

Legge di Ohm generalizzata per il condensatore

- Abbiamo visto che la corrente che scorre in un condensatore a cui si applica una differenza di potenziale *sinusoidale* è

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)}) = C V_{oC} j \omega e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$i_C = i = (j \omega C) V_C \rightarrow V_C = \frac{1}{j \omega C} i_C$$

- Dal punto di vista formale la formula appena trovata è simile alla legge di Ohm, basta pensare ad una «impedenza» del condensatore (analoga della resistenza per il resistore, ma complessa) definita come

$$Z_C = \frac{1}{j \omega C}$$

- In tal caso si può scrivere la legge di Ohm generalizzata per il condensatore:

$$\vec{V}_C = \vec{Z}_C \vec{i}_C$$

Legge di Ohm generalizzata per l'induttore

- Un ragionamento analogo si può fare per l' induttore.
Dalla legge di Lenz per un induttore ideale:

$$V_L = L \frac{dI_L}{dt}$$

assumendolo attraversato da una corrente sinusoidale:

$$I_L = i_o e^{j\omega t} \Rightarrow V_L = L \frac{dI_L}{dt} = Li_o j\omega e^{j\omega t} = j\omega L I_L$$

- Quindi, definendo l'impedenza dell'induttore come:

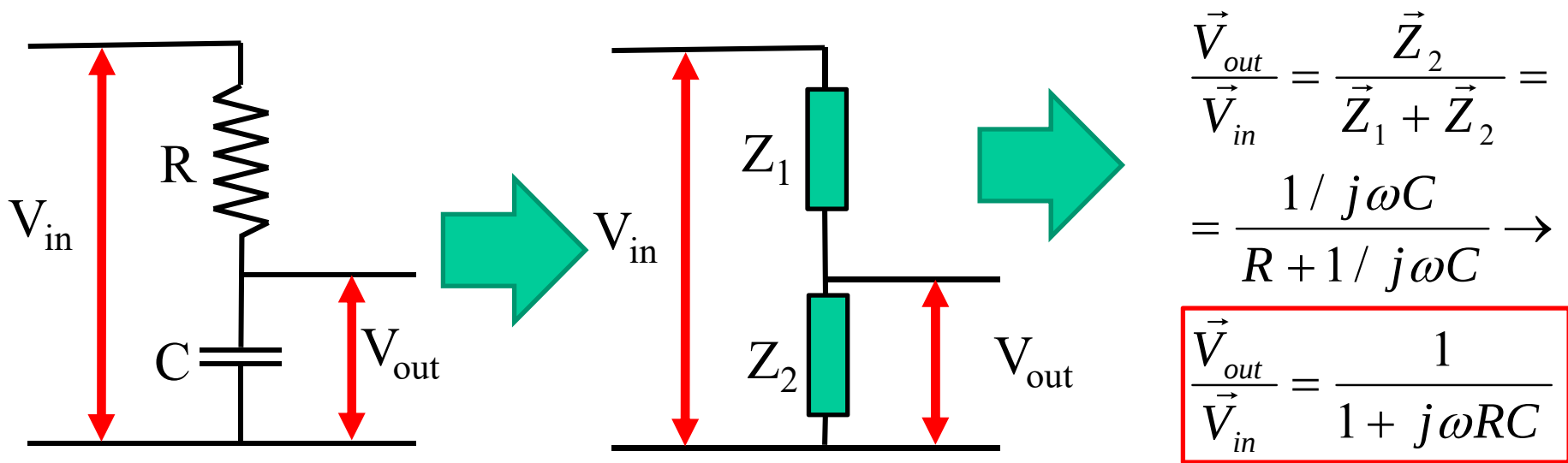
$$Z_L = j\omega L$$

si ottiene la legge di Ohm generalizzata per l'induttore:

$$\vec{V}_L = \vec{Z}_L \vec{I}_L$$

Legge di Ohm generalizzata

- Quindi, per circuiti attraversati da correnti *sinusoidali*, e contenenti *solo* resistori, condensatori e induttori, varrà la legge di Ohm generalizzata, e quindi si potranno utilizzare gli stessi metodi (maglie, nodi etc.) utilizzati per i circuiti con i resistori, usando le impedenze al posto delle resistenze.
- Ad esempio il circuito RC può essere considerato un partitore di tensione realizzato con due impedenze, l' impedenza del resistore e quella del condensatore:



- Se consideriamo il circuito RC come un blocco con un ingresso ed una uscita (vedi figura), vogliamo studiare V_{out} (segnale in uscita) al variare di V_{in} (segnale in ingresso, sinusoidale).

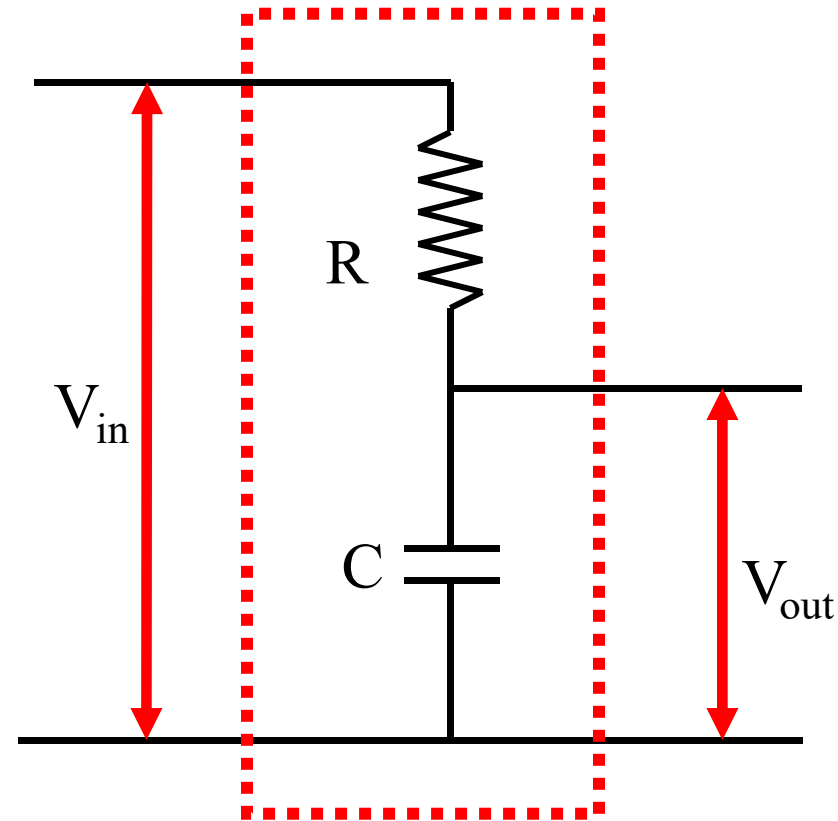
- Per la linearità dei componenti utilizzati, se V_{in} è sinusoidale, V_{out} è anch'esso sinusoidale, con la stessa frequenza ma con diverse ampiezza e fase, che si trovano con il metodo dei fasori:

$$\vec{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oc} = \frac{V_{oin}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad , \quad \varphi = \arctan(-\omega\tau)$$

- Data la risposta diversa alle diverse frequenze, questo blocco circuitale viene anche chiamato filtro, ed in particolare filtro passa-basso, perché trasmette in uscita le frequenze basse pressochè inalterate, mentre attenua le frequenze alte.

Circuito RC in regime sinusoidale



- In questo caso, riapplicando la formula del partitore abbiamo

$$\frac{\vec{V}_{out}}{\vec{V}_{in}} = \frac{\vec{Z}_2}{\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2} = \frac{R}{R + 1/j\omega C}$$

- Da cui

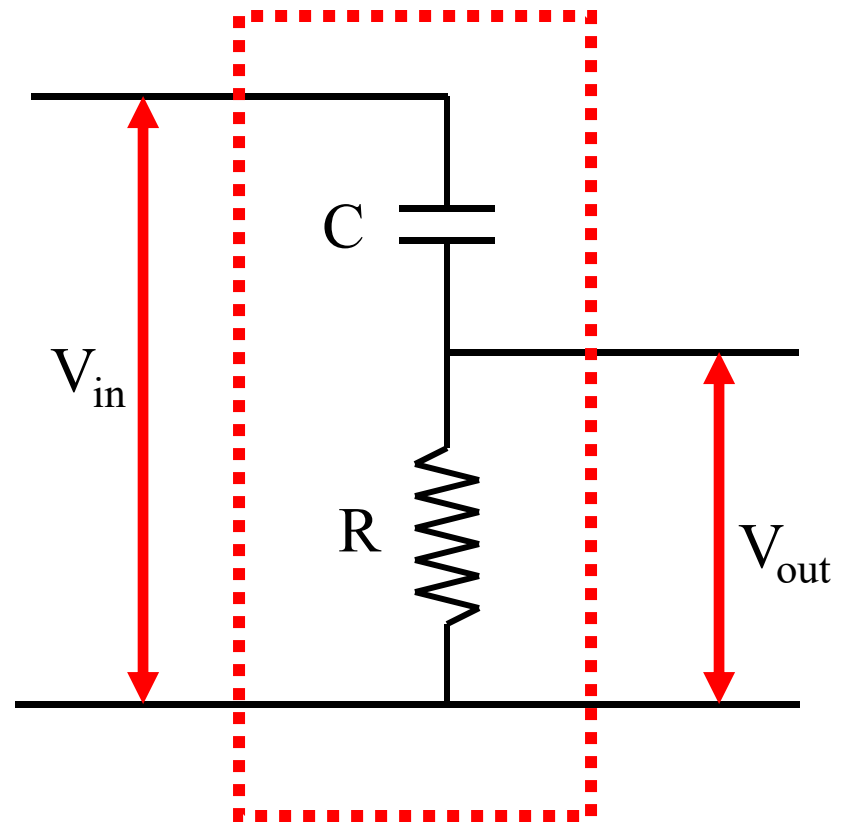
$$\vec{V}_R = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oR} = \frac{\tau\omega V_{oin}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

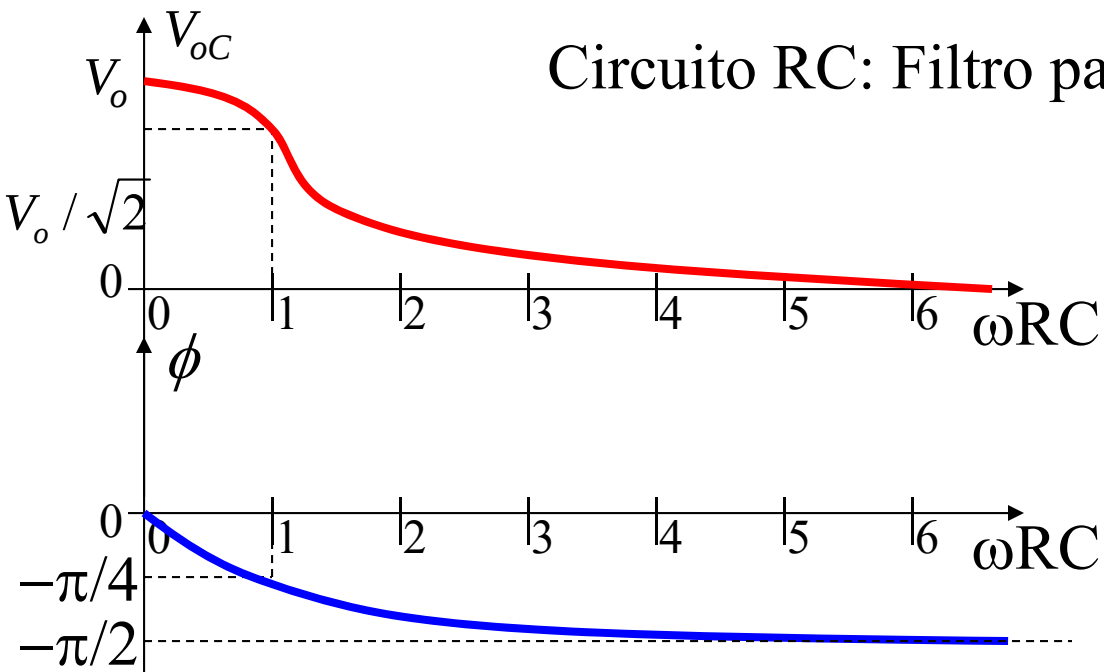
$$\varphi = \arctan(1/\omega\tau)$$

- Il circuito CR è un filtro passa alto.

