

Legge di Ohm generalizzata per il condensatore

- Abbiamo visto che la corrente che scorre in un condensatore a cui si applica una differenza di potenziale *sinusoidale* è

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_c}{dt} = C \frac{d}{dt}(V_{oc} e^{j(\omega t + \varphi)}) = CV_{oc} j\omega e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$i_c = i = (j\omega C)V_c \rightarrow V_c = \frac{1}{j\omega C} i_c$$

- Dal punto di vista formale la formula appena trovata è simile alla legge di Ohm, basta pensare ad una «impedenza» del condensatore (analoga della resistenza per il resistore, ma complessa) definita come

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

- In tal caso si può scrivere la legge di Ohm generalizzata per il condensatore:

$$\vec{V}_C = \vec{Z}_C \vec{I}_C$$

Legge di Ohm generalizzata per l'induttore

- Un ragionamento analogo si può fare per l'induttore. Dalla legge di Lenz per un induttore ideale:

$$V_L = L \frac{dI_L}{dt}$$

assumendolo attraversato da una corrente sinusoidale:

$$I_L = i_0 e^{j\omega t} \Rightarrow V_L = L \frac{dI_L}{dt} = Li_0 j\omega e^{j\omega t} = j\omega L I_L$$

- Quindi, definendo l'impedenza dell'induttore come:

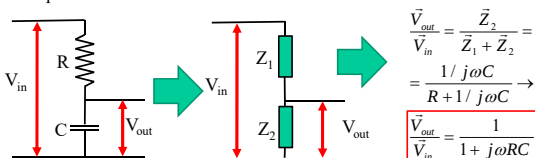
$$Z_L = j\omega L$$

si ottiene la legge di Ohm generalizzata per l'induttore:

$$\vec{V}_L = \vec{Z}_L \vec{I}_L$$

Legge di Ohm generalizzata

- Quindi, per circuiti attraversati da correnti *sinusoidali*, e contenenti *solo* resistori, condensatori e induttori, varrà la legge di Ohm generalizzata, e quindi si potranno utilizzare gli stessi metodi (maglie, nodi etc.) utilizzati per i circuiti con i resistori, usando le impedenze al posto delle resistenze.
- Ad esempio il circuito RC può essere considerato un partitore di tensione realizzato con due impedenze, l'impedenza del resistore e quella del condensatore:



Circuito RC in regime sinusoidale

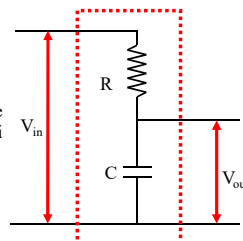
- Se consideriamo il circuito RC come un blocco con un ingresso ed una uscita (vedi figura), vogliamo studiare V_{out} (segnale in uscita) al variare di V_{in} (segnale in ingresso, sinusoidale).

- Per la linearità dei componenti utilizzati, se V_{in} è sinusoidale, V_{out} è anch'esso sinusoidale, con la stessa frequenza ma con diverse ampiezza e fase, che si trovano con il metodo dei fasori:

$$\vec{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oc} = \frac{V_{oin}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad \varphi = \arctan(-\omega\tau)$$

- Data la risposta diversa alle diverse frequenze, questo blocco circuitale viene anche chiamato filtro, ed in particolare filtro passa-basso, perché trasmette in uscita le frequenze basse pressoché inalterate, mentre attenua le frequenze alte.



Circuito CR in regime sinusoidale

- In questo caso, riapplicando la formula del partitore abbiamo

$$\frac{\vec{V}_{out}}{\vec{V}_{in}} = \frac{\vec{Z}_2}{\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2} = \frac{R}{R + 1/j\omega C}$$

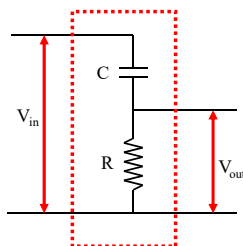
- Da cui

$$\vec{V}_R = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

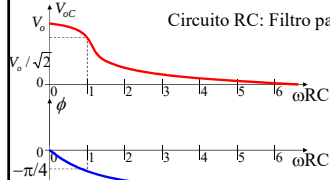
$$V_{oR} = \frac{\tau\omega V_{oin}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arctan(1/\omega\tau)$$

- Il circuito CR è un filtro passa alto.



Circuito RC: Filtro passa basso:

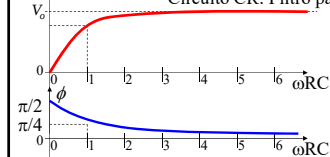


$$\vec{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oc} = \frac{V_{oin}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = \arctan(-\omega\tau)$$

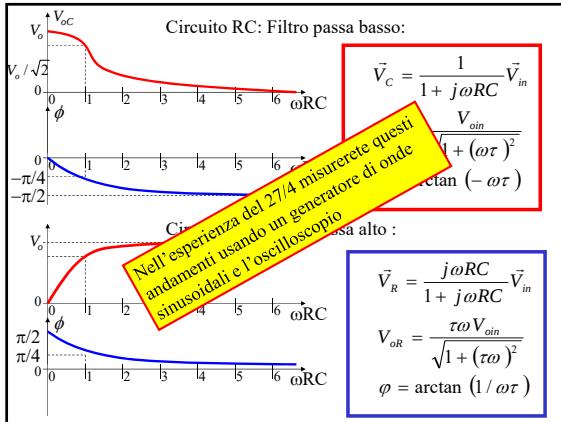
Circuito CR: Filtro passa alto:



$$\vec{V}_R = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oR} = \frac{\tau\omega V_{oin}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arctan(1/\omega\tau)$$



Filtri con induttori

- Si possono realizzare filtri passa-basso e passa alto anche con resistori e induttori, invece che con resistori e condensatori.
- Sempre considerando i partitori di impedenze si ottiene facilmente la funzione di trasferimento $[V_{out}/V_{in}]$ in funzione di ω , o di f :

$$\frac{\vec{V}_{out}}{\vec{V}_{in}} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega(L/R)}$$

