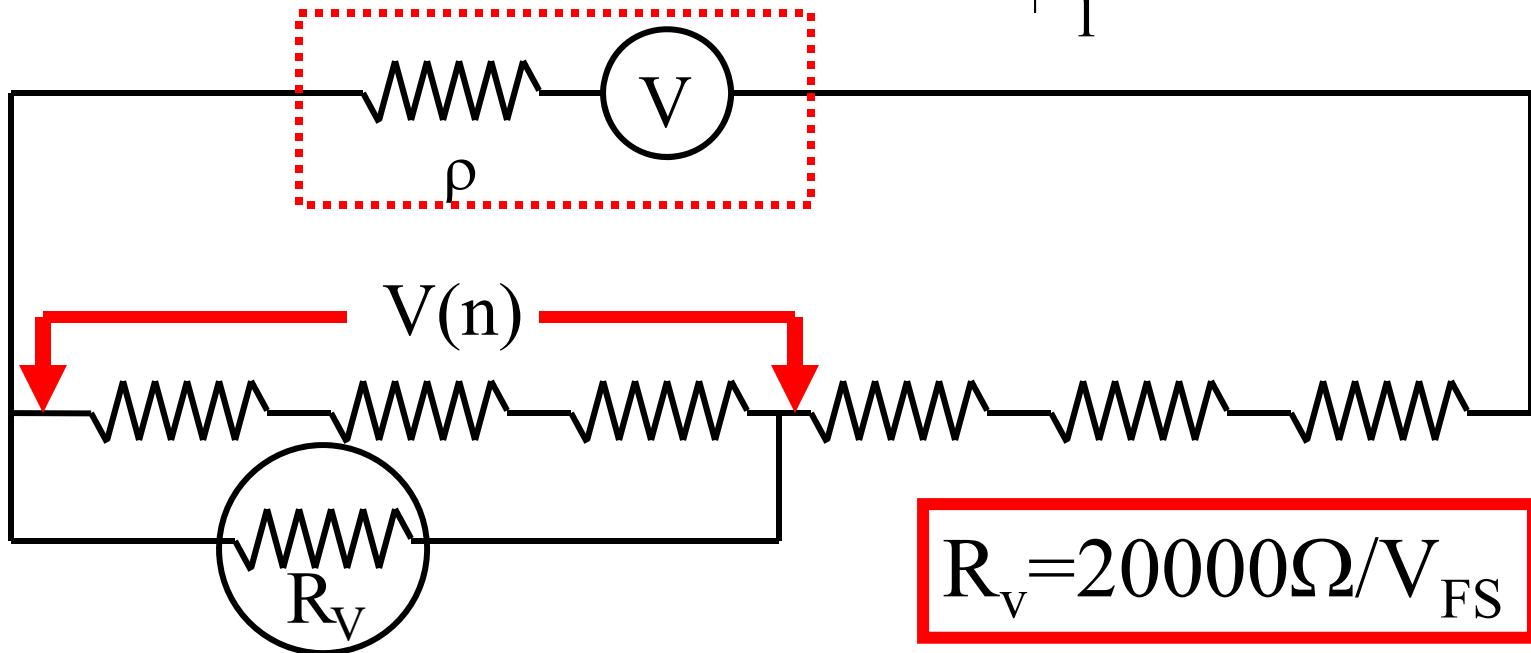
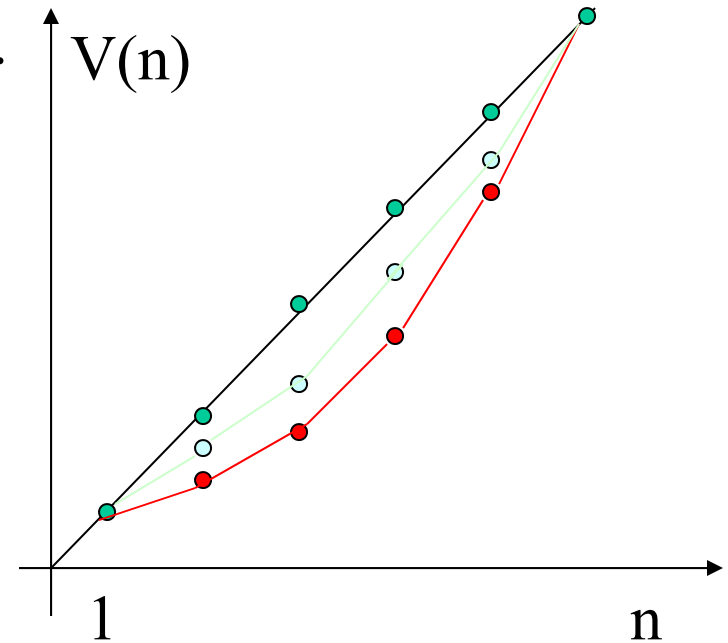


Misure sulla catena di resistori:

Misura della ddp ai capi di n resistori.

Si riportano in grafico le $V(n)$

- – Strumento universale FS 2V
- – Strumento universale FS 10 V
- – Multimetro elettronico digitale

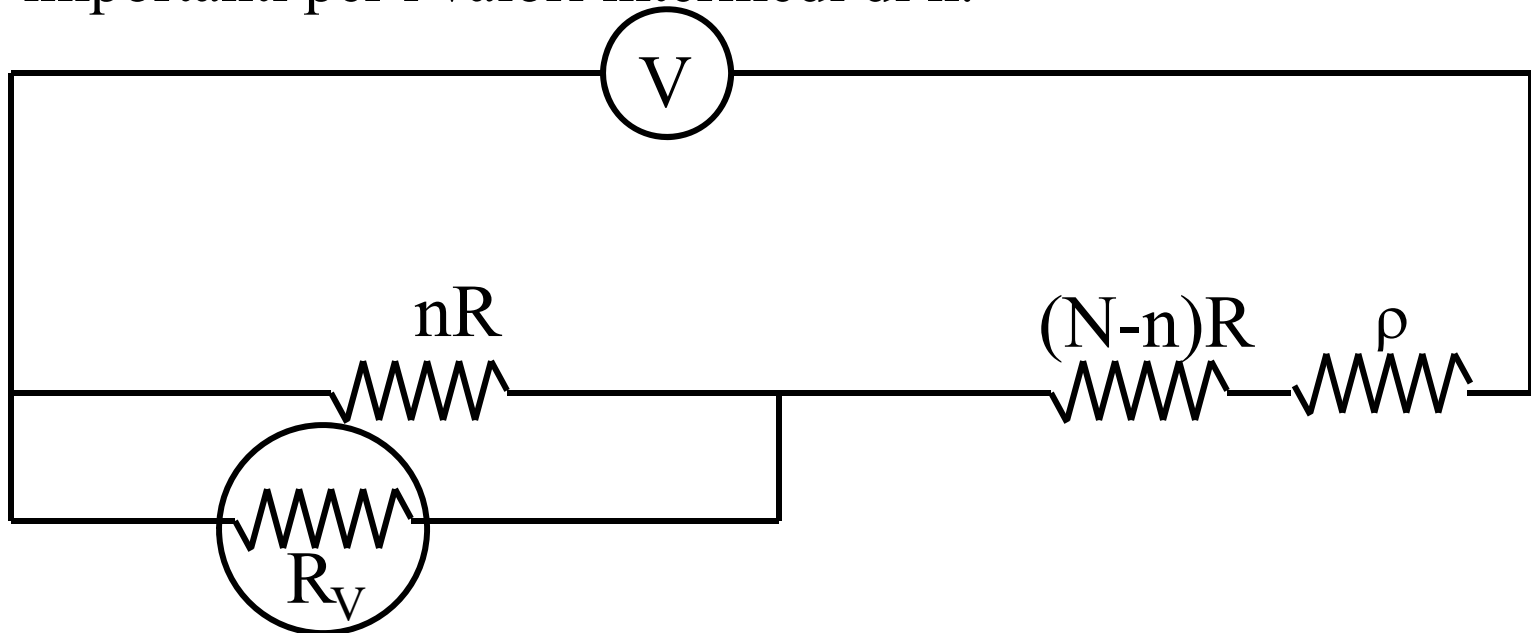


$$R_V = 20000 \Omega / V_{FS}$$

Misure sulla catena di resistori:

La perturbazione è tanto maggiore quanto maggiore è il numero di resistenze effettivamente in parallelo al voltmetro, perchè in quel caso R_v può diventare addirittura inferiore alla resistenza equivalente.

La resistenza “vista” da R_v è, secondo Thevenin, il parallelo tra nR e $(N-n)R + \rho$, ed è quindi bassa sia quando n è vicino a 1 che quando n è vicino a N . Ci aspettiamo quindi piccole perturbazioni in questi due casi, e perturbazioni più importanti per i valori intermedi di n .