Circuito CR in regime sinusoidale



Circuito RC: Filtro passa basso:

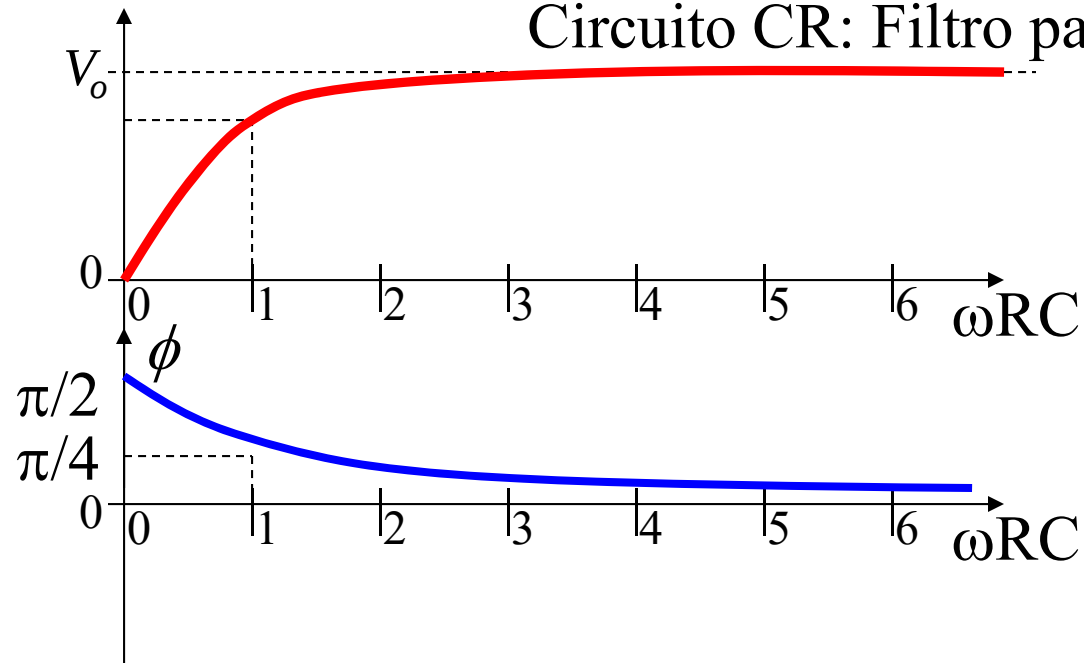


$$\vec{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oC} = \frac{V_{oin}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\phi = \arctan(-\omega\tau)$$

Circuito CR: Filtro passa alto :

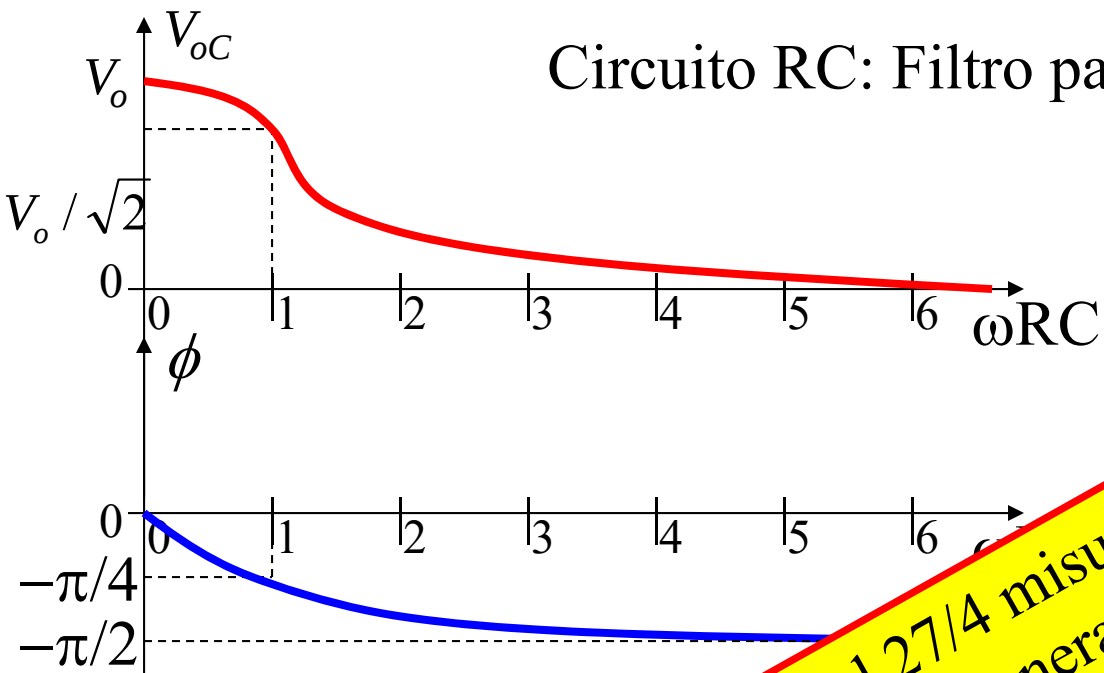


$$\vec{V}_R = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oR} = \frac{\tau\omega V_{oin}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\phi = \arctan(1 / \omega\tau)$$

Circuito RC: Filtro passa basso:



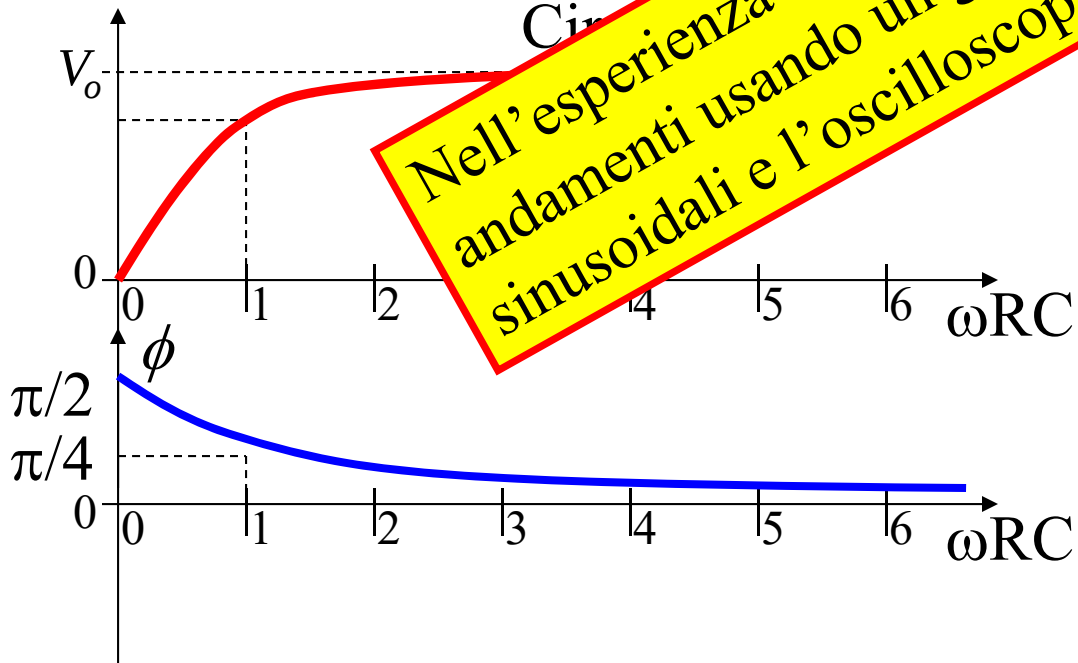
$$\vec{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oC} = \frac{V_{oin}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\phi = \arctan(-\omega\tau)$$

Nell'esperienza del 27/4 misurerete questi andamenti usando un generatore di onde sinusoidali e l'oscilloscopio

Circuito RC: Filtro passa alto:



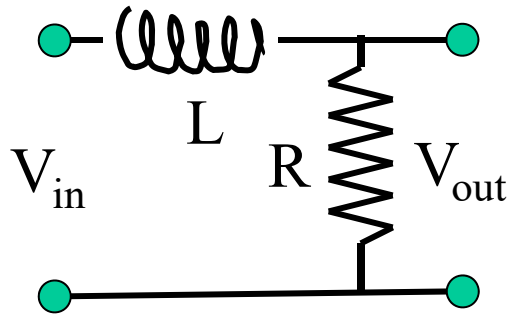
$$\vec{V}_R = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oR} = \frac{\tau\omega V_{oin}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\phi = \arctan(1 / \omega\tau)$$

Filtri con induttori

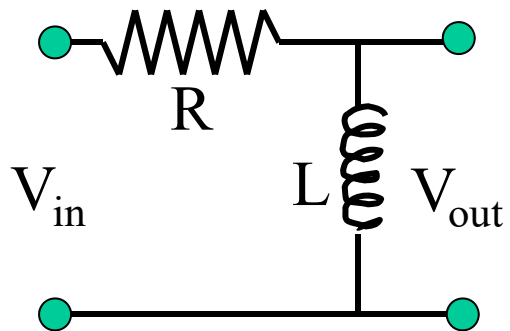
- Si possono realizzare filtri passa-basso e passa alto anche con resistori e induttori, invece che con resistori e condensatori.
- Sempre considerando i partitori di impedenze si ottiene facilmente la funzione di trasferimento $[V_{out}/V_{in}]$ in funzione di ω , o di f :



$$\frac{\vec{V}_{out}}{\vec{V}_{in}} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega(L/R)}$$

Passa-basso
con frequenza
di taglio

$$f_o = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{R}{2\pi L}$$



$$\frac{\vec{V}_{out}}{\vec{V}_{in}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega(L/R)}{1 + j\omega(L/R)}$$