Passa-basso con frequenza di taglio $f_o = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{R}{2\pi L}$

$$\frac{\vec{V}_{out}}{\vec{V}_{in}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega(L/R)}{1 + j\omega(L/R)}$$

Passa-alto con frequenza di taglio $f_o = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{R}{2\pi L}$

Circuiti integratori e derivatori

- Sono circuiti che producono all'uscita un segnale di tensione proporzionale all'integrale (o alla derivata) del segnale in ingresso.
- Che si possano costruire e' evidente dalle relazioni

$$V = \frac{1}{C} \int_0^t Idt; \quad V = L \frac{dI}{dt}$$

$$I = C \frac{dV}{dt}; \quad I = \frac{1}{L} \int_0^t Vdt$$

Circuiti integratori: RC

$V_{in} = V_C + V_R$ se $|V_C(t)| \ll |V_R(t)|$

$V_{in}(t) \approx V_R(t) = RI(t)$

$I(t) \approx \frac{1}{R} V_{in}(t)$

$V_{out}(t) = V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t \frac{1}{R} V_{in}(t') dt'$

$V_{out}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t V_{in}(t') dt'$

Circuiti integratori: LR

$V_{in} = V_L + V_R$ se $|V_R(t)| \ll |V_L(t)|$

$V_{in}(t) \approx V_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$

$L di(t) \approx V_{in}(t) dt$

$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t V_{in}(t') dt' + i(t_0)$

$V_{out}(t) = V_R(t) = Ri(t) = \frac{R}{L} \int_{t_0}^t V_{in}(t') dt' + Ri(t_0)$

$V_{out}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t V_{in}(t') dt' + Ri(t_0)$

Circuiti derivatori: CR

$V_{in} = V_C + V_R$ se $|V_R(t)| \ll |V_C(t)|$

$V_{in}(t) \approx V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt'$

$\frac{d}{dt} V_{in}(t) \approx \frac{d}{dt} V_C(t) = \frac{1}{C} i(t)$

$V_{out}(t) = Ri(t) = RC \frac{d}{dt} V_{in}(t) = \tau \frac{d}{dt} V_{in}(t)$

Circuiti derivatori RL

$$V_{in} = V_L + V_R$$

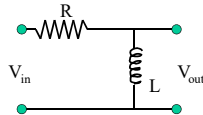
$$|V_L(t)| \ll |V_R(t)|$$

$$V_{in}(t) \approx V_R(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} V_{in}(t)$$

$$V_{out}(t) = L \frac{d}{dt} i(t) = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} V_{in}(t)$$

$$V_{out}(t) = \tau \frac{d}{dt} V_{in}(t)$$

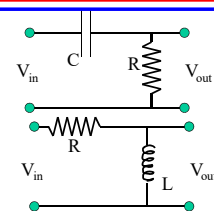
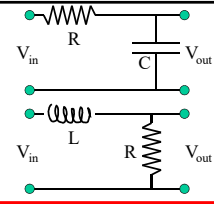


Circuiti integratori e derivatori

- Abbiamo quindi delle "approssimazioni" di circuiti integratori e derivatori.

- I filtri "passa basso" RC e LR forniscono gli **integratori**;

- I filtri "passa alto" CR e RL forniscono i **derivatori**.



- Possiamo quindi graficare, in **Regime sinusoidale** funzione della frequenza del segnale d'ingresso, l'ampiezza del segnale in uscita, ed il suo sfasamento:

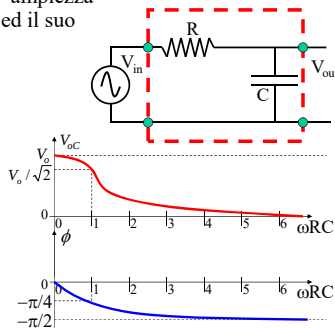
$$V_{in} = V_o e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$V_{out} = V_{oc} e^{j(\omega t + \phi)}$$

dove

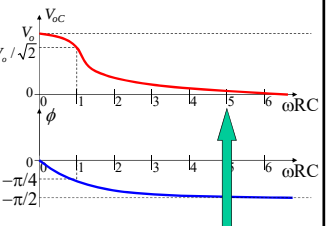
$$V_{oc} = \frac{V_o}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}$$

$$\phi = \arctan(-\omega\tau)$$



Circuiti integratori e derivatori

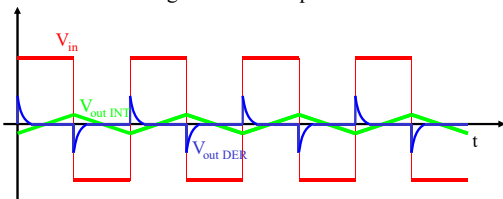
- Le approssimazioni sono tanto migliori quanto più il segnale in uscita è piccolo rispetto a quello in ingresso.
- Per i circuiti derivatori questa approssimazione è rispettata tanto meglio quanto più $f < f_o = 1/2\pi\tau$;
- Per i circuiti integratori questa approssimazione è rispettata tanto meglio quanto più $f > f_o = 1/2\pi\tau$;



A questa frequenza il passa basso è un buon integratore. Ma il segnale in uscita è ridotto di $1/\sqrt{2}$!

Risposta Impulsiva

- Supponiamo di applicare ad un circuito integratore o ad un derivatore un segnale ad onda quadra:

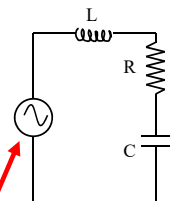


- Alla fine dell'esperienza del 27 Aprile potrete provare ad ottenere queste forme d'onda sperimentalmente. La difficoltà sta nel fatto che sono tanto più ideali (quindi simili alla derivata o all'integrale di V_{in}) quanto più la loro ampiezza è piccola.