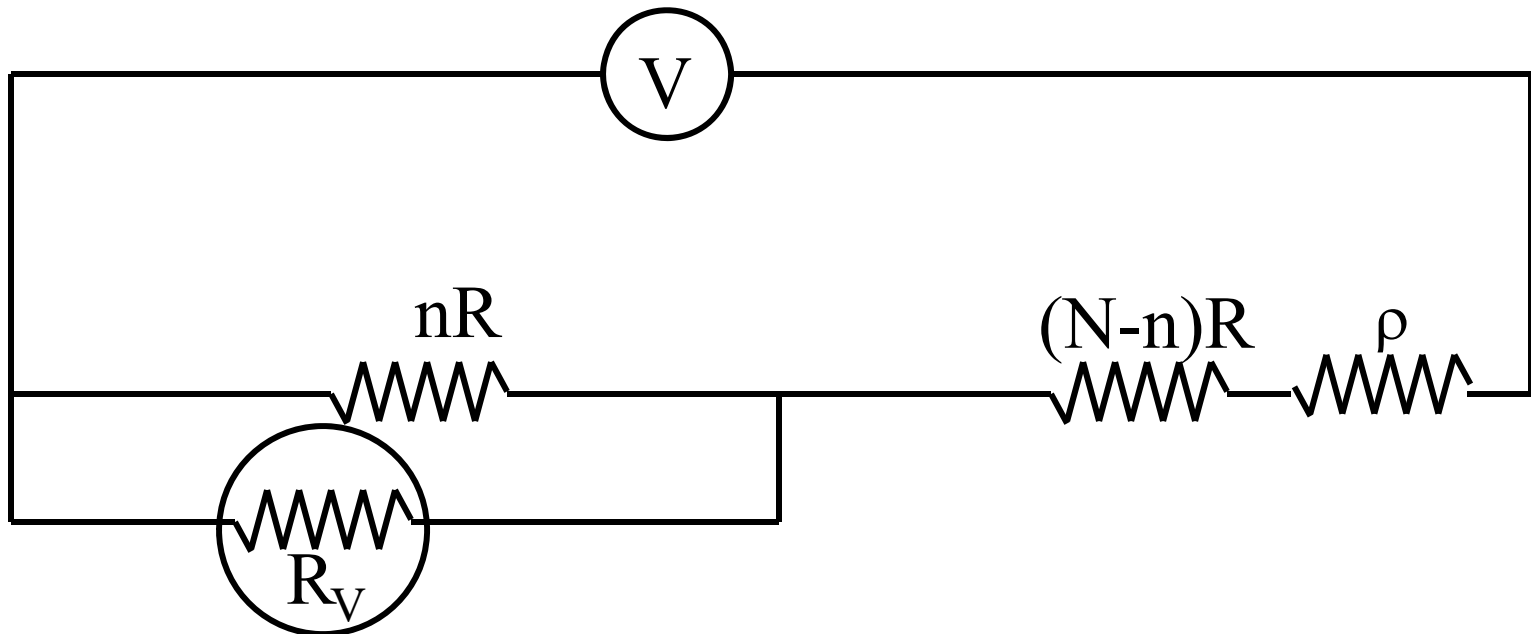


Misure sulla catena di resistori:

Per risolvere il problema basta considerare il partitore tra la resistenza $R_1 = (N-n)R + \rho$ e la resistenza $R_2 = nR // R_V$.

Possiamo quindi scrivere subito (trascurando ρ):

$$V_V = V \frac{R_2}{R_1 + R_2} = V \frac{\frac{nRR_V}{nR + R_V}}{\frac{nRR_V}{nR + R_V} + (N-n)R} = V \frac{n}{N + \frac{nR}{R_V}(N-n)}$$

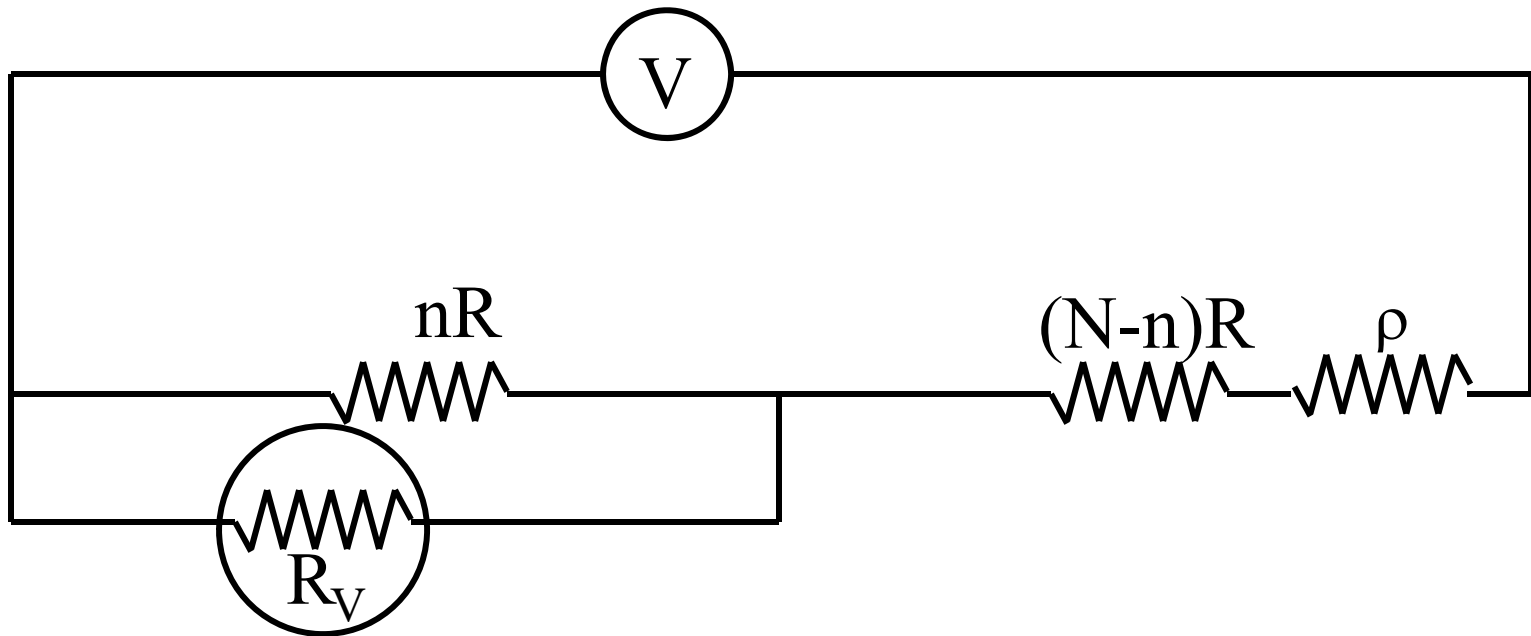


Misure sulla catena di resistori:

Da cui si vede che la formula si riduce al caso banale

$V_v = (n/N)V$ quando $R_v \gg n(N-n)R$.

$$V_v = V \frac{R_2}{R_1 + R_2} = V \frac{\frac{nRR_v}{nR + R_v}}{\frac{nRR_v}{nR + R_v} + (N - n)R} = V \frac{n}{N + \frac{nR}{R_v}(N - n)}$$



Misure sulla catena di resistori:

Se conosciamo la resistenza interna del voltmetro R_V ed il valore delle singole resistenze R , possiamo correggere i valori di V_V misurati, ed ottenere i valori che si leggerebbero se il voltmetro fosse ideale:

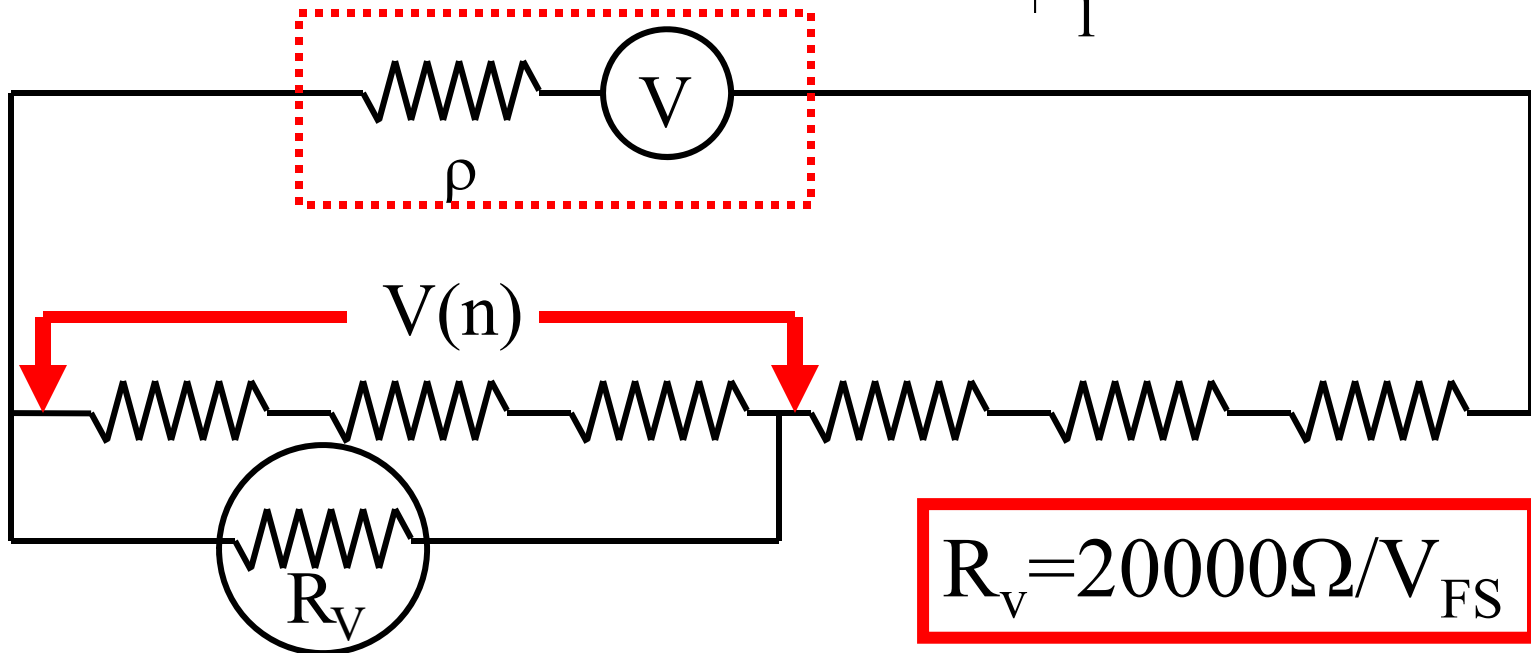
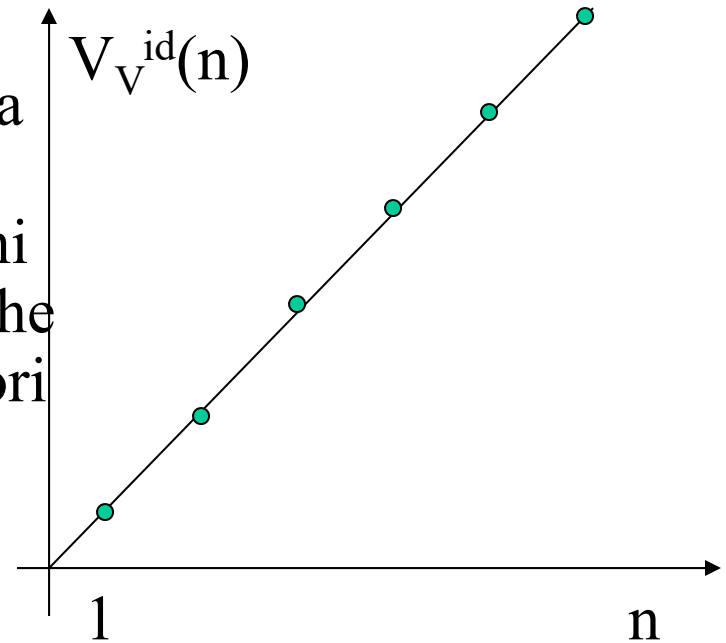
$$V_V^{mis} = V \frac{n}{N + \frac{nR}{R_V}(N - n)} \quad ; \quad V_V^{id} = V \frac{n}{N}$$