Passa-alto con
frequenza di
taglio

$$f_o = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{R}{2\pi L}$$

Circuiti integratori e derivatori

- Sono circuiti che producono all' uscita un segnale di tensione proporzionale all' integrale (o alla derivata) del segnale in ingresso.
- Che si possano costruire e' evidente dalle relazioni

$$V = \frac{1}{C} \int_0^t I dt ; \quad V = L \frac{dI}{dt}$$

$$I = C \frac{dV}{dt} ; \quad I = \frac{1}{L} \int_0^t V dt$$

Circuiti integratori: RC

$$V_{in} = V_C + V_R \quad \text{se}$$

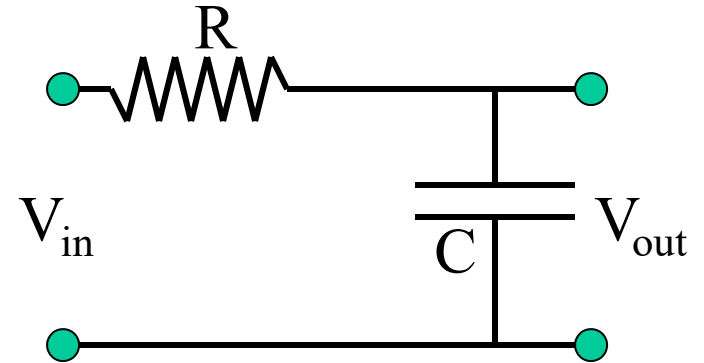
$$|V_C(t)| \ll |V_R(t)|$$

$$V_{in}(t) \approx V_R(t) = RI(t)$$

$$I(t) \cong \frac{1}{R} V_{in}(t)$$

$$V_{out}(t) = V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t \frac{1}{R} V_{in}(t') dt'$$

$$V_{out}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t V_{in}(t') dt'$$



Circuiti integratori:

$$V_{in} = V_L + V_R \quad \text{se}$$

$$|V_R(t)| \ll |V_L(t)|$$

$$V_{in}(t) \approx V_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

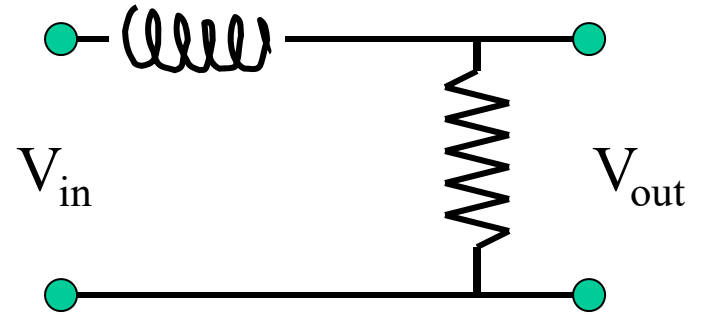
$$L di(t) \cong V_{in}(t) dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_o}^t V(t') dt' + i(t_o)$$

$$V_{out}(t) = V_R(t) = Ri(t) = \frac{R}{L} \int_{t_o}^t V(t') dt' + Ri(t_o)$$

$$V_{out}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_o}^t V(t') dt' + Ri(t_o)$$

LR



Circuiti derivatori: CR

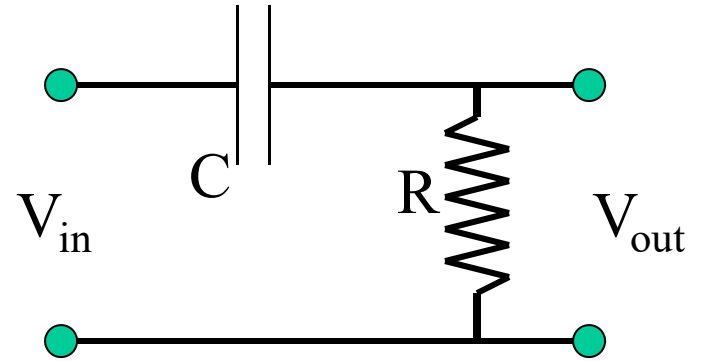
$$V_{in} = V_C + V_R$$

$$|V_R(t)| \ll |V_C(t)| \quad \text{se}$$

$$V_{in}(t) \approx V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt'$$

$$\frac{d}{dt} V_{in}(t) \approx \frac{d}{dt} V_C(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

$$V_{out}(t) = Ri(t) = RC \frac{d}{dt} V_{in}(t) = \tau \frac{d}{dt} V_{in}(t)$$



Circuiti derivatori

RL

$$V_{in} = V_L + V_R$$

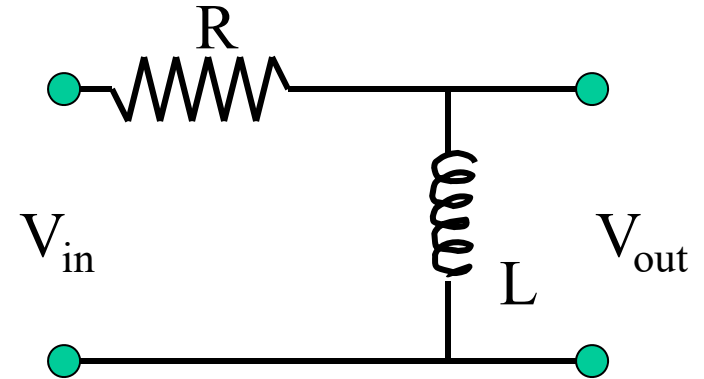
$$|V_L(t)| \ll |V_R(t)|$$

$$V_{in}(t) \approx V_R(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} V_{in}(t)$$

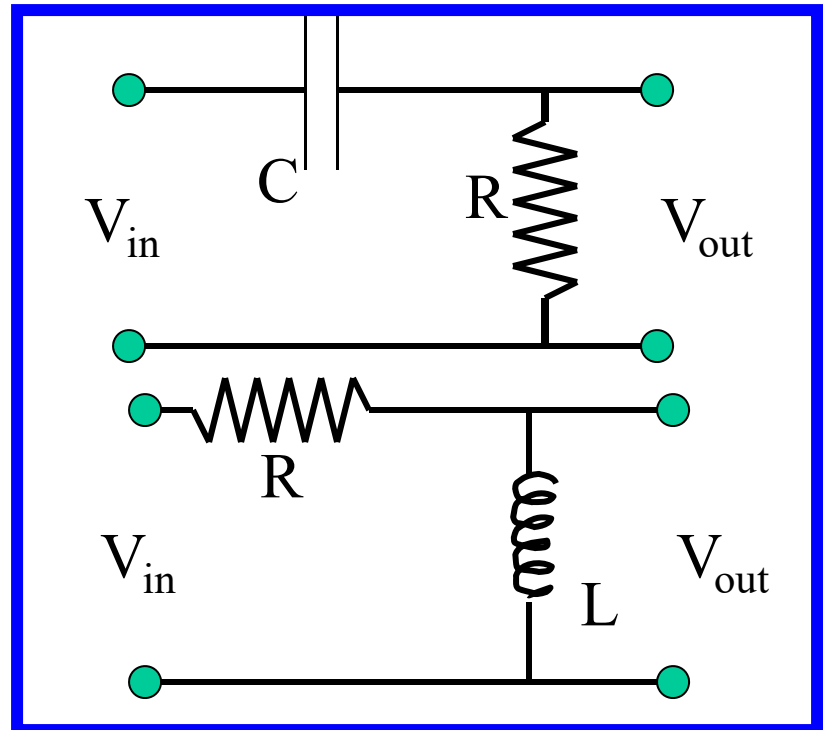
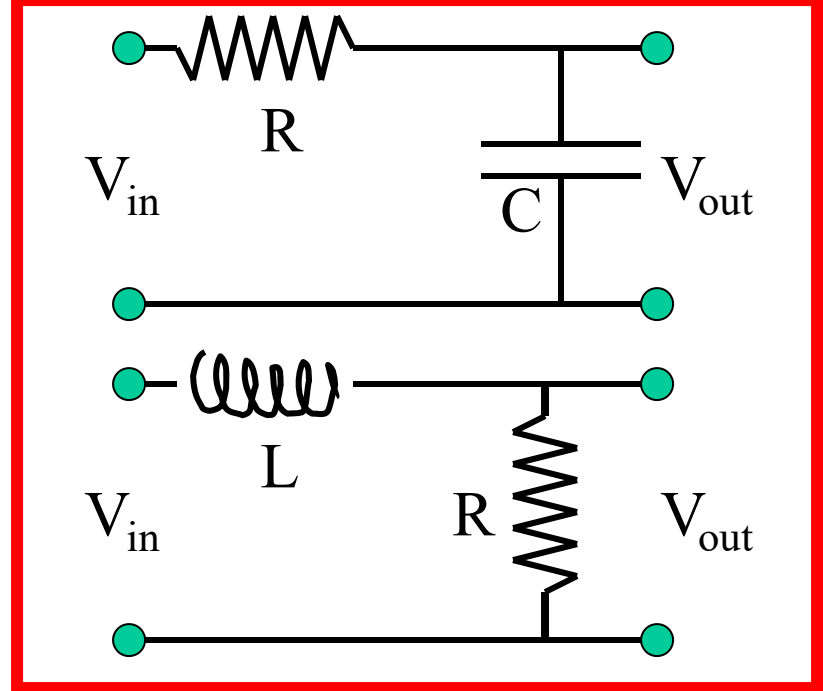
$$V_{out}(t) = L \frac{d}{dt} i(t) = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} V_{in}(t)$$

$$V_{out}(t) = \tau \frac{d}{dt} V_{in}(t)$$



Circuiti integratori e derivatori

- Abbiamo quindi delle “approssimazioni” di circuiti integratori e derivatori.
- I filtri “**passa basso**” RC e LR forniscono gli **integratori**;
- I filtri “**passa alto**” CR e RL forniscono i **derivatori**.



- Possiamo quindi graficare, in **Regime sinusoidale** funzione della frequenza del segnale d'ingresso, l'ampiezza del segnale in uscita, ed il suo sfasamento:

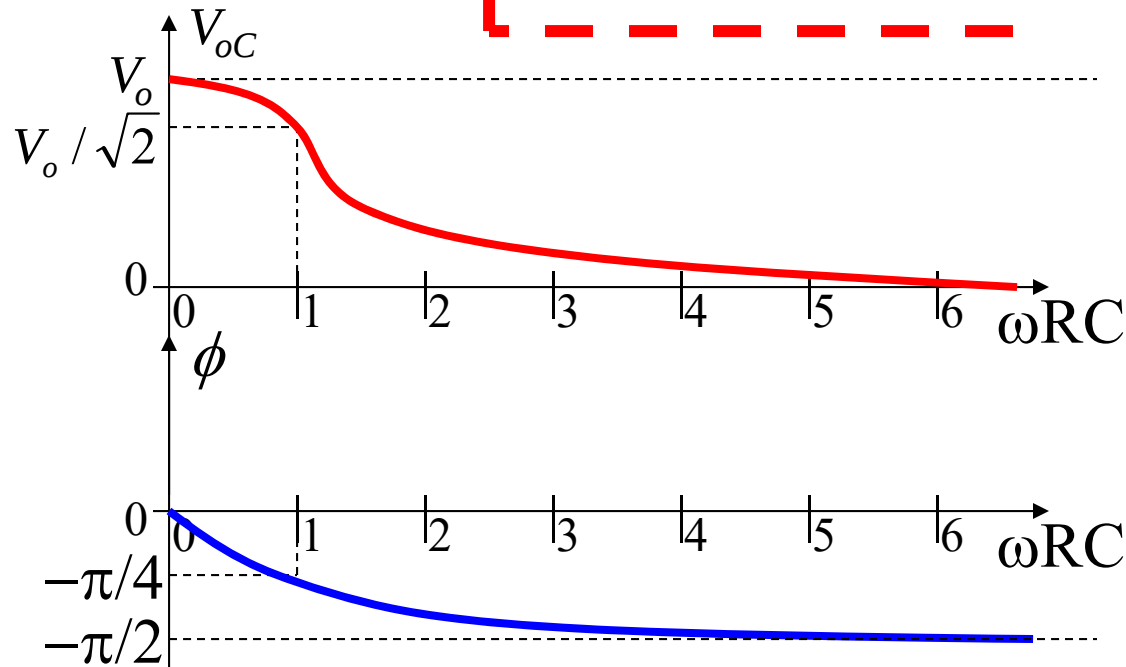
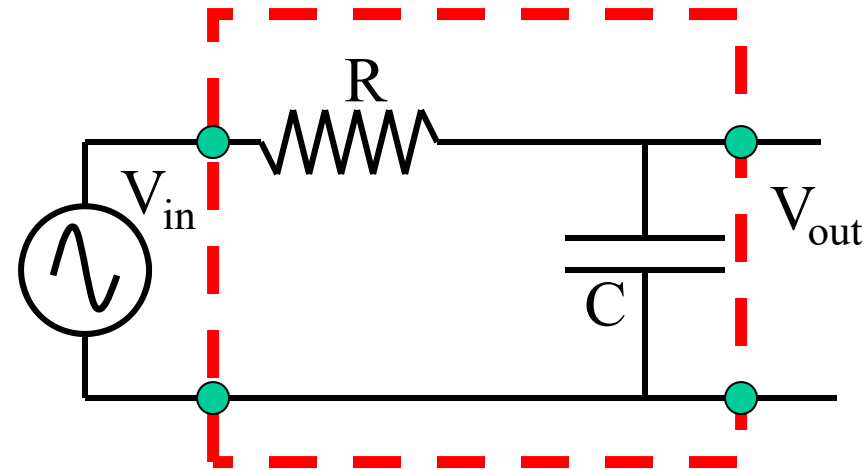
$$V_{in} = V_o e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$V_{out} = V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