Il circuito RLC serie

- Se si aggiunge un induttore al circuito RC si ottiene un circuito RLC serie.
- Sia L l'induttanza (coefficiente di autoinduzione) dell'induttore

- Proviamo a risolvere il circuito (cioè a trovare la corrente che lo attraversa) quando è eccitato da una sorgente sinusoidale. $V = V_o \cos(\omega t + \phi_v)$



Il circuito RLC serie

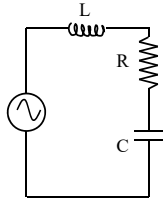
- Per la seconda legge di Kirchhoff:

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}$$

- Per l'induttanza abbiamo considerato la forza elettromotrice autoindotta $-LdI/dt$ e l'abbiamo spostata a secondo membro cambiandola di segno.

- Derivando rispetto a t:

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$



$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- E' una eq. differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. La soluzione è la somma dell' integrale generale dell' omogenea più un integrale particolare della disomogenea.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Omogenea associata}$$

- Fisicamente la soluzione dell' omogenea corrisponde al comportamento transitorio iniziale; a regime vale l' integrale particolare.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- La soluzione dell' **omogenea** è del tipo

$$I(t) = I_1 e^{k_1 t} + I_2 e^{k_2 t}$$

- Con I_1 e I_2 costanti da determinare dalle condizioni iniziali e k_1 e k_2 soluzioni dell' equazione caratteristica:

$$Lk^2 + Rk + \frac{1}{C} = 0$$

- quindi

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ponendo

Il circuito RLC serie

$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

si trova

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

la quantità b può essere reale, nulla o immaginaria

a seconda che sia

$$\begin{cases} \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} & \text{Caso 1, } b \text{ reale} \\ \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} & \text{Caso 2, } b \text{ nullo} \\ \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} & \text{Caso 3, } b \text{ immaginario} \end{cases}$$

Il circuito RLC serie

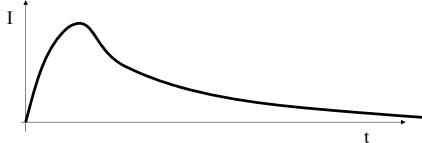
$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

e

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

se $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ gli esponenti sono ambedue negativi.

caso sovrasmorzato:



Imponendo le condizioni iniziali:

$$I(0) = 0 \Rightarrow$$

$$1) : 0 = I(0) = I(t) = I_1 e^{-(a-b)0} + I_2 e^{-(a+b)0} = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = -I_2$$

$$\text{e } q(0) = q_0 \Rightarrow$$

$$RI(0) + L \left. \frac{dI}{dt} \right|_0 + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L \left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = -\frac{q_0}{C}$$

si trova quindi, derivando la [1] e ponendo $t = 0$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = 2bI_1 \rightarrow \dots$$

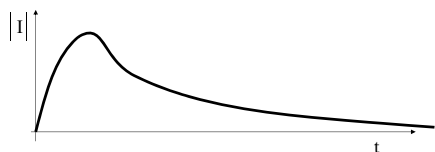
$$I_1 = -\frac{q_0}{2LCb}$$

e ponendo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ si arriva a

$$I(t) = -\frac{q_0 \omega_0^2}{2b} e^{-at} \{ e^{bt} - e^{-bt} \}$$

Quindi nel caso sovrasmorzato si ottiene il seguente andamento

$$I(t) = -\frac{q_0 \omega_0^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\}$$



Caso criticamente smorzato

$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

se $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ (caso criticamente smorzato) $b = 0$

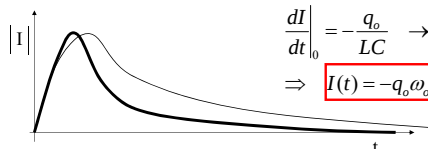
la soluzione e' del tipo $I(t) = (I_1 + I_2 t) e^{-at}$

Di nuovo, imponendo le condizioni iniziali si trovano I_1 e I_2

$$I(0) = 0 \rightarrow I_1 = 0$$

$$\frac{dI}{dt}\bigg|_0 = -\frac{q_0}{LC} \rightarrow I_2 = -\frac{q_0}{LC}$$

$$\Rightarrow I(t) = -q_0 \omega_0^2 t e^{-at}$$



$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Il circuito RLC serie

e

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

se $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ la soluzione e'

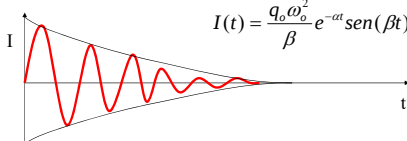
$$I(t) = I_1 e^{-(a-j\beta)t} + I_2 e^{-(a+j\beta)t}$$

caso oscillatorio smorzato :

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

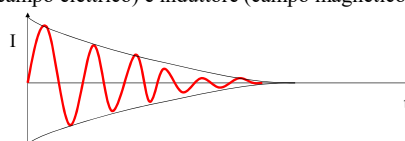
$$I(t) = -j \frac{q_0 \omega_0^2}{2\beta} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) e^{-\alpha t}$$

$$I(t) = \frac{q_0 \omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$$



Il circuito RLC serie

- L' ampiezza delle oscillazioni diminuisce perchè l' energia inizialmente disponibile come campo elettrico nel condensatore viene via via dissipata per effetto Joule nella resistenza.
- Le oscillazioni dipendono dal fatto che l' energia viene rimbalzata continuamente tra condensatore (campo elettrico) e induttore (campo magnetico)



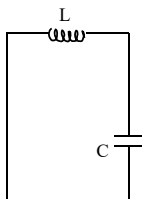
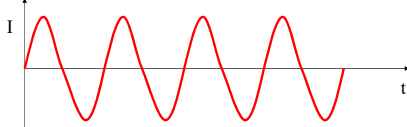
Il circuito RLC serie