facendo il rapporto si ottiene

$$V_V^{id} = V_V^{mis} \frac{N + \frac{nR}{R_V}(N - n)}{N} = V_V^{mis} \left[1 + \frac{nR}{R_V} \left(1 - \frac{n}{N} \right) \right]$$

Misure sulla catena di resistori:

Si riportano in grafico le $V_V^{\text{id}}(n)$ corrette per la perturbazione introdotta dallo strumento di misura usando la formula precedente, e si otterrà in ogni caso che sono tutte lungo la retta, anche se con barre d' errore diverse, maggiori nel caso a fondo scala più alto.



Trasferimento di potenza da un generatore a un carico

La potenza dissipata nel carico e'

$$W = V_R I_R$$

Il circuito e' un normale partitore, quindi

$$V_R = V_o \frac{R}{R + R_o} \quad ; \quad I_R = \frac{V_o}{R + R_o}$$

$$\Rightarrow W = \frac{V_o^2 R}{(R + R_o)^2}$$

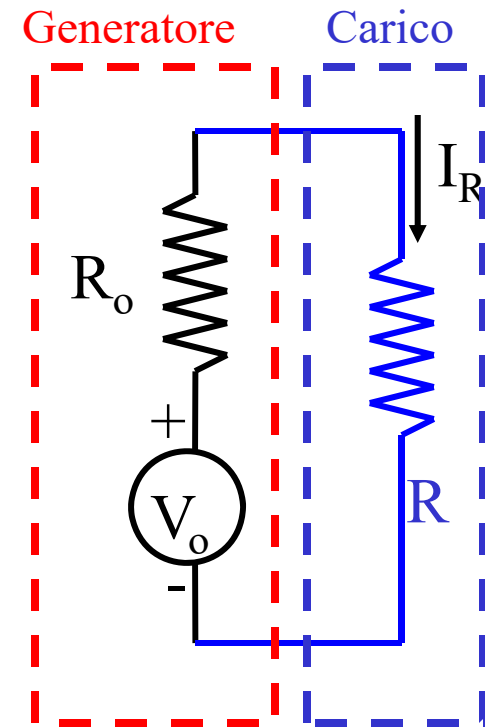
se si deriva rispetto a R si scopre che e' max. per

$$R = R_o$$

e vale

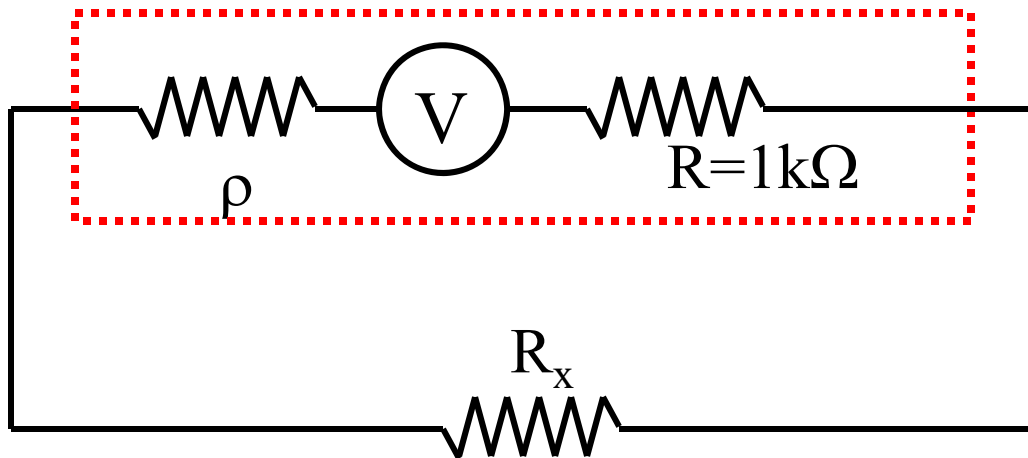
$$W_{\max} = \frac{V_o^2}{4R_o}$$

In queste condizioni si dice
che il carico è “adattato”



Misura del trasferimento di potenza dal generatore al carico

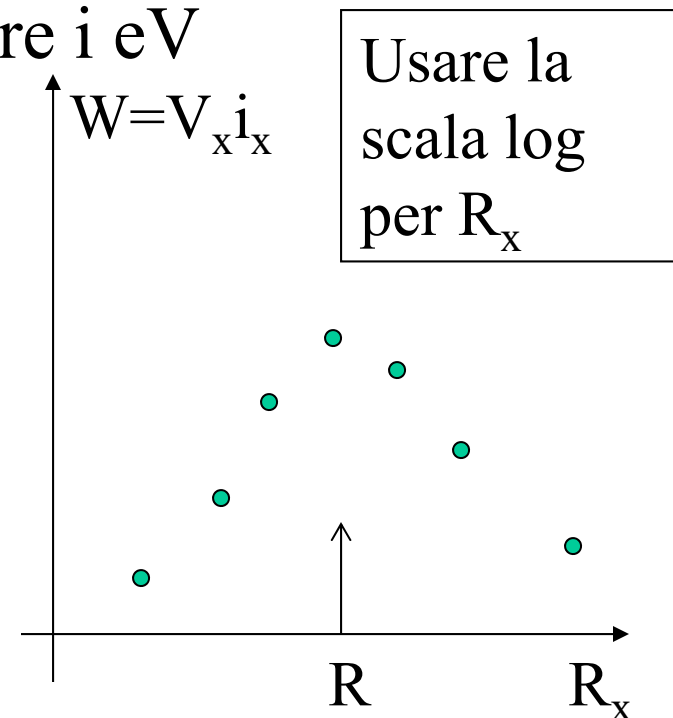
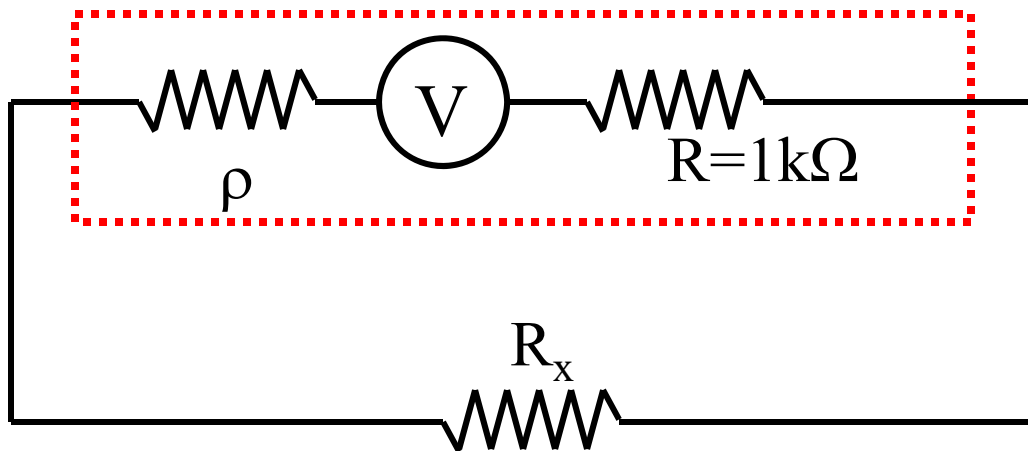
- Si aumenta artificialmente la resistenza interna del generatore inserendo in serie $1\text{k}\Omega$.
- Si misurano V_{R_x} e i_{R_x} nella resistenza R_x al variare di R_x .
- Si usano contemporaneamente lo strumento universale e il multimetro digitale per misurare i e V



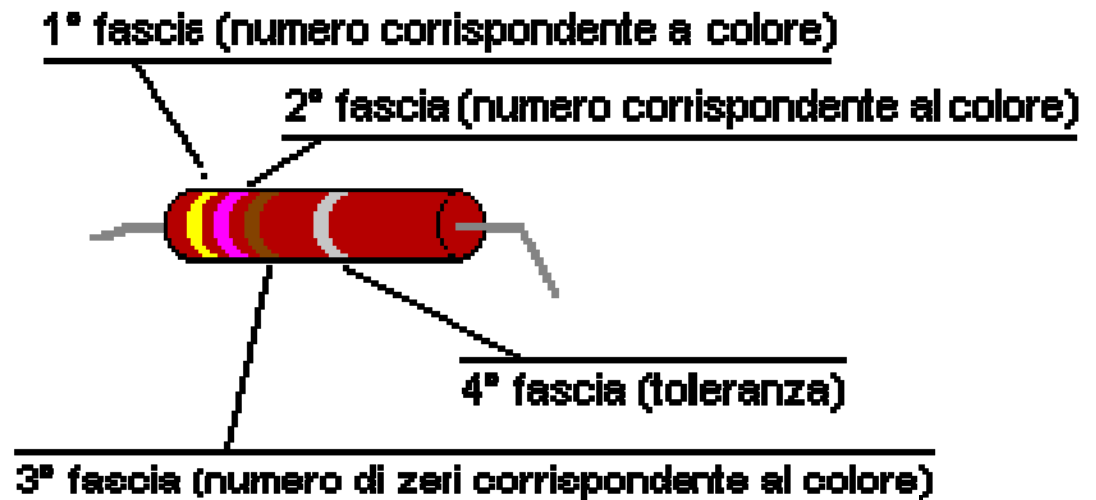
Usare R_x di 22, 47, 100, 220, 470, 1000, 2200, 4700, 10000, 22000, 47000 Ω