dove

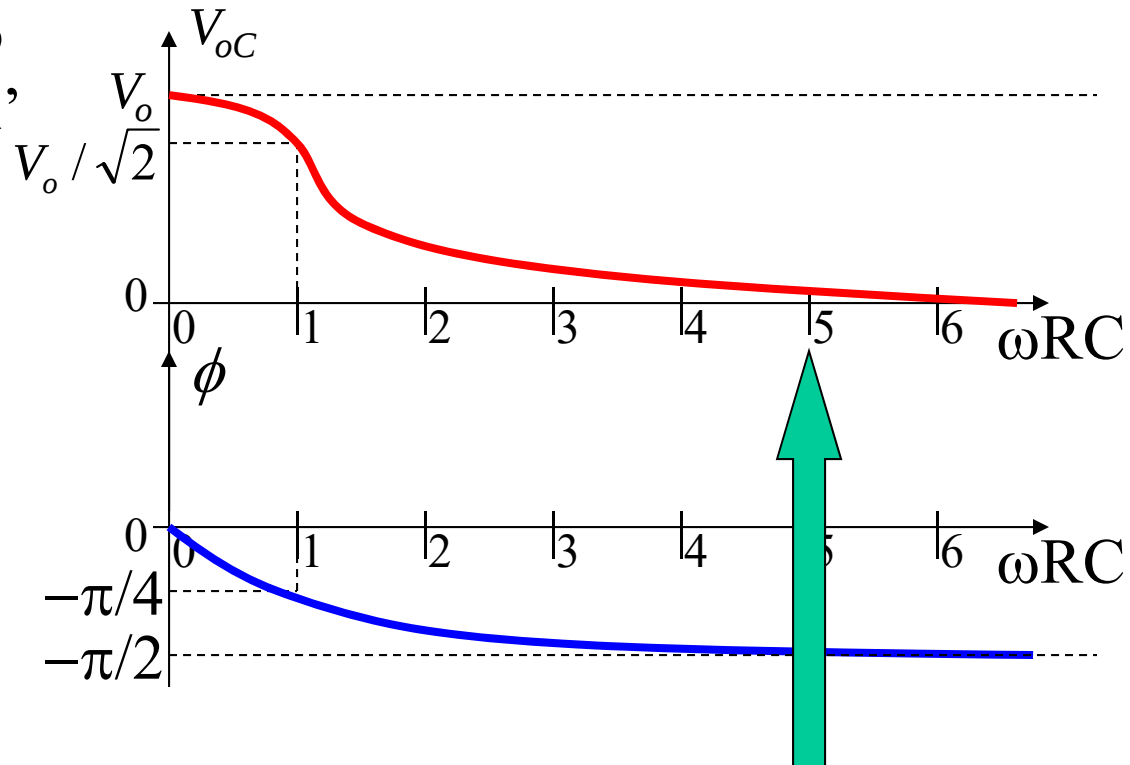
$$V_{oC} = \frac{V_o}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}$$

$$\varphi = \arctan(-\omega\tau)$$



Circuiti integratori e derivatori

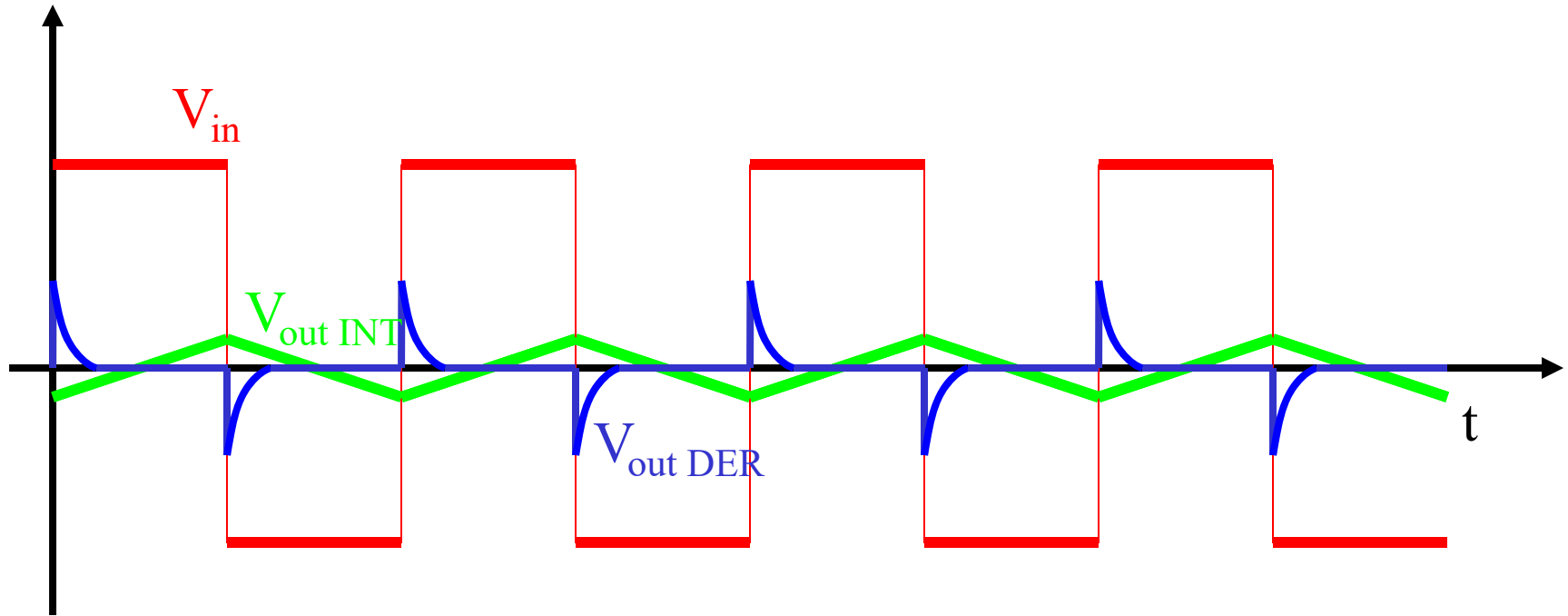
- Le approssimazioni sono tanto migliori quanto più il segnale in uscita è piccolo rispetto a quello in ingresso.
- Per i circuiti derivatori questa approssimazione è rispettata tanto meglio quanto più $f < f_0 = 1/2\pi\tau$;
- Per i circuiti integratori questa approssimazione è rispettata tanto meglio quanto più $f > f_0 = 1/2\pi\tau$;



A questa frequenza il passa basso è un buon integratore. Ma il segnale in uscita è ridotto di $1/\omega\tau$!

Risposta Impulsiva

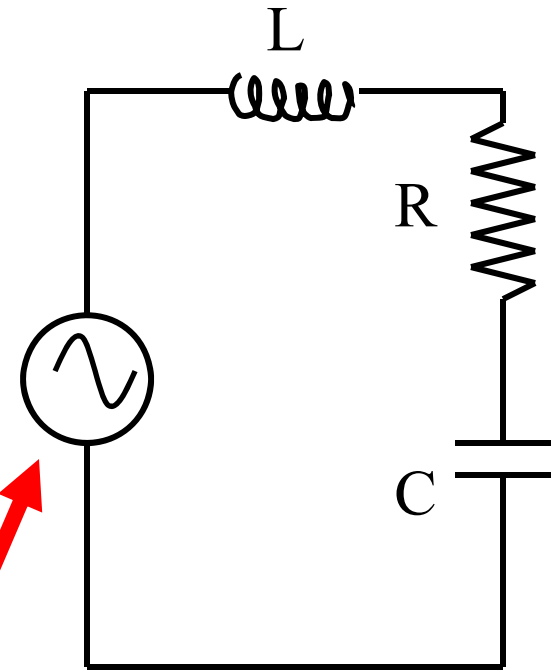
- Supponiamo di applicare ad un circuito integratore o ad un derivatore un segnale ad onda quadra:



- Alla fine dell'esperienza del 27 Aprile potrete provare ad ottenere queste forme d'onda sperimentalmente. La difficoltà sta nel fatto che sono tanto più ideali (quindi simili alla derivata o all'integrale di V_{in}) quanto più la loro ampiezza è piccola.