- Consideriamo il caso oscillatorio smorzato.
- Se R fosse nulla avremmo $\alpha = R/2L = 0$ e quindi

$$I(t) = \frac{q_0 \omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \Rightarrow$$

$$I(t) = \frac{q_0 \omega_0^2}{\beta} \sin(\beta t)$$

- Le oscillazioni in tal caso non sarebbero smorzate



Il circuito RLC serie

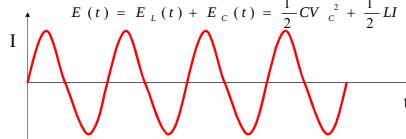
- In assenza di fenomeni dissipativi, e trascurando l' energia irradiata, l' energia immagazzinata nel circuito dovrebbe rimanere costante. Vediamo se è vero.

$$E = E(0) = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$$

$$E_c = \frac{1}{C} \int q dq = Q^2 / 2C = CV^2 / 2$$

$$E_L = \int w dt = \int IL dt = 1/2 LI^2$$

$$E(t) = E_L(t) + E_C(t) = \frac{1}{2} CV_c^2 + \frac{1}{2} LI_L^2 = E(0) ?$$



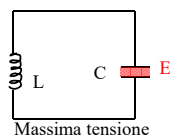
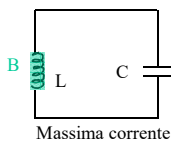
$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} \sin \beta t = I_o \sin \omega_o t$$

$$\cancel{RI} + L \frac{dI}{dt} + V_C = 0 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} = V_C \Rightarrow -LI_o \omega_o \cos \omega_o t = V_C$$

$$E_C = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} C L^2 I_o^2 \omega_o^2 \cos^2 \omega_o t = \frac{1}{2} L I_o^2 \cos^2 \omega_o t$$

$$E_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L I_o^2 \sin^2 \omega_o t$$

$$E_C + E_L = \frac{1}{2} L I_o^2 \quad \text{Costante !}$$



$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- Cosa succede a regime (se V è sinusoidale) ?
- Si cerca un integrale particolare:

$$V = V_o e^{j(\omega t + \varphi_V)}$$

$$I = I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

$$j\omega V_o e^{j(\omega t + \varphi_V)} = \left[-\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C} \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

A questa equazione si poteva arrivare subito dalla legge di Ohm generalizzata.

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

ponendo

$$\varphi = (\varphi_V - \varphi_I)$$

$$Z = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

si ottiene

$$V_o e^{j\varphi} = Z I_o \Rightarrow \begin{cases} I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \varphi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{cases}$$

$$V_o e^{j\varphi} = Z I_o \Rightarrow \begin{cases} I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \varphi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{cases}$$

se $\omega = \omega_o = 1/\sqrt{LC}$ l'impedenza diventa reale (e pari a R) e lo sfasamento va a 0. condizione di risonanza.

si definisce il fattore di qualità del circuito

$$Q_o = \omega_o L / R = 1 / R \sqrt{L / C} \quad \text{e si può riscrivere :}$$

$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow I_o = \frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

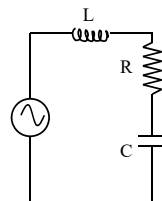
Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

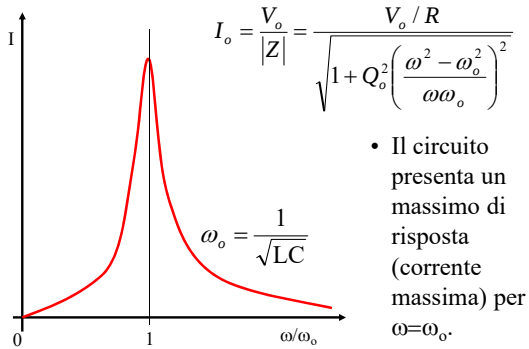
$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} =$$

$$\frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

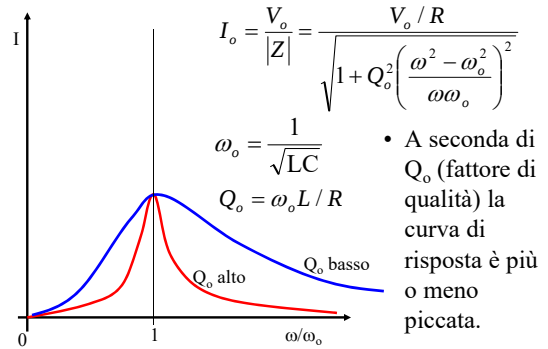
dove $Q_o = \omega_o L / R$ è il fattore di qualità



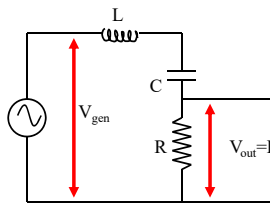
Il circuito RLC serie



Il circuito RLC serie

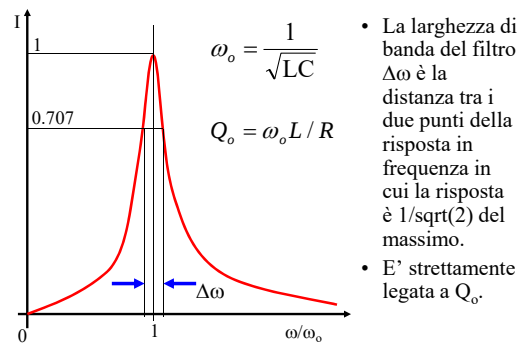


Il circuito RLC serie



- In questa configurazione il circuito agisce come un filtro **passa banda**.
- Solo le frequenze intorno ad ω_0 producono un segnale in uscita.
- Il filtro è tanto più selettivo quanto più alto è Q_0 .
- Viene utilizzato ad es. per sintonizzare una radio su una frequenza ben precisa, eliminando le altre.