Misura del trasferimento di potenza dal generatore al carico

- Si aumenta artificialmente la resistenza interna del generatore inserendo in serie $1\text{k}\Omega$.
- Si misurano V_{R_x} e i_{R_x} nella resistenza R_x al variare di R_x .
- Si usano contemporaneamente lo strumento universale e il multimetro digitale per misurare i e V

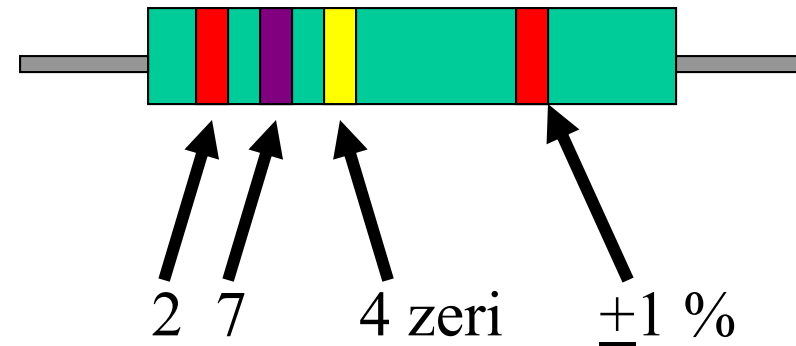


codice dei colori nei resistori



colore	1ª cifra	2ª cifra	3ª cifra
Nero	0	0	-
Marrone	1	1	0
Rosso	2	2	00
Arancio	3	3	000
Giallo	4	4	0000
Verde	5	5	00000
Blu	6	6	000000
Viola	7	7	-
Grigio	8	8	-
Bianco	9	9	-

Esempio:

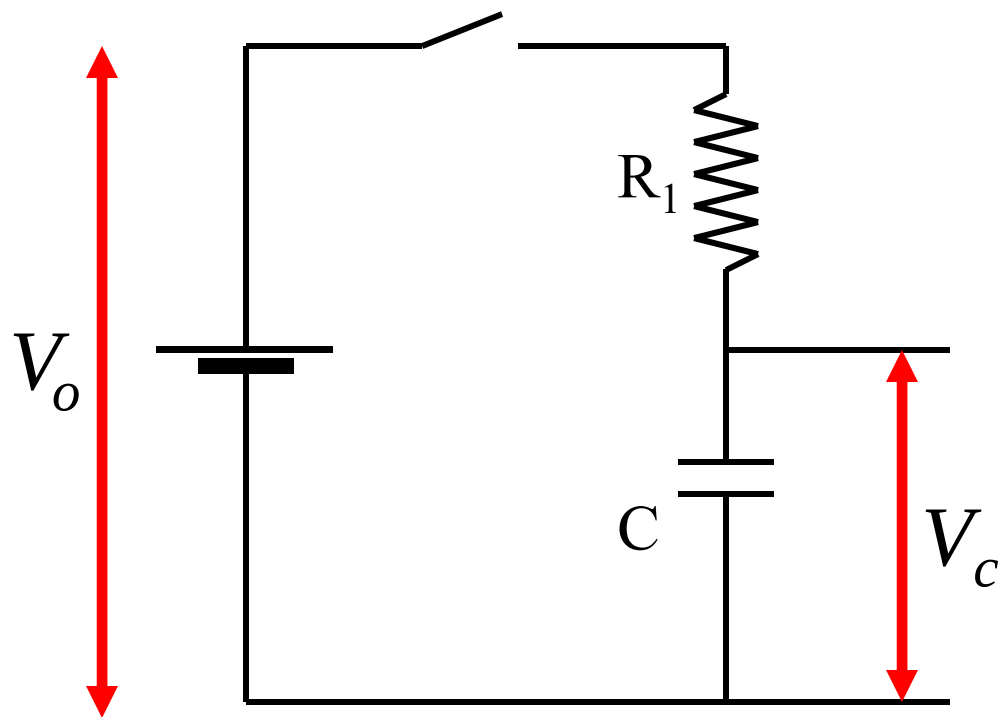


$$= 270\text{k}\Omega$$

TOLLERANZE

Rosso 1%	Oro 5%	Argento 10%	Mancante 20%
-------------	-----------	----------------	-----------------

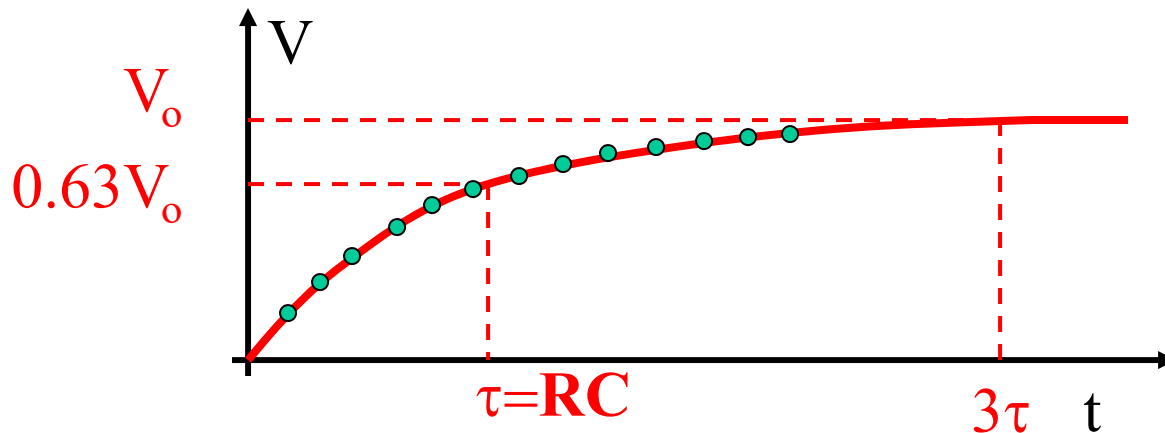
Carica di un condensatore



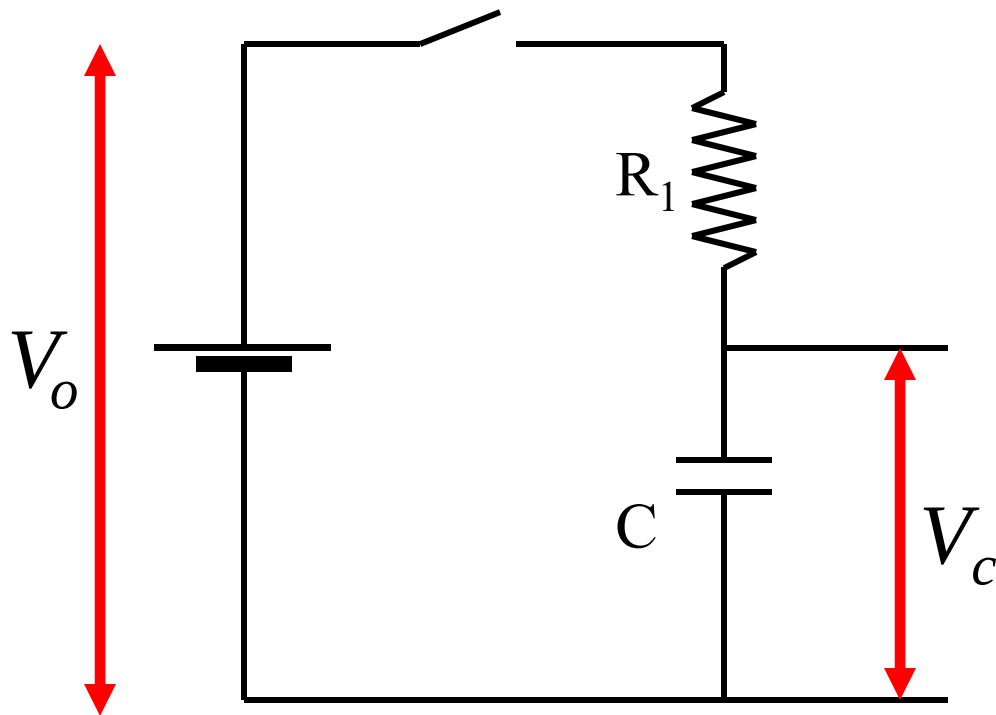
$$V_C(t) = V_o(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = R_1 C$$

- **Esempio:** con
 $R = 30 \text{ M}\Omega$
 $C = 2.2 \text{ }\mu\text{F}$
si ha $\tau = 66 \text{ s}$
- Con questa costante di tempo si può comodamente misurare V_c con il multimetro digitale, campionando la curva ogni 5-10 s, e confrontare con l'andamento teorico