Il circuito RLC serie

- Se si aggiunge un induttore al circuito RC si ottiene un circuito RLC serie.
- Sia L l'induttanza (coefficiente di autoinduzione) dell'induttore
- Proviamo a risolvere il circuito (cioè a trovare la corrente che lo attraversa) quando è eccitato da una sorgente sinusoidale. $V = V_o \cos(\omega t + \varphi_V)$



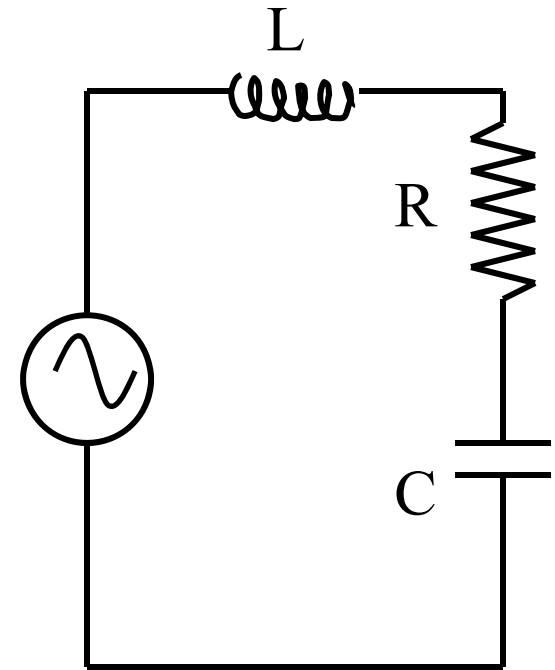
Il circuito RLC serie

- Per la seconda legge di Kirchhoff:

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}$$

- Per l'induttanza abbiamo considerato la forza elettromotrice autoindotta $-LdI/dt$ e l'abbiamo spostata a secondo membro cambiandola di segno.
- Derivando rispetto a t:

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$



$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

Il circuito RLC serie

- E' una eq. differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. La soluzione è la somma dell' integrale generale dell' omogenea più un integrale particolare della disomogenea.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Omogenea associata}$$

- Fisicamente la soluzione dell' omogenea corrisponde al comportamento transitorio iniziale; a regime vale l' integrale particolare.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- La soluzione dell' **omogenea** è del tipo

$$I(t) = I_1 e^{k_1 t} + I_2 e^{k_2 t}$$

- Con I_1 e I_2 costanti da determinare dalle condizioni iniziali e k_1 e k_2 soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$Lk^2 + Rk + \frac{1}{C} = 0$$

- quindi

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ponendo

$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

si trova

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

la quantità b può essere reale, nulla o immaginaria
a seconda che sia

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \\ \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \\ \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Caso 1, } b \text{ reale} \\ \text{Caso 2, } b \text{ nullo} \\ \text{Caso 3, } b \text{ immaginario} \end{array}$$

Il circuito RLC serie

Il circuito RLC serie

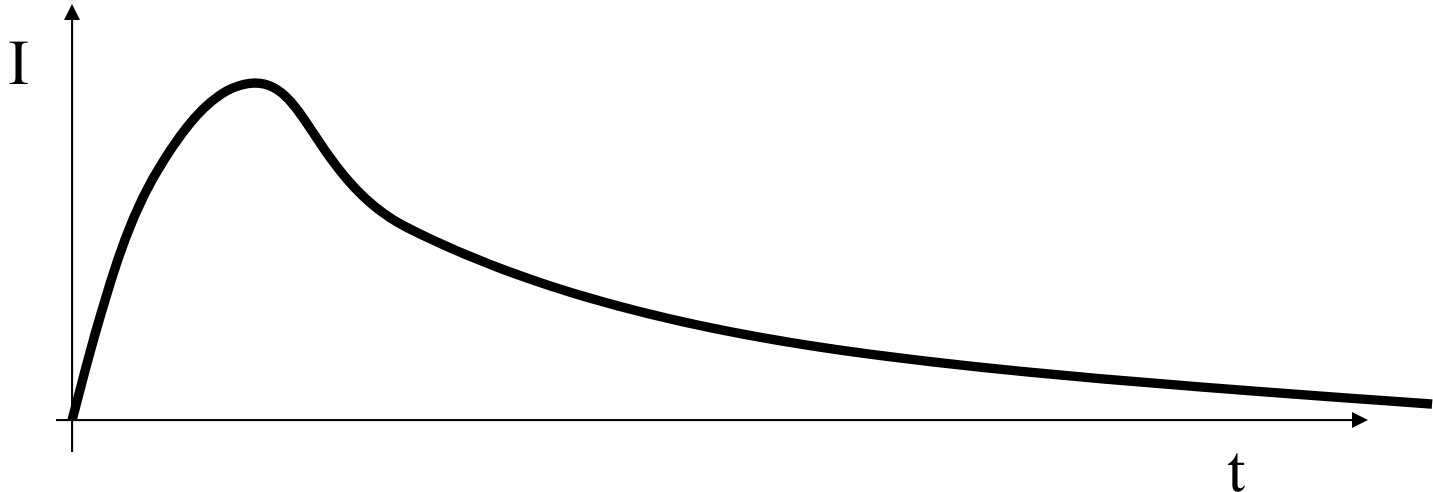
$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

e

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

se $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ gli esponenti sono ambedue negativi.

caso sovrasmorzato :



Imponendo le condizioni iniziali :

$$I(0) = 0 \Rightarrow$$

$$1) : 0 = I(0) = I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t} = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = -I_2$$

$$\text{e } q(0) = q_o \Rightarrow$$

$$RI(0) + L \left. \frac{dI}{dt} \right|_0 + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L \left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = -\frac{q_o}{C}$$

si trova quindi, derivando la [1] e ponendo $t = 0$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = 2bI_1 \rightarrow \dots$$

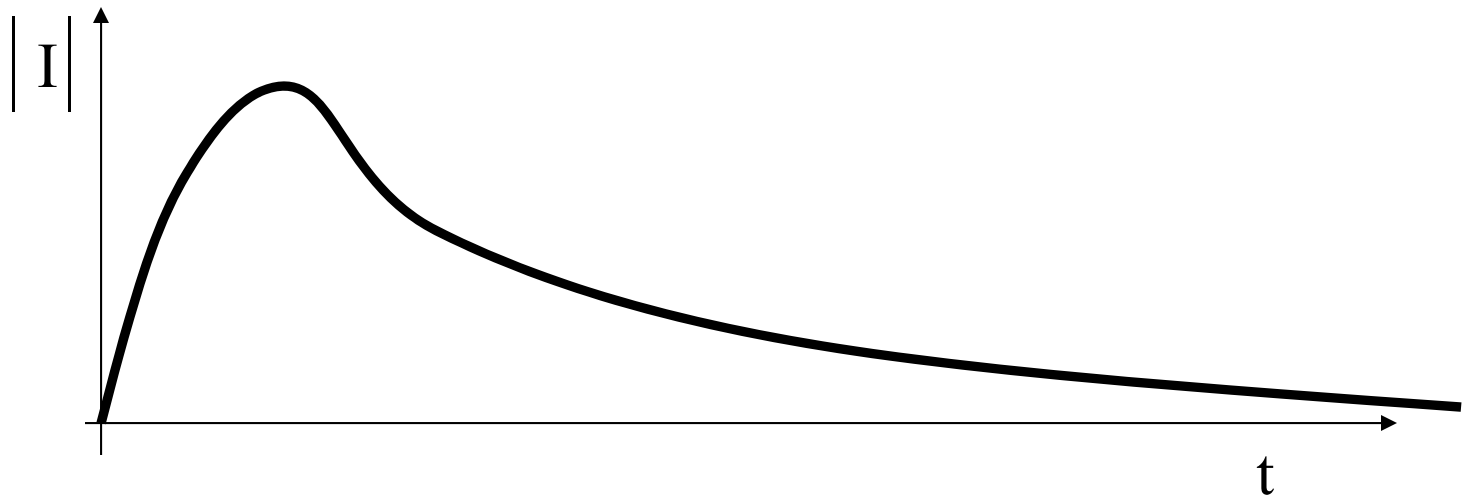
$$I_1 = -\frac{q_o}{2LCb}$$

e ponendo $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ si arriva a

$$I(t) = -\frac{q_o \omega_o^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\}$$

Quindi nel caso sovrasmorzato si
ottiene il seguente andamento

$$I(t) = -\frac{q_o \omega_o^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\}$$



Caso criticamente smorzato

$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\text{se } \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \quad (\text{caso criticamente smorzato}) \quad b = 0$$

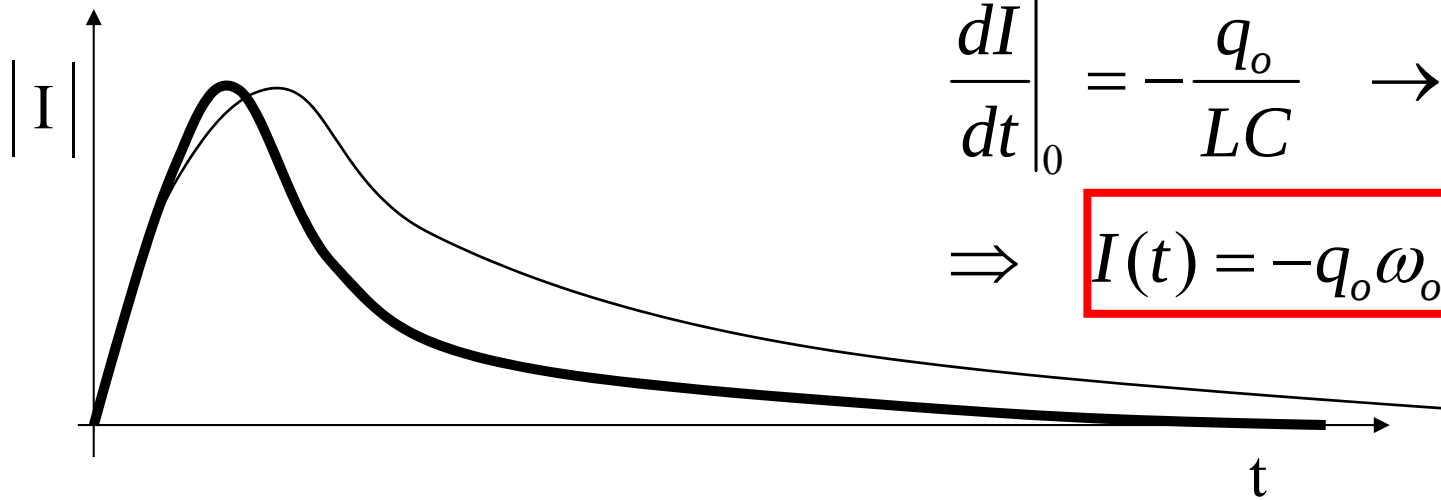
la soluzione e' del tipo $I(t) = (I_1 + I_2 t)e^{-at}$

Di nuovo, imponendo le condizioni iniziali si trovano I_1 e I_2

$$I(0) = 0 \rightarrow I_1 = 0$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = -\frac{q_o}{LC} \rightarrow I_2 = -\frac{q_o}{LC}$$

$$\Rightarrow I(t) = -q_o \omega_o^2 t e^{-at}$$



$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Il circuito RLC serie

e

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

se $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ la soluzione e'

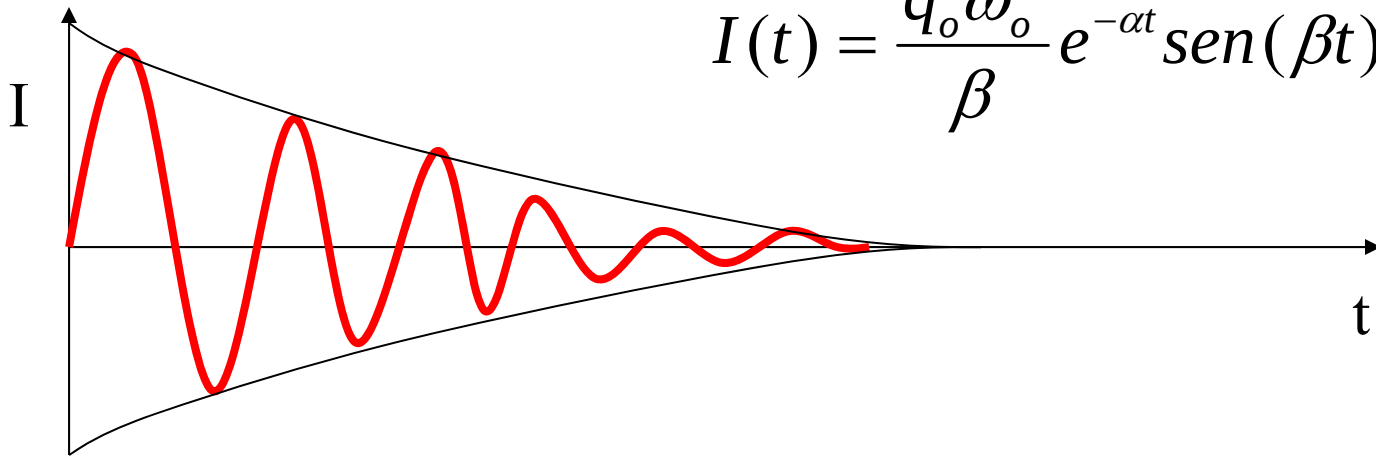
$$I(t) = I_1 e^{-(\alpha-j\beta)t} + I_2 e^{-(\alpha+j\beta)t}$$

caso oscillatorio smorzato :