Il circuito RLC serie



Il circuito RLC serie

$$\frac{I_0}{V_{gen} / R} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \right)^2}}$$

vale $1/\sqrt{2}$ quando

$$Q_0^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \right)^2 = 1$$

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} = \pm \frac{1}{Q_0} \Rightarrow \omega^2 \mp \frac{\omega \omega_0}{Q_0} - \omega_0^2 = 0$$

Il circuito RLC serie

$$Q_0 \omega^2 \mp \omega \omega_0 - Q_0 \omega_0^2 = 0$$

la soluzione è

$$\omega = \mp \omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + 4Q_0^2 \omega_0^2} / 2Q_0$$

e le due soluzioni positive sono

$$\omega_{1,2}^+ = \frac{\mp \omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + 4Q_0^2 \omega_0^2}}{2Q_0}$$

da cui

$$\Delta\omega = \omega_2^+ - \omega_1^+ = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

La larghezza di banda è inversamente proporzionale al fattore di qualità Q_0 . Il filtro è tanto più selettivo quanto più alto è Q_0 .

Il circuito RLC serie

- La resistenza minima del circuito è quella dell'avvolgimento con cui si realizza l' induttanza.
- Con induttanze commerciali di ottima qualità si ottengono fattori di qualità dell' ordine di 100, e quindi bande passanti dell' ordine di 1/100 della frequenza centrale.
- Solo usando superconduttori si possono ottenere $Q \gg 100$.

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

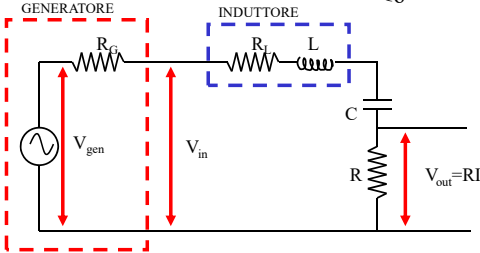
$$\Delta\omega = \omega_2^+ - \omega_1^- = \frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} = \frac{f_o}{\Delta f}$$

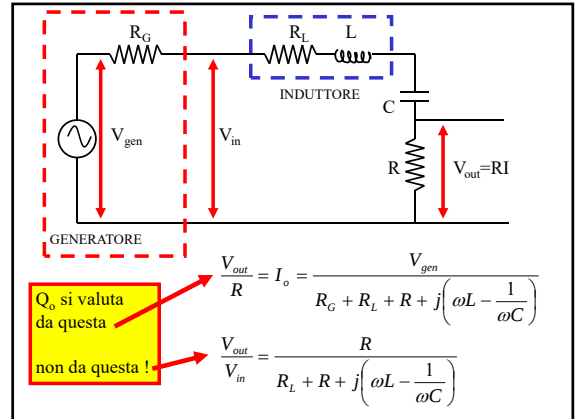
Nota: Misura di Q_o

- Il Q_o che abbiamo definito si riferisce all' espressione della **corrente** nel circuito.
- La R che compare nell' espressione di Q_o è la resistenza totale del circuito, somma di
 - Resistenza interna del generatore
 - Resistenza interna dell' induttore
 - Resistenza reale
- La corrente che scorre nel circuito può essere valutata misurando V ai capi della resistenza reale e dividendo per il valore della resistenza reale.
- Da una curva di I in funzione della frequenza si valuta $Q_o = f_o / \Delta f$

Nota: Misura di Q_o



- In un circuito reale solo V_{in} e V_{out} sono misurabili, V_{gen} non lo è (almeno non direttamente).



Nota2: se si vuole misurare R_L

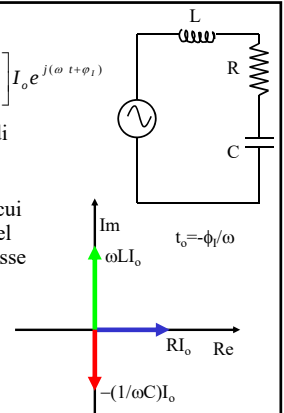
- Dalle misure di I si valuta $Q_o = f_o / \Delta f$ e da questo la somma di $R_L + R_G + R$, da cui per sottrazione R_L (sapendo le altre due)
- Oppure, meglio
- Dalle misure di V_{out}/V_{in} alla risonanza:

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{RIS} = \frac{R}{R + R_L} \Rightarrow R_L = R \left[\left. \frac{V_{in}}{V_{out}} \right|_{RIS} - 1 \right]$$

Lo sfasamento

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] I_o e^{j(\omega t + \phi_f)}$$

- Vediamo le tensioni ai capi di ciascun componente:
- I tre termini nell' equazione sopra sono delle tensioni, la cui parte reale e' la proiezione del fasore rappresentativo sull' asse reale del piano complesso.
- I tre vettori sono lunghi rispettivamente
 - $I_o R$, $I_o \omega L$, $I_o / \omega C$



Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- Vediamo le tensioni ai capi di ciascun componente:
- I tre termini nell'equazione sopra sono delle tensioni, la cui parte reale è la proiezione del fasore rappresentativo sull'asse reale del piano complesso.
- I tre vettori sono lunghi rispettivamente
- $I_o R$, $I_o \omega L$, $I_o / \omega C$
- Al passare del tempo ruotano mantenendo le stesse fasi relative

Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- La composizione dei vettori si può fare sommando prima i contributi di L e C:

Il circuito RLC serie

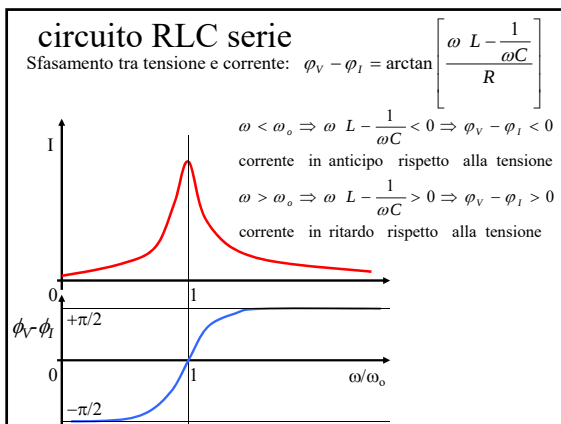
$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- E poi trovando la risultante, che deve essere proprio la tensione (complessa) del generatore.
- Se $\omega L > (1/\omega C)$, la corrente è in ritardo rispetto alla tensione del generatore

Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- E poi trovando la risultante, cioè la tensione (complessa) del generatore.
- Se $\omega L < (1/\omega C)$, la corrente è in anticipo rispetto alla tensione



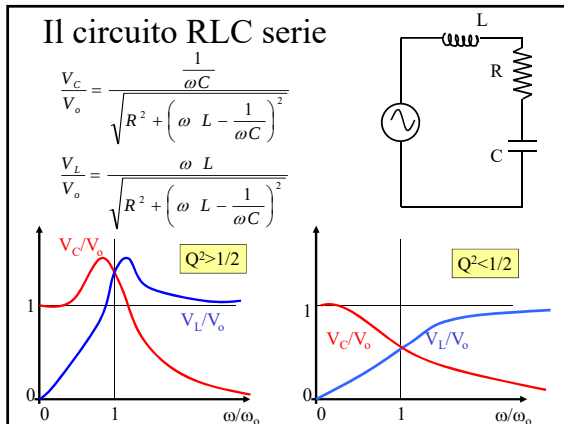
Extratensioni

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- Vediamo i moduli delle tensioni ai capi di ciascun componente **reattivo**:

$$\bar{V}_C = \bar{Z}_C \bar{I} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \bar{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad \frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\bar{V}_L = \bar{Z}_L \bar{I} = \frac{j\omega L \bar{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad \frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

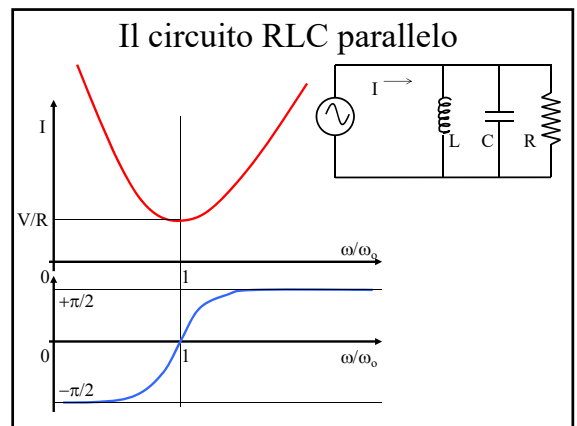
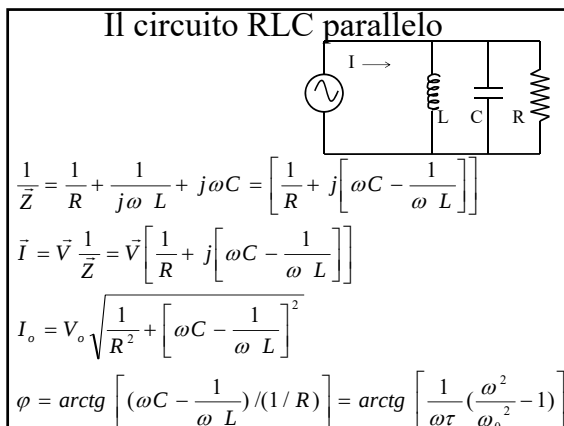
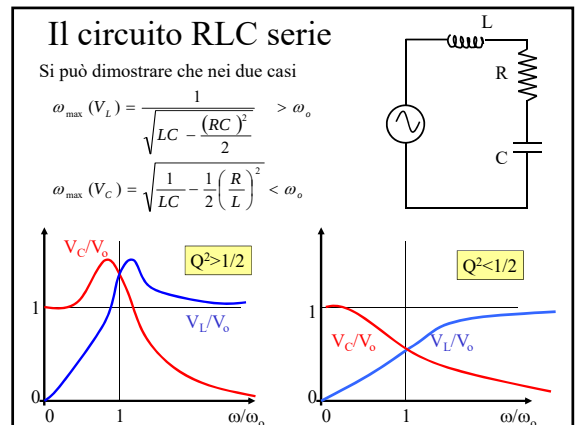
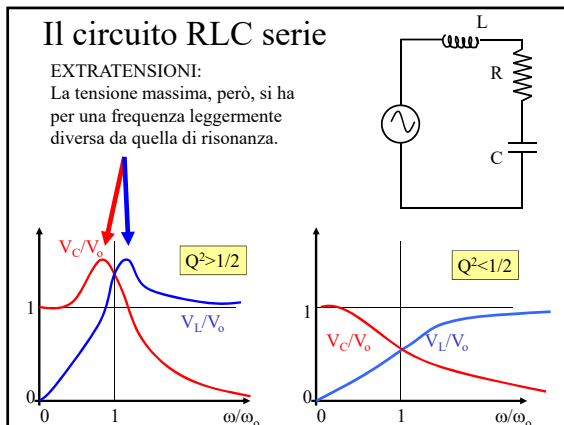


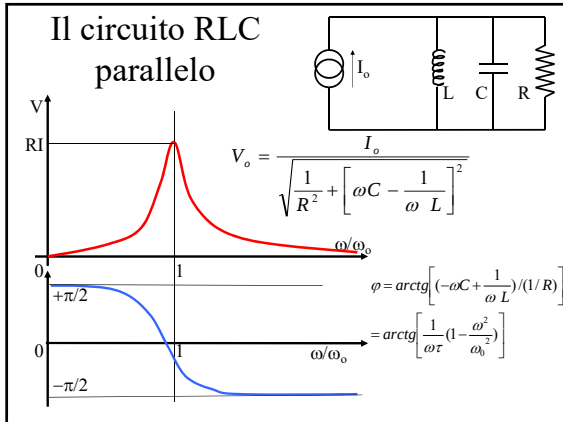
Extratensioni

- Notare che, alla risonanza :

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \rightarrow \frac{V_C}{V_o} = \frac{1}{R \omega_o C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \rightarrow \frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$
 cioè la tensione ai capi di C e L è maggiore di quella di ingresso, di un fattore pari a Q_o .
- Va anche notato che, seppure le due tensioni su L e su C siano grandi, hanno fase opposta, e quindi si elidono istante per istante, e non fanno scorrere alcuna corrente, né nel resistore né nel generatore.