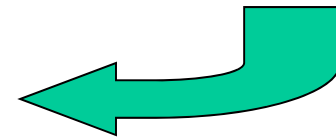
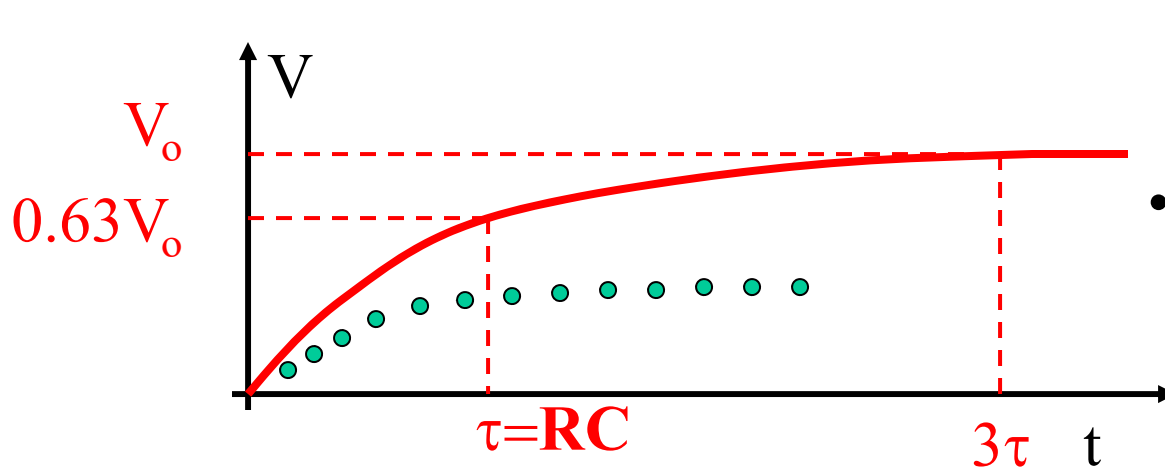
Carica di un condensatore



$$V_C(t) = V_o(1 - e^{-t/\tau})$$

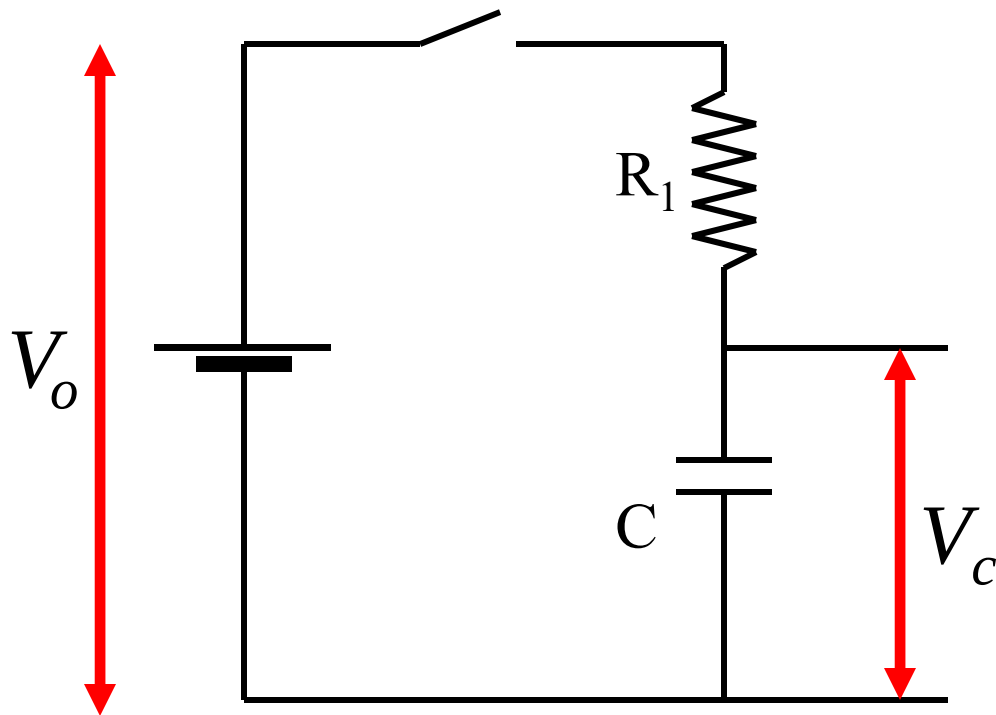
$$\tau = R_1 C$$

- Ma se si fa davvero, si trova il seguente risultato :



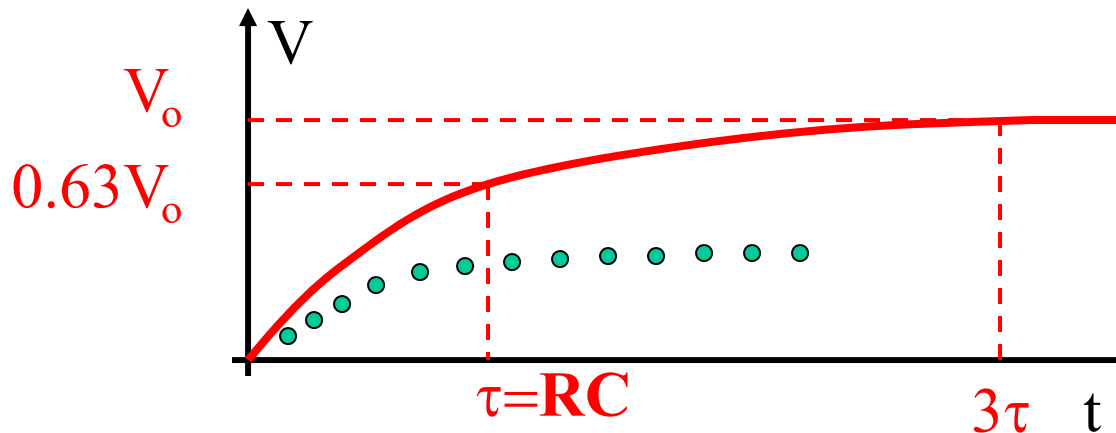
- Perchè ?

Carica di un condensatore

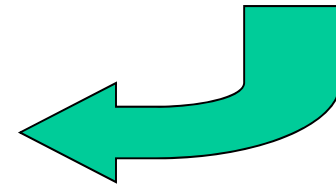


$$V_C(t) = V_o(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\tau = R_1 C$$

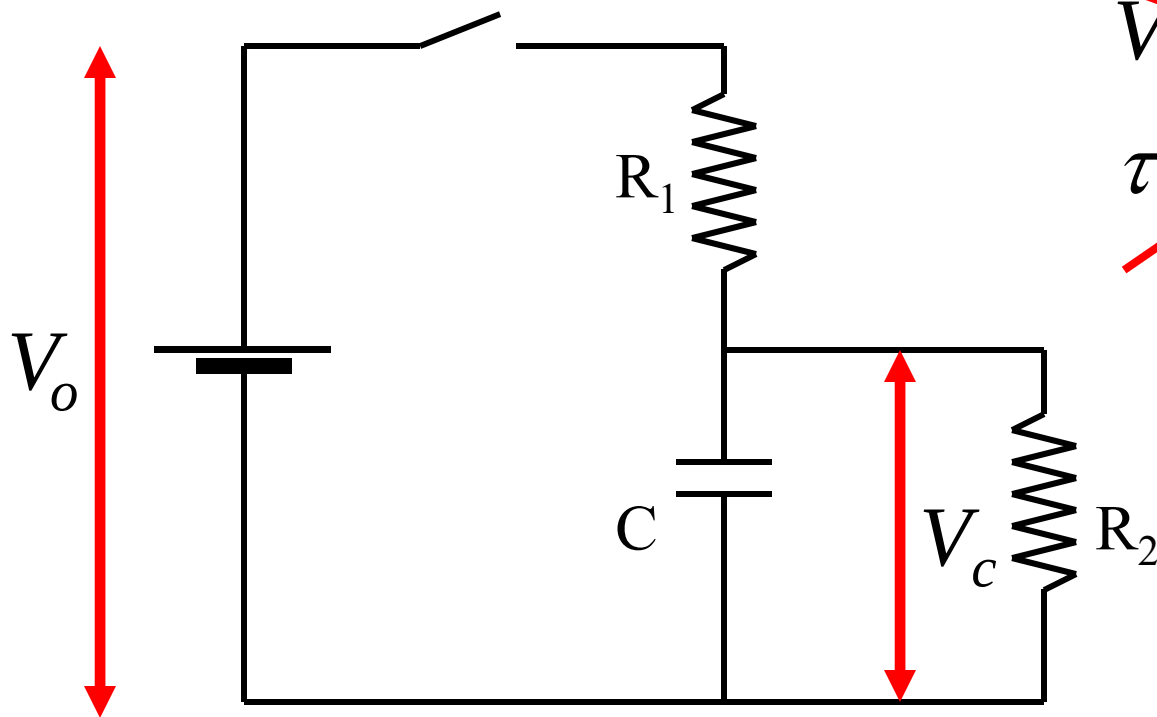


- Ma se si fa davvero, si trova il seguente risultato :



- Perché ?
- **Il multimetro perturba la misura !**

Carica di un condensatore

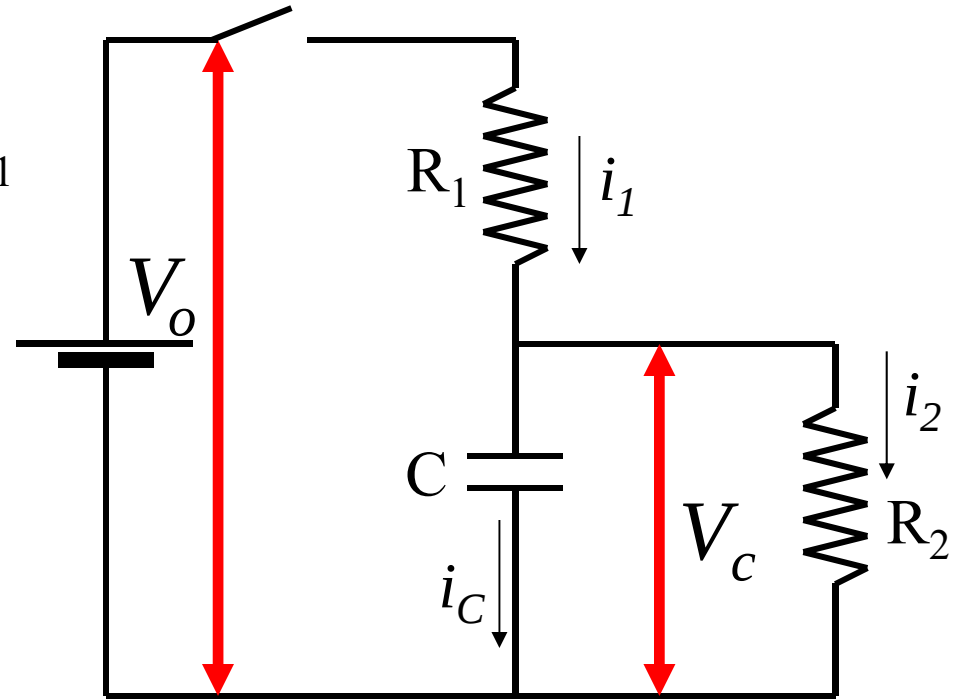


~~$$V_C(t) = V_o(1 - e^{-t/\tau})$$
$$\tau = R_1 C$$~~

- Siccome nel multimetro, usato come voltmetro, scorre una piccola corrente, esso è equivalente ad una resistenza R_2 posta in parallelo al condensatore.
- La soluzione $V_c(t)$ non vale più.