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

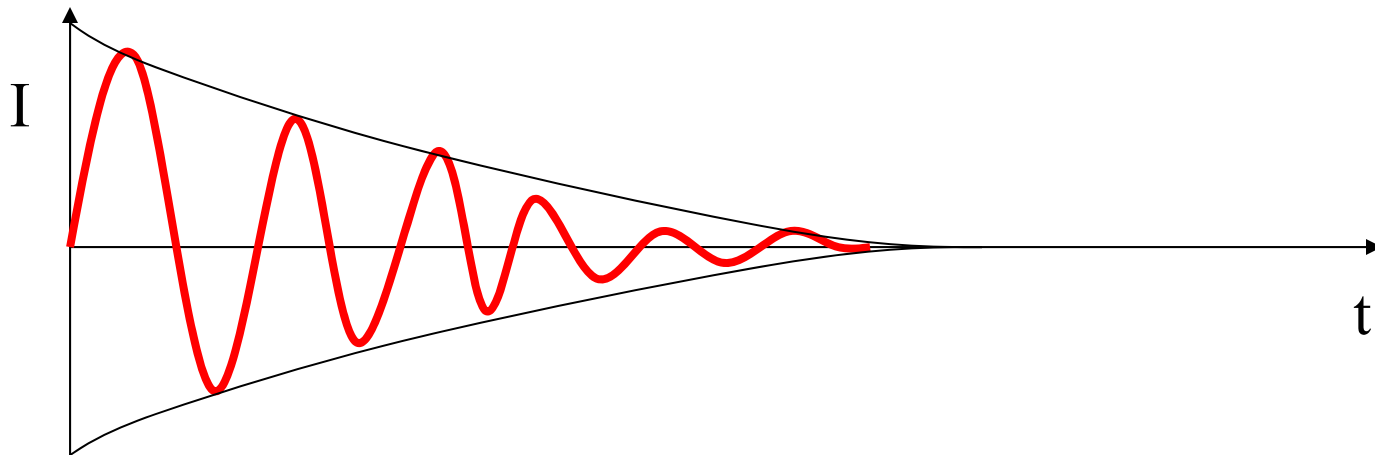
$$I(t) = -j \frac{q_o \omega_o^2}{2\beta} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) e^{-\alpha t}$$

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$$



Il circuito RLC serie

- L'ampiezza delle oscillazioni diminuisce perchè l'energia inizialmente disponibile come campo elettrico nel condensatore viene via via dissipata per effetto Joule nella resistenza.
- Le oscillazioni dipendono dal fatto che l'energia viene rimbalzata continuamente tra condensatore (campo elettrico) e induttore (campo magnetico)

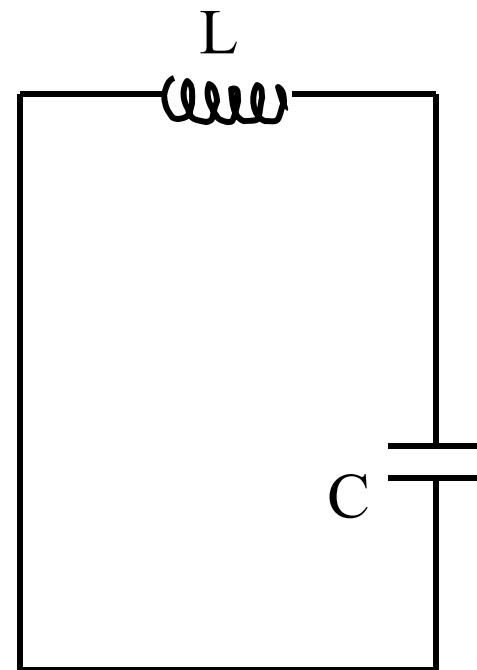


Il circuito RLC serie

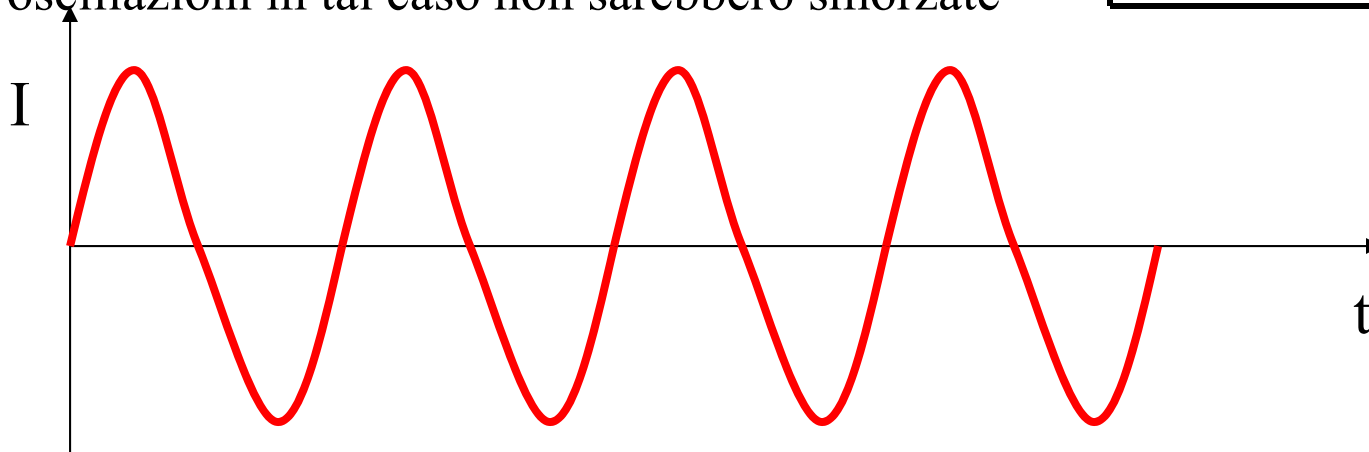
- Consideriamo il caso oscillatorio smorzato.
- Se R fosse nulla avremmo $\alpha=R/2L=0$ e quindi

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} e^{-\alpha t} \text{sen}(\beta t) \Rightarrow$$

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} \text{sen}(\beta t)$$



- Le oscillazioni in tal caso non sarebbero smorzate



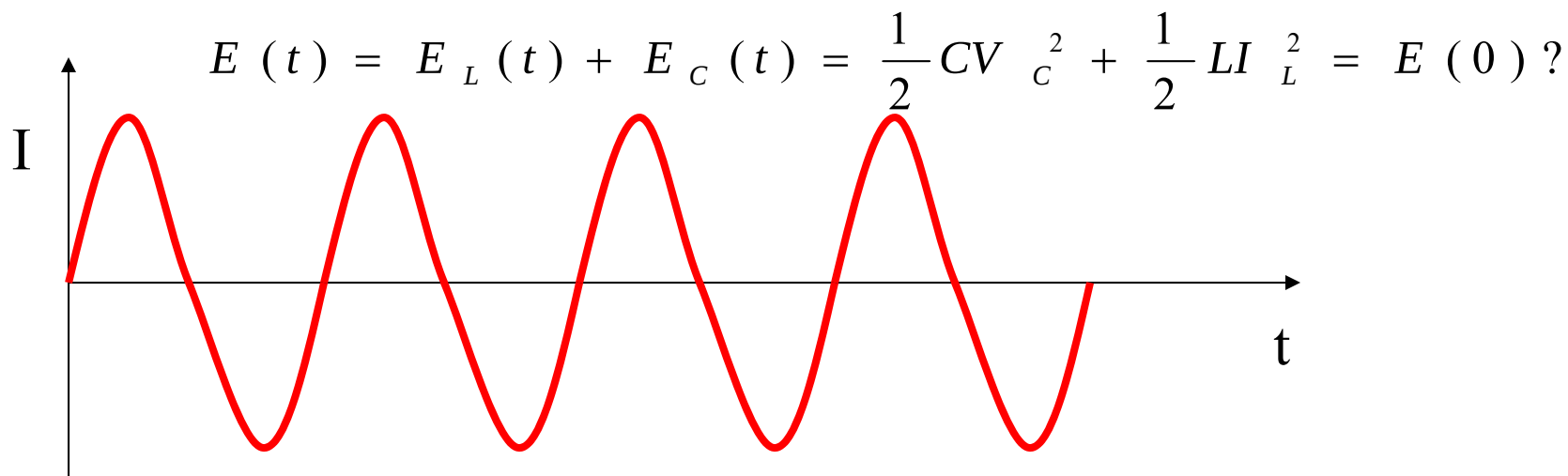
Il circuito RLC serie

- In assenza di fenomeni dissipativi, e trascurando l'energia irradiata, l'energia immagazzinata nel circuito dovrebbe rimanere costante. Vediamo se è vero.

$$E = E(0) = \frac{1}{2} \frac{q_o^2}{C}$$

$$E_c = \frac{1}{C} \int q dq = Q^2 / 2C = CV^2 / 2$$

$$E_L = \int W dt = \int IL dI = 1/2 LI^2$$



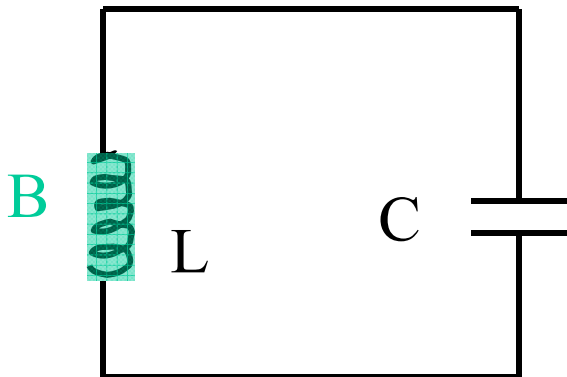
$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} \text{sen } \beta t = I_o \text{sen } \omega_o t$$

$$\cancel{RI} + L \frac{dI}{dt} + V_C = 0 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} = V_C \Rightarrow -LI_o \omega_o \cos \omega_o t = V_C$$

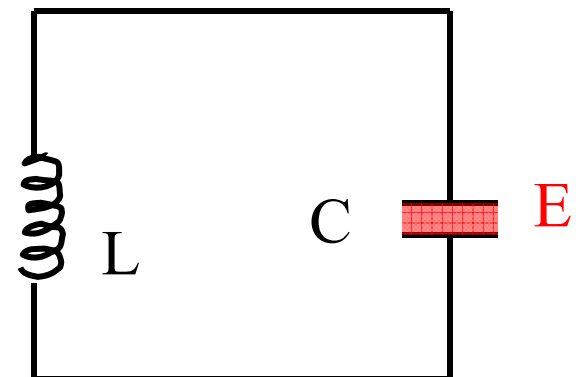
$$E_C = \frac{1}{2} C V_c^2 = \frac{1}{2} C L^2 I_o^2 \omega_o^2 \cos^2 \omega_o t = \frac{1}{2} L I_o^2 \cos^2 \omega_o t$$

$$E_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L I_o^2 \sin^2 \omega_o t$$

$$E_C + E_L = \frac{1}{2} L I_o^2 \quad \text{Costante !}$$



Massima corrente



Massima tensione

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

Il circuito RLC serie

- Cosa succede a regime (se V è sinusoidale) ?
- Si cerca un integrale particolare:

$$V = V_o e^{j(\omega t + \varphi_V)}$$

$$I = I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

$$j\omega V_o e^{j(\omega t + \varphi_V)} = \left[-\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C} \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

A questa equazione si poteva arrivare subito dalla legge di Ohm generalizzata.