Misure con il *pico*scope

- Ovvero: l'oscilloscopio digitale in azione
- Il *pico*scope è un oscilloscopio digitale completo di generatore di funzioni, che lavora in simbiosi con un PC (al quale sono demandate le funzioni di visualizzazione e impostazione delle misure)
- Permette di eseguire misure complesse in modo semplice.

Labels for the PicoScope device:

- Uscita del generatore di funzioni
- Ingresso per trigger esterno
- Due ingressi analogici (8 bit, 1Gs/s)

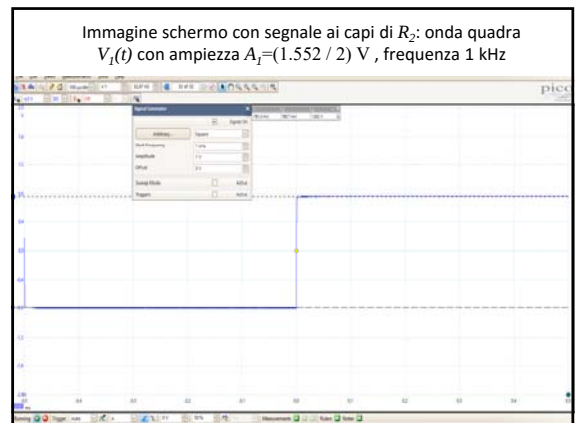
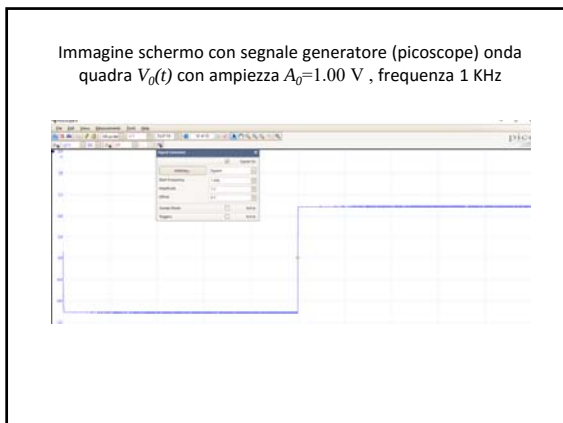
Uso del PicoScope per verificare il comportamento di circuiti RC, con onde quadre e sinusoidali in ingresso

- 1) Misura resistenza interna del generatore integrato nel *pico*scope
- 2) Circuito RC con onda quadra in ingresso: misura costante di tempo dalla salita e dalla discesa dell'onda in uscita
- 3) Circuito RC come integratore
- 4) Circuito RC con onda sinusoidale in ingresso: misura frequenza di taglio del circuito

1) Misura della resistenza interna del generatore di funzioni del *pico*scope

The diagram shows a circuit for measuring the internal resistance ρ of the PicoScope's function generator. The generator outputs a square wave $V_0(t)$ with amplitude A_0 and frequency $f = 1 \text{ kHz}$. This is connected in series with a load resistor R_2 and the internal resistance ρ . The voltage across R_2 is $V_1(t)$ with amplitude A_1 . The internal resistance ρ is determined by the ratio A_0/A_1 and the value of R_2 .

Si genera un segnale quadro $V_0(t)$ impostandone l'ampiezza a 1V e si legge il valore dell'ampiezza A_0 senza carico. Si inserisce poi una resistenza di carico R_2 e si misura $V_1(t)$ stimandone l'ampiezza A_1 . Dal rapporto tra A_0 e A_1 e dal valore di R_2 si ricava ρ con la formula del partitore.



Stima resistenza interna ρ dal confronto delle due misure (formula del partitore di tensione):

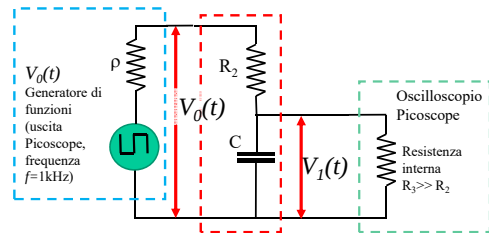
$$R_2 = 2.7k\Omega$$

$$A_0 = 1.000 V$$

$$A_1 = 0.776 V$$

$$\rho = R_2 \left(\frac{A_0 - A_1}{A_1} \right) \approx 430 \Omega$$

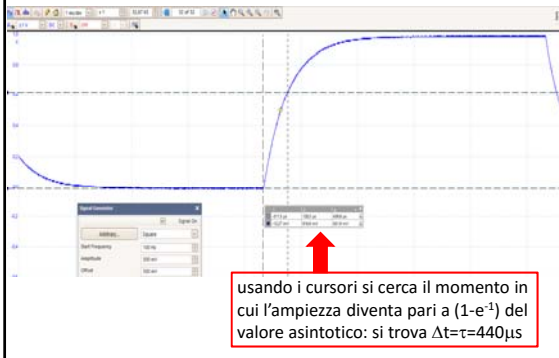
2) RC eccitato con onda quadra



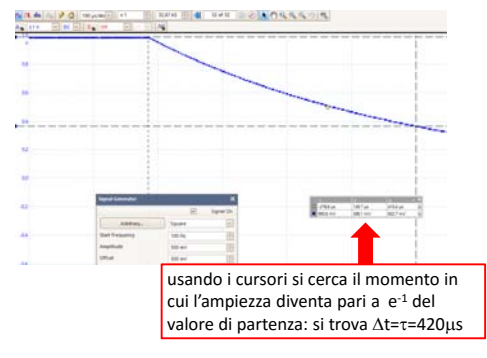
Si provano due circuiti che hanno nominalmente la stessa costante di tempo:

$R_2 = 2.7k\Omega$ e $C = 150nF$ oppure $R_2 = 27k\Omega$ e $C = 15nF$

Costante di tempo per circuito RC ($C = 150 nF$ $R = 2.7k\Omega$) da dati di salita



Costante di tempo per circuito RC ($C = 150 nF$ $R = 2.7k\Omega$) da dati di discesa



- Teoricamente la costante di tempo dovrebbe essere pari a $\tau = (\rho + R_2)C$
- Con i valori nominali dei componenti:

$$R_2 = 2.7k\Omega$$

$$\rho = 0.42k\Omega$$

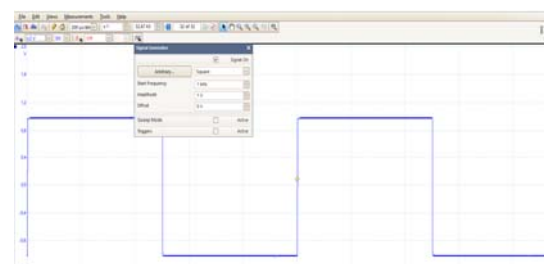
$$C = 150 \times 10^{-9} F$$

si dovrebbe avere:

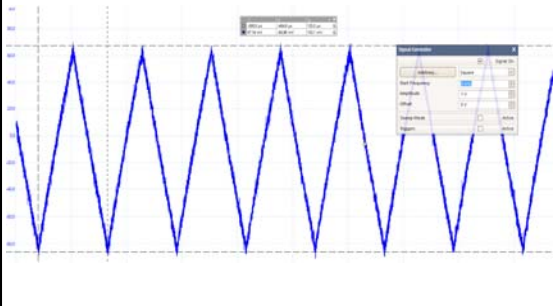
$$\tau = (\rho + R_2)C \approx 470\mu s$$

- in buon accordo con quanto misurato.
- Quindi la frequenza di taglio di questo RC è pari a $f = \frac{1}{2\pi\tau} = 340Hz$

3) Circuito RC come integratore: onda quadra in ingresso



Circuito RC come integratore:
segnale in uscita a frequenza $f=8\text{kHz}$ ($\gg f_{\text{taglio}}$)



4) Risposta in frequenza circuito RC con
segnale sinusoidale in ingresso.



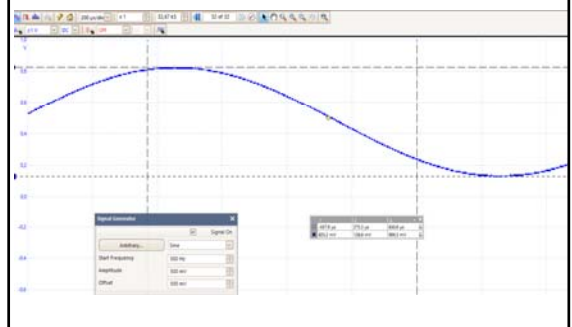
Si inizia con una frequenza (10Hz) $\ll$ di quella di taglio e si misura l'ampiezza.

Frequenza di taglio circuito RC, da
confrontare con quella ricavata dalla costante
di tempo misurata prima (circa 340 Hz)

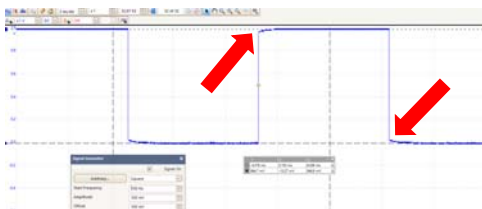


Si varia la frequenza finché l'ampiezza non diventa $1/\sqrt{2}$ di quella a basse frequenze

Altro RC ($C=15\text{ nF}$, $R=27\text{ k}\Omega$)

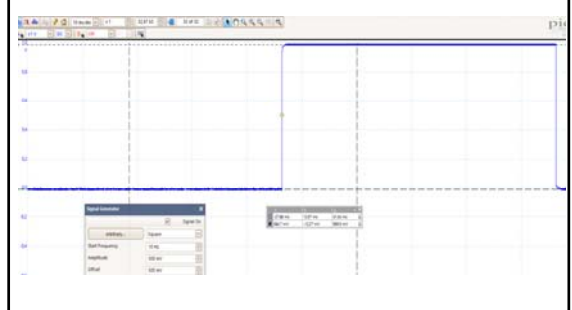


Dettagli dell' onda quadra in ingresso:

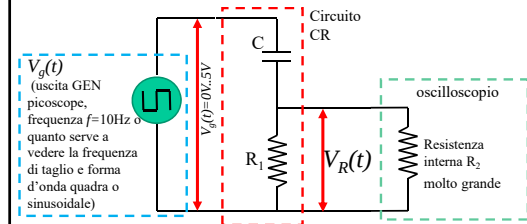
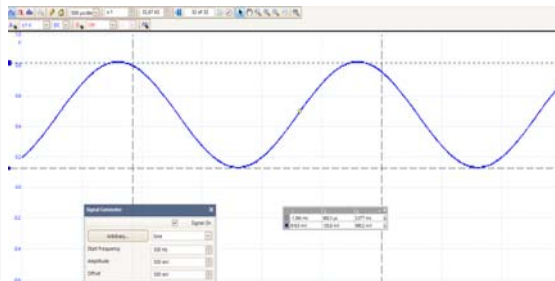


Quando il condensatore si carica (in un verso o nell'altro) il generatore, a causa della sua resistenza interna, fatica a mantenere l'ampiezza impostata per l'onda.

Stessa onda quadra in ingresso,
a 10 Hz



RC ($C=15\text{ nF}$, $R=27\text{K}\Omega$), circa 500 Hz



Nello stesso modo si studia il circuito passa alto (CR) invertendo la disposizione di R e C, e si visualizza la sua azione come derivatore a basse frequenze