Carica di un condensatore

$$\left\{ \begin{array}{l} V_o = V_C + R_1 i_1 \\ V_C = R_2 i_2 \\ V_C = \frac{Q}{C} \\ i_1 = i_2 + i_C \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_o = V_C + R_1 i_1 \\ V_C = R_2 i_2 \\ \frac{dV_C}{dt} = \frac{i_C}{C} \\ i_1 = i_2 + i_C \end{array} \right.$$

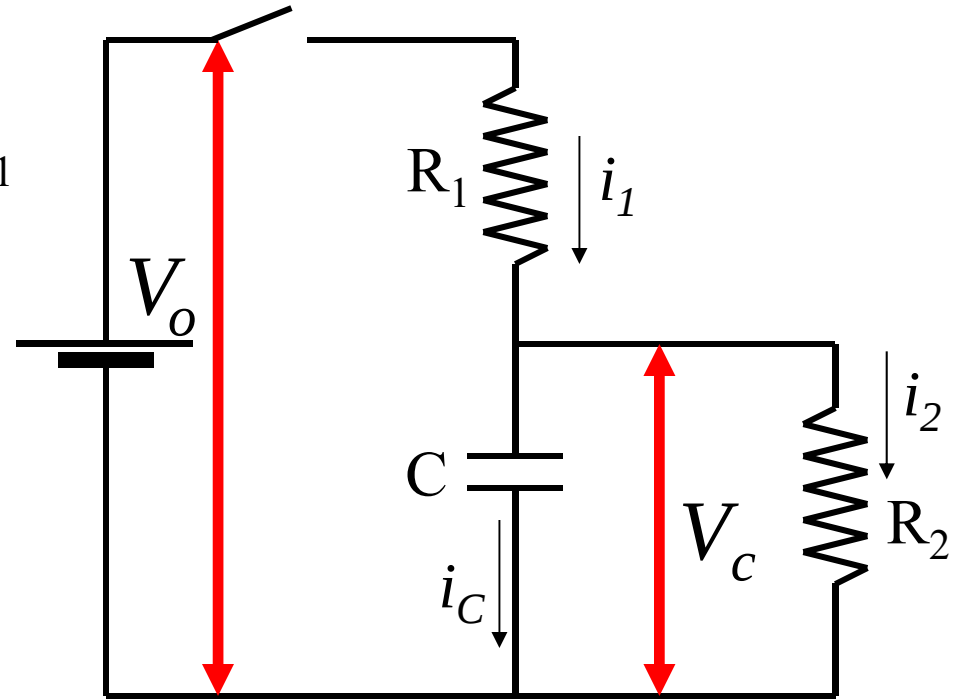


$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{i_1 - i_2}{C} = \frac{1}{C} \frac{V_o - V_C}{R_1} - \frac{1}{C} \frac{V_C}{R_2}$$

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_C = \frac{V_o}{CR_1} \rightarrow \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{CR_P} V_C = \frac{V_o}{CR_1}$$

Carica di un condensatore

$$\left\{ \begin{array}{l} V_o = V_C + R_1 i_1 \\ V_C = R_2 i_2 \\ V_C = \frac{Q}{C} \\ i_1 = i_2 + i_C \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_o = V_C + R_1 i_1 \\ V_C = R_2 i_2 \\ \frac{dV_C}{dt} = \frac{i_C}{C} \\ i_1 = i_2 + i_C \end{array} \right.$$

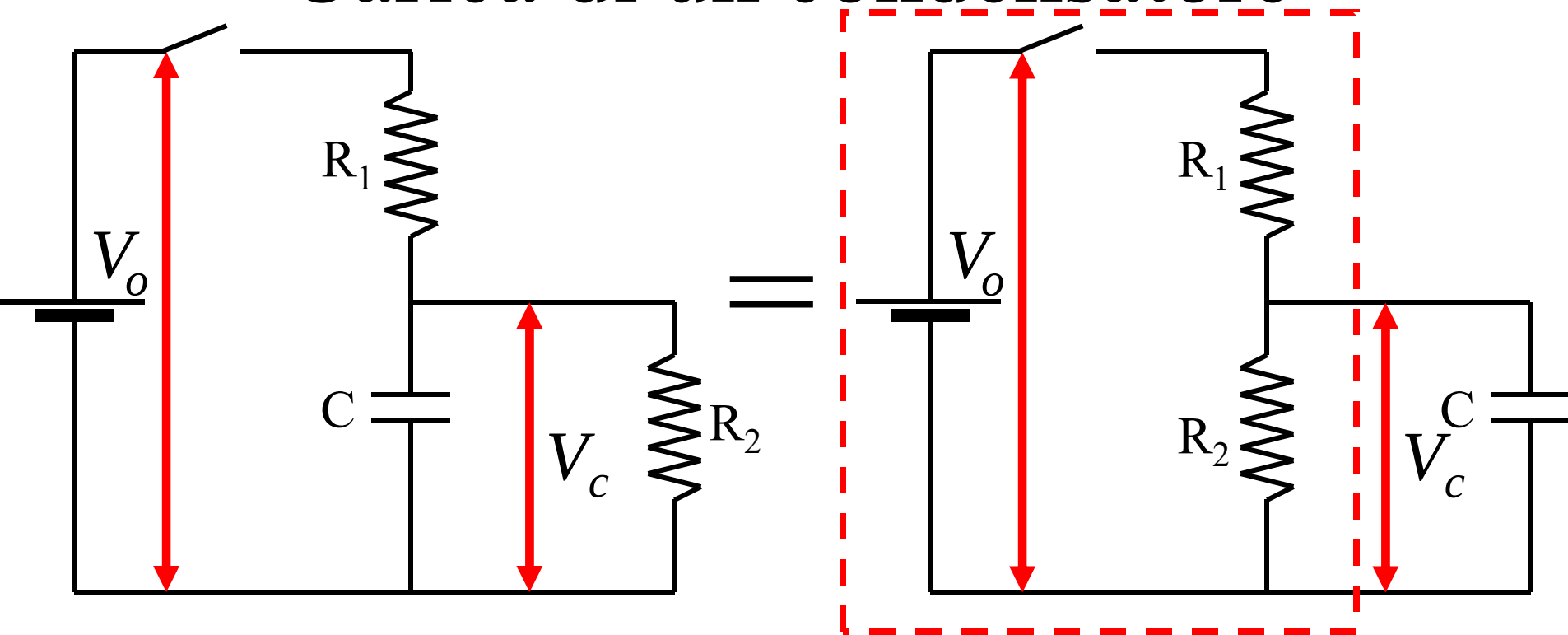


$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{i_1 - i_2}{C} = \frac{1}{C} \frac{V_o - V_C}{R_1} - \frac{1}{C} \frac{V_C}{R_2}$$

Ma c'è un metodo molto più semplice !