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

ponendo

$$\varphi = (\varphi_V - \varphi_I)$$

$$Z = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

si ottiene

$$V_o e^{j\varphi} = Z I_o \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \varphi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{array} \right.$$

$$V_o e^{j\varphi} = Z I_o \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \varphi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{array} \right.$$

se $\omega = \omega_o = 1 / \sqrt{LC}$ l'impedenza diventa reale
(e pari a R) e lo sfasamento va a 0.
condizione di risonanza.

si definisce il fattore di qualità del circuito

$$Q_o = \omega_o L / R = 1 / R \sqrt{L / C} \quad \text{e si può riscrivere :}$$

$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow I_o = \frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

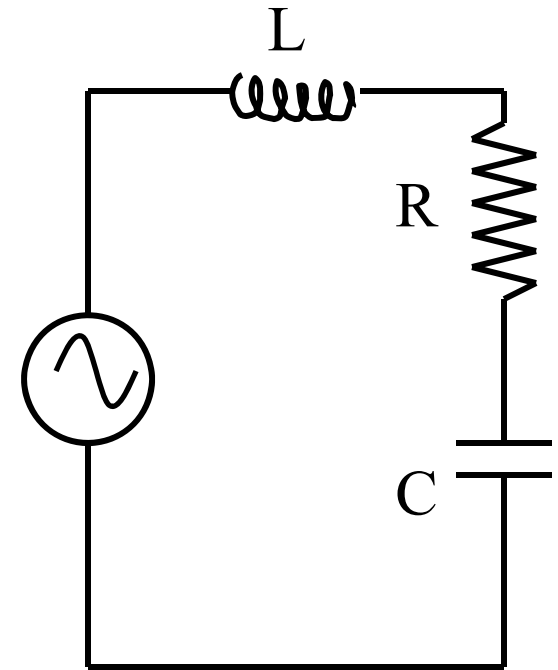
Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

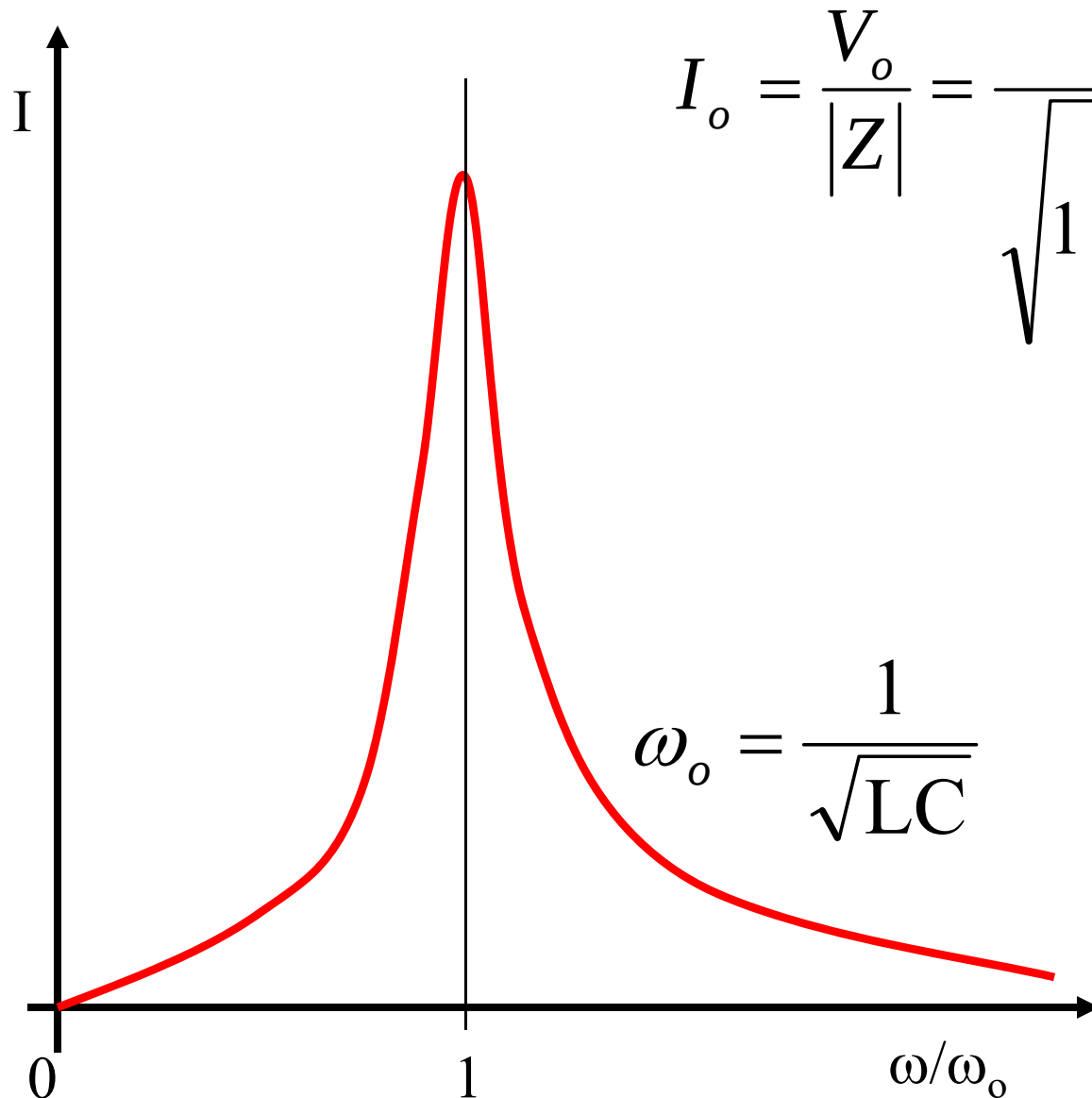
$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} =$$

$$\frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

dove $Q_o = \omega_o L / R$ è il fattore di qualità



Il circuito RLC serie

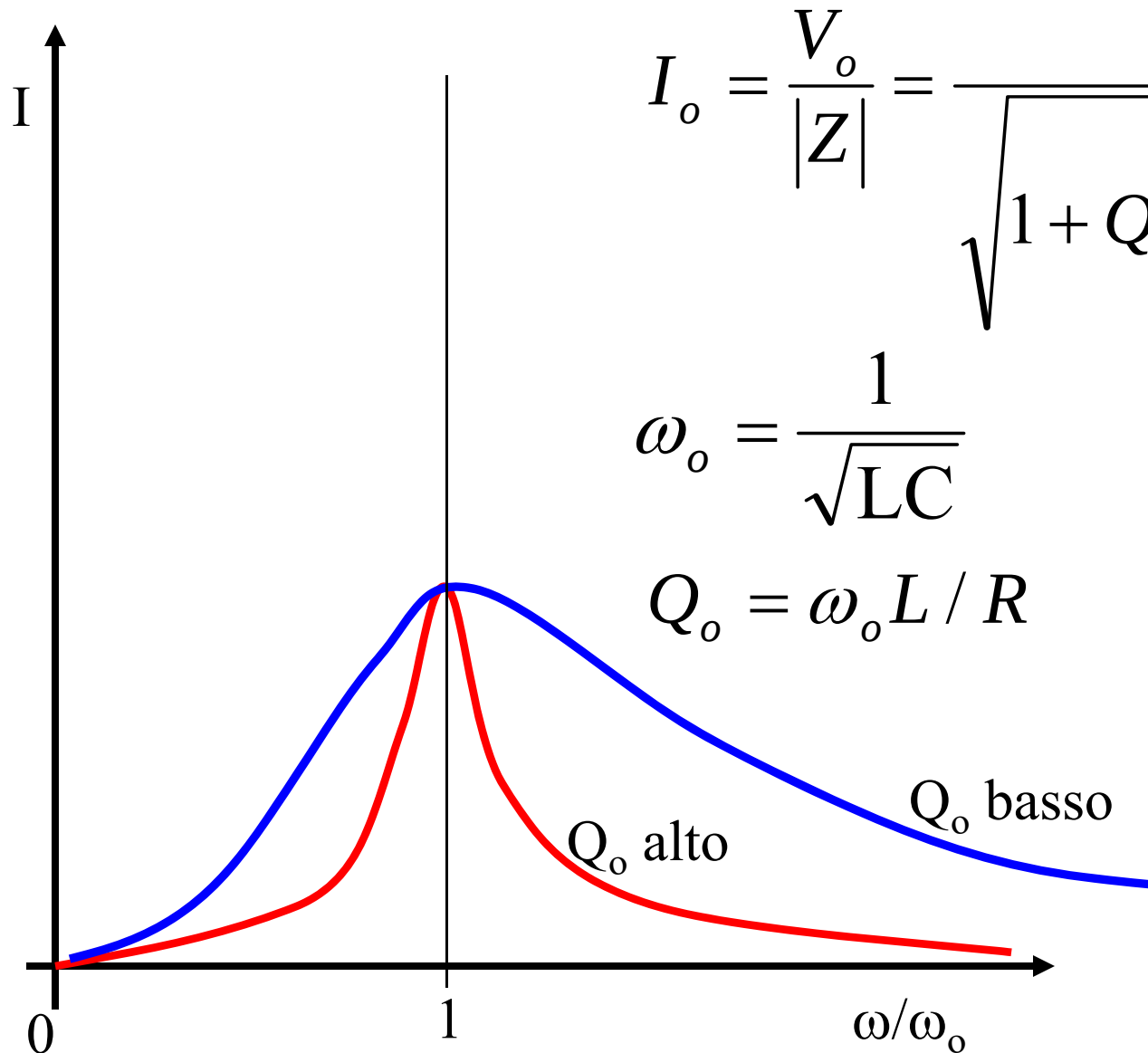


$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Il circuito presenta un massimo di risposta (corrente massima) per $\omega = \omega_o$.