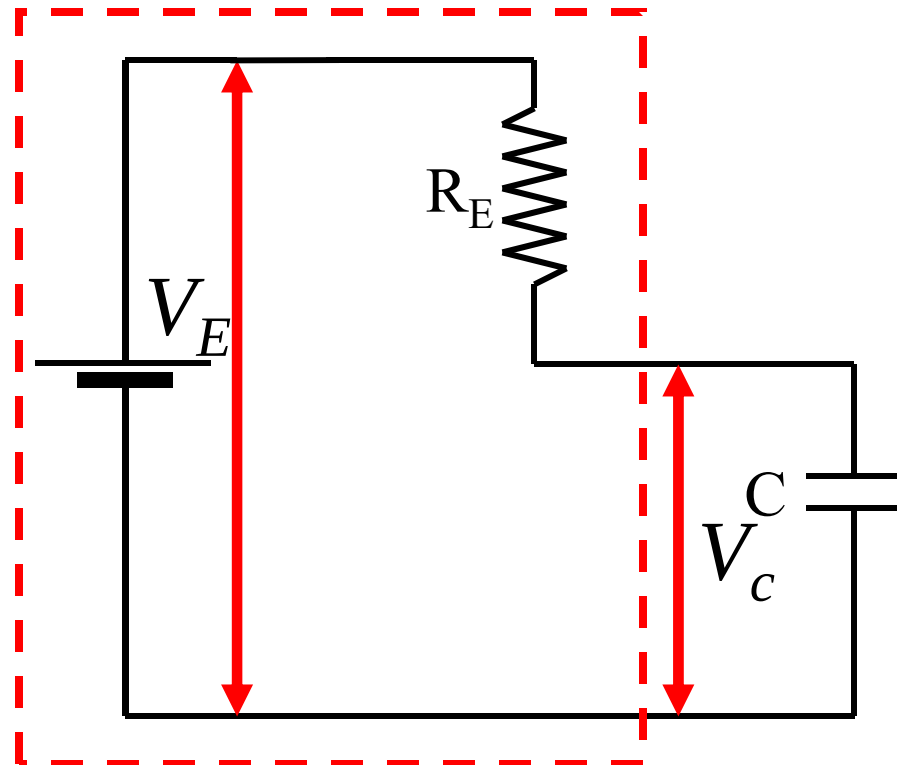
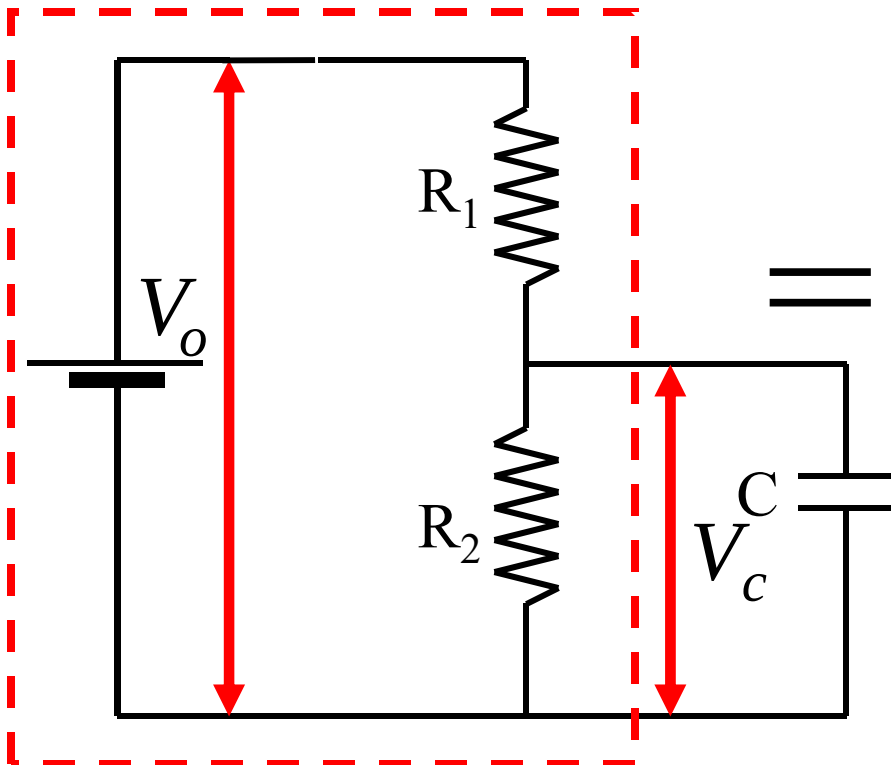
$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_C = \frac{V_o}{CR_1} \rightarrow \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{CR_P} V_C = \frac{V_o}{CR_1}$$

Carica di un condensatore



Per il Teorema di Thevenin, il circuito riquadrato è equivalente ad un generatore ideale di tensione con in serie una resistenza.

Carica di un condensatore

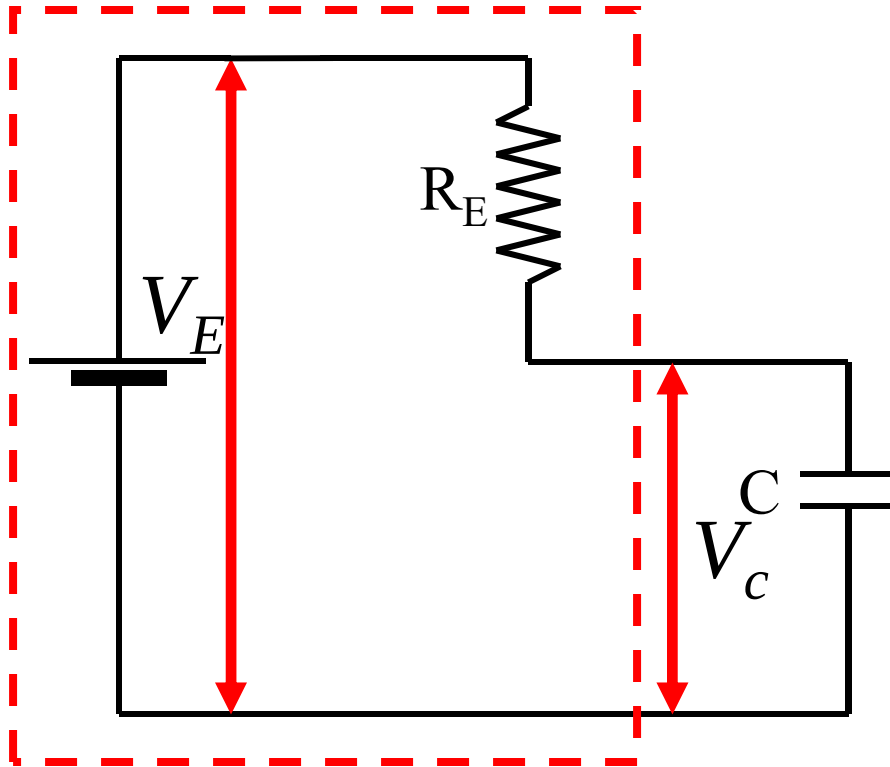


Per il Teorema di Thevenin, il circuito riquadrato è equivalente ad un generatore ideale di tensione con in serie una resistenza con:

$$R_E = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_E = V_o \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Carica di un condensatore



$$R_E = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_E = V_o \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Ma ora il circuito è proprio uguale al circuito ideale della carica di un condensatore, del quale abbiamo già la soluzione:

$$V_C(t) = V_E (1 - e^{-t/\tau})$$

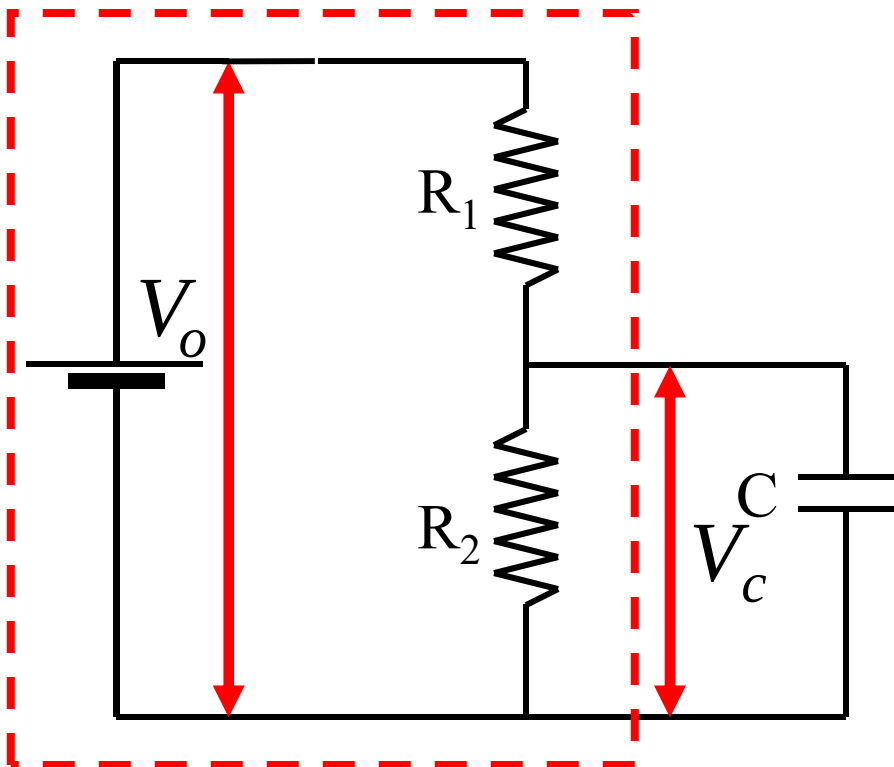
$$\tau = R_E C$$



$$V_C(t) = V_o \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau})$$

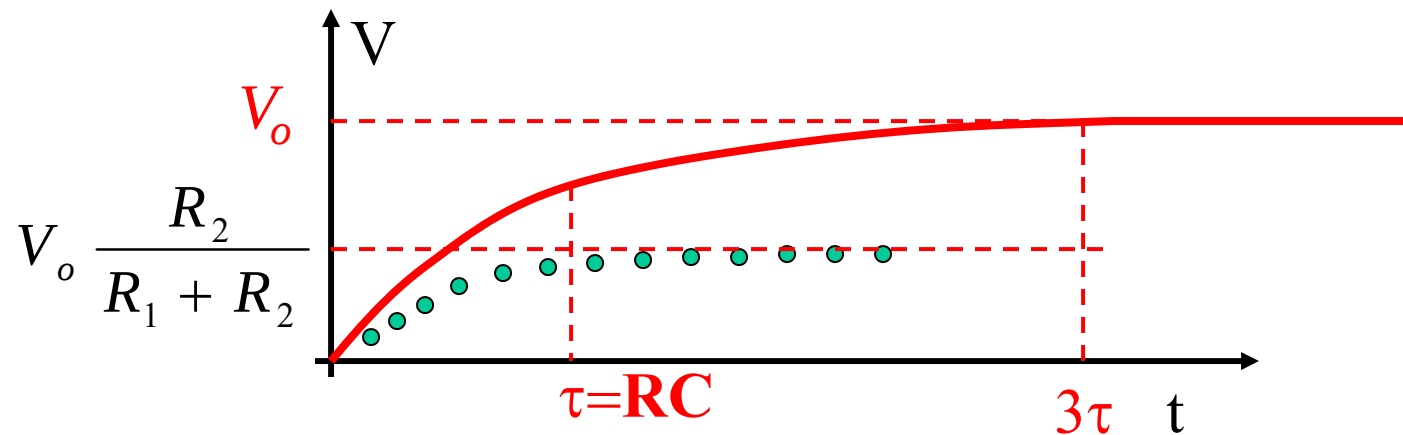
$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

Carica di un condensatore



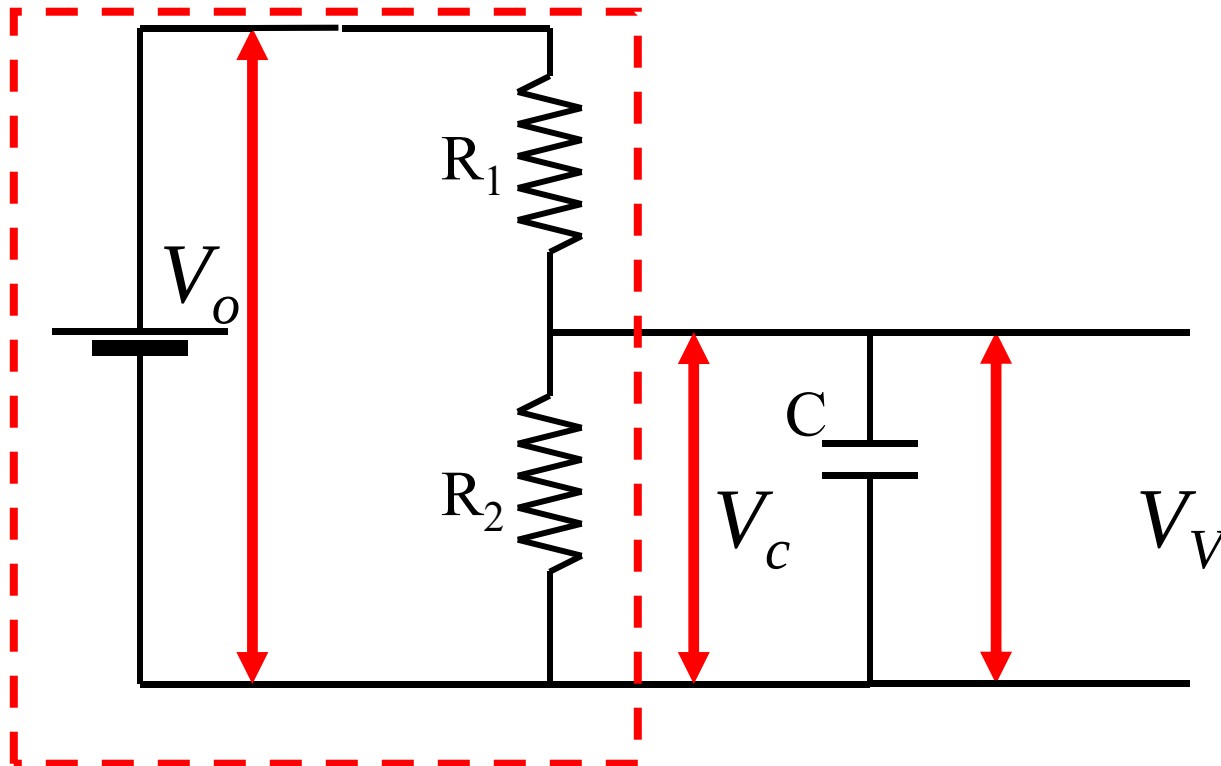
$$V_c(t) = V_o \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau})$$

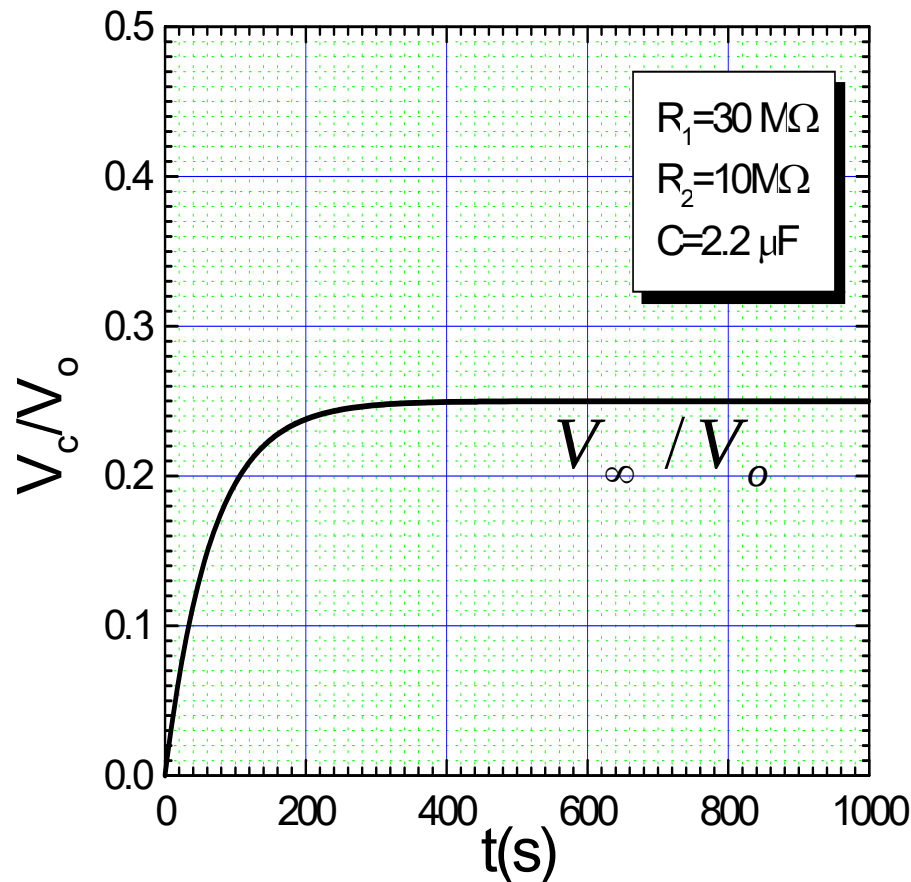
$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$



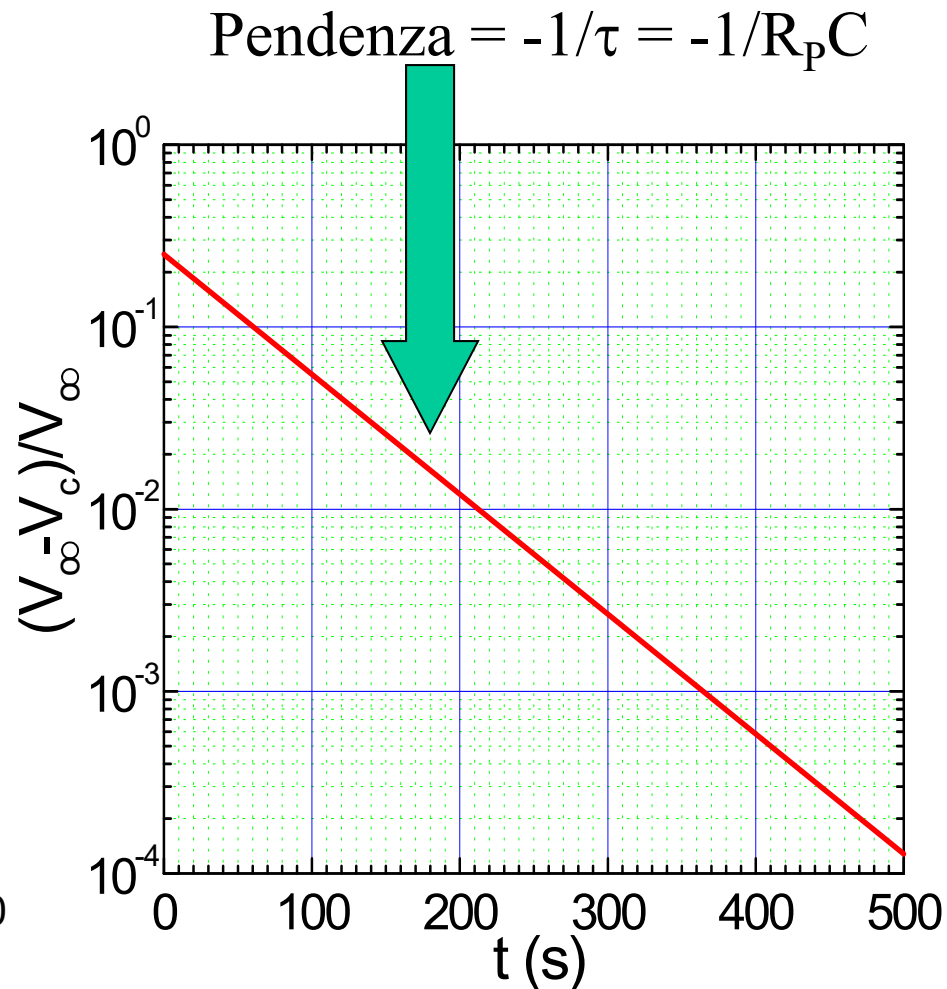
Terza parte esercitazione 1 : carica condensatore (circuito RC con lunga costante di tempo)

- Montare il circuito sulla basetta, misurare V_V in funzione del tempo.
- Siccome con i valori suggeriti ($33\text{M}\Omega$ e $2.2\mu\text{F}$) il processo è lento, si possono misurare le tensioni con il voltmetro digitale a intervalli di tempo regolari scanditi da un cronometro. Potete anche filmare con il telefonino le letture di cronometro e voltmetro.
- Ricordare che R_2 è la resistenza interna del voltmetro, e che V_o è la tensione del generatore da misurare con il multimetro.





Da questo grafico si ricava il valore asintotico $\frac{V_\infty}{V_o} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ e quindi R_2 .



Allora si può graficare in scala semilog $(V_\infty - V_c) / V_\infty$. Dalla pendenza si ricava τ e quindi di nuovo R_2 .