Il circuito RLC serie



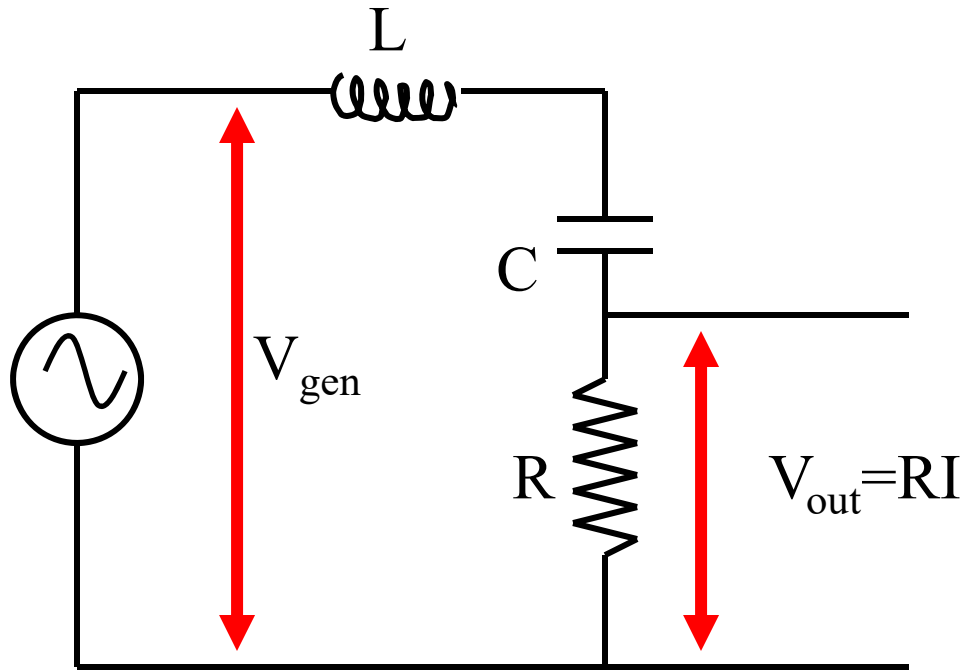
$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o L / R$$

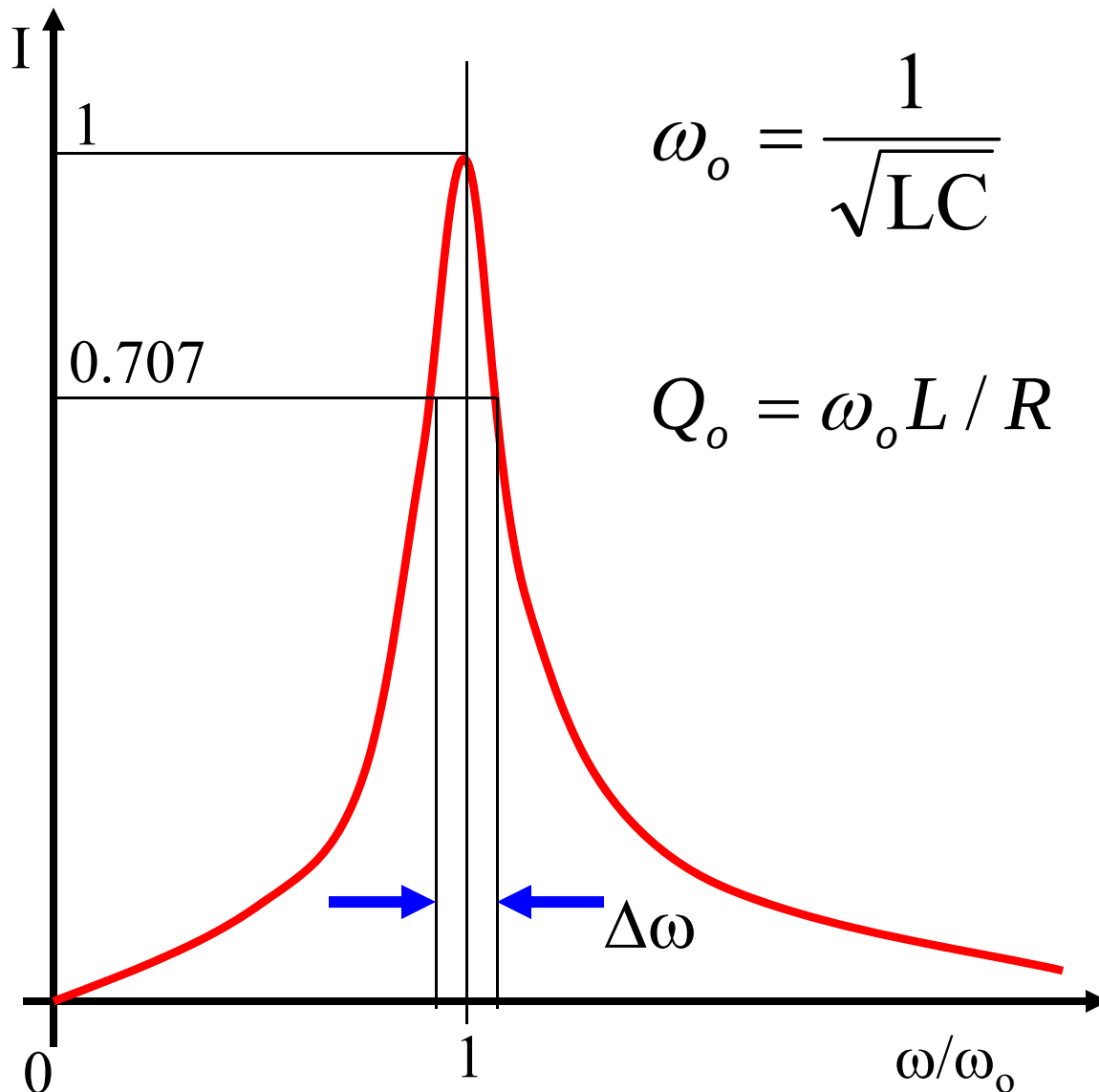
- A seconda di Q_o (fattore di qualità) la curva di risposta è più o meno piccata.

Il circuito RLC serie



- In questa configurazione il circuito agisce come un filtro **passa banda**.
- Solo le frequenze intorno ad ω_0 producono un segnale in uscita.
- Il filtro è tanto più selettivo quanto più alto è Q_0 .
- Viene utilizzato ad es. per sintonizzare una radio su una frequenza ben precisa, eliminando le altre.

Il circuito RLC serie



- La larghezza di banda del filtro $\Delta\omega$ è la distanza tra i due punti della risposta in frequenza in cui la risposta è $1/\sqrt{2}$ del massimo.
- E' strettamente legata a Q_o .

Il circuito RLC serie

$$\frac{I_o}{V_{gen} / R} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

vale $1 / \sqrt{2}$ quando

$$Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2 = 1$$

$$\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} = \pm \frac{1}{Q_o} \Rightarrow \omega^2 \mp \frac{\omega \omega_o}{Q_o} - \omega_o^2 = 0$$

Il circuito RLC serie

$$Q_o \omega^2 \mp \omega \omega_o - Q_o \omega_o^2 = 0$$

la soluzione è

$$\omega = \frac{\mp \omega_o \pm \sqrt{\omega_o^2 + 4Q_o^2 \omega_o^2}}{2Q_o}$$

e le due soluzioni positive sono

$$\omega_{1,2}^+ = \frac{\mp \omega_o + \sqrt{\omega_o^2 + 4Q_o^2 \omega_o^2}}{2Q_o}$$

da cui

$$\Delta \omega = \omega_2^+ - \omega_1^+ = \frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{R}{L}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

La larghezza di banda è inversamente proporzionale al fattore di qualità Q_o . Il filtro è tanto più selettivo quanto più alto è Q_o .

Il circuito RLC serie

- La resistenza minima del circuito è quella dell'avvolgimento con cui si realizza l' induttanza.
- Con induttanze commerciali di ottima qualità si ottengono fattori di qualità dell' ordine di 100, e quindi bande passanti dell' ordine di 1/100 della frequenza centrale.
- Solo usando superconduttori si possono ottenere $Q \gg 100$.

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

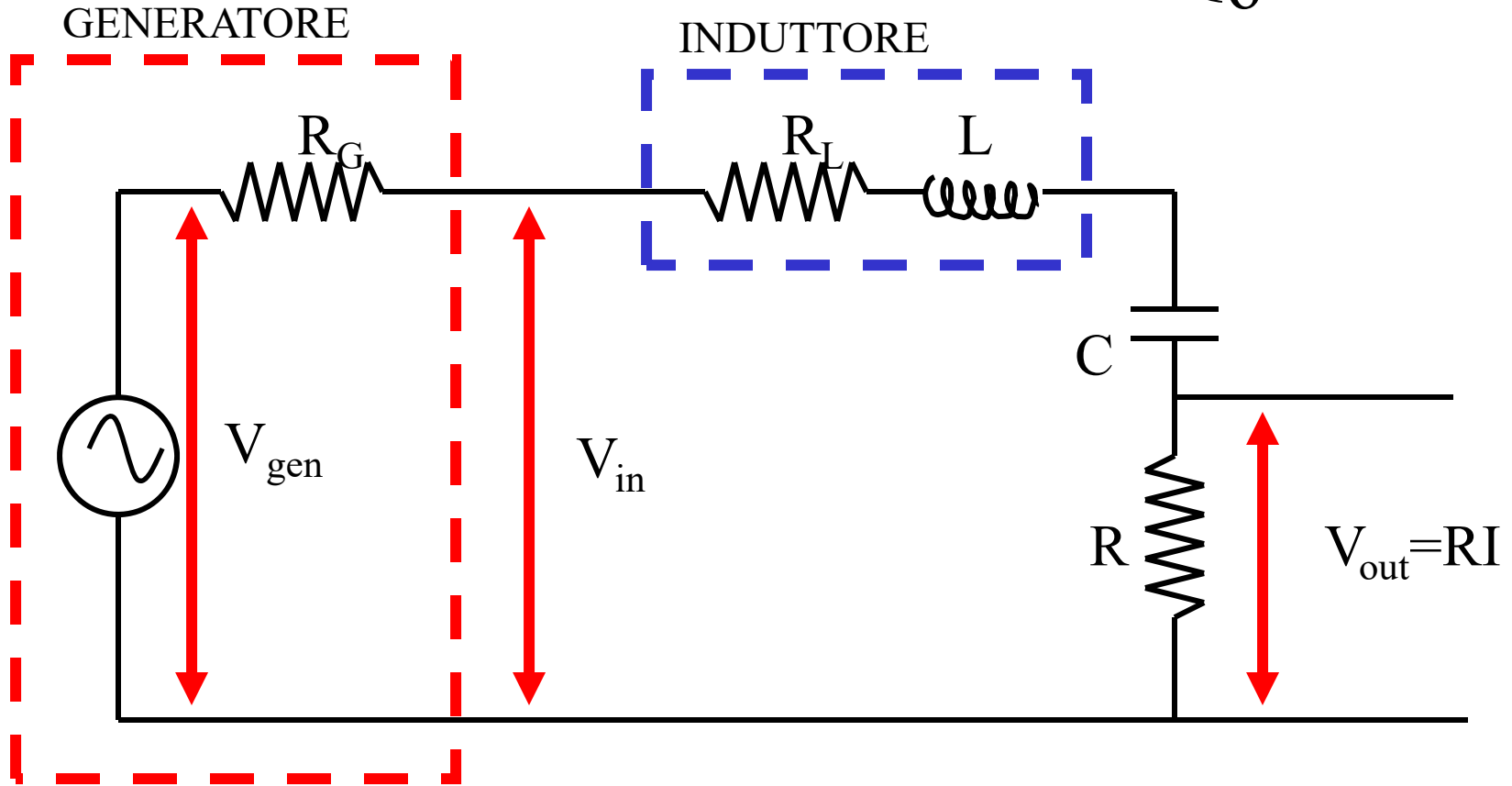
$$\Delta\omega = \omega_2^+ - \omega_1^- = \frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{R}{L}$$


$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} = \frac{f_o}{\Delta f}$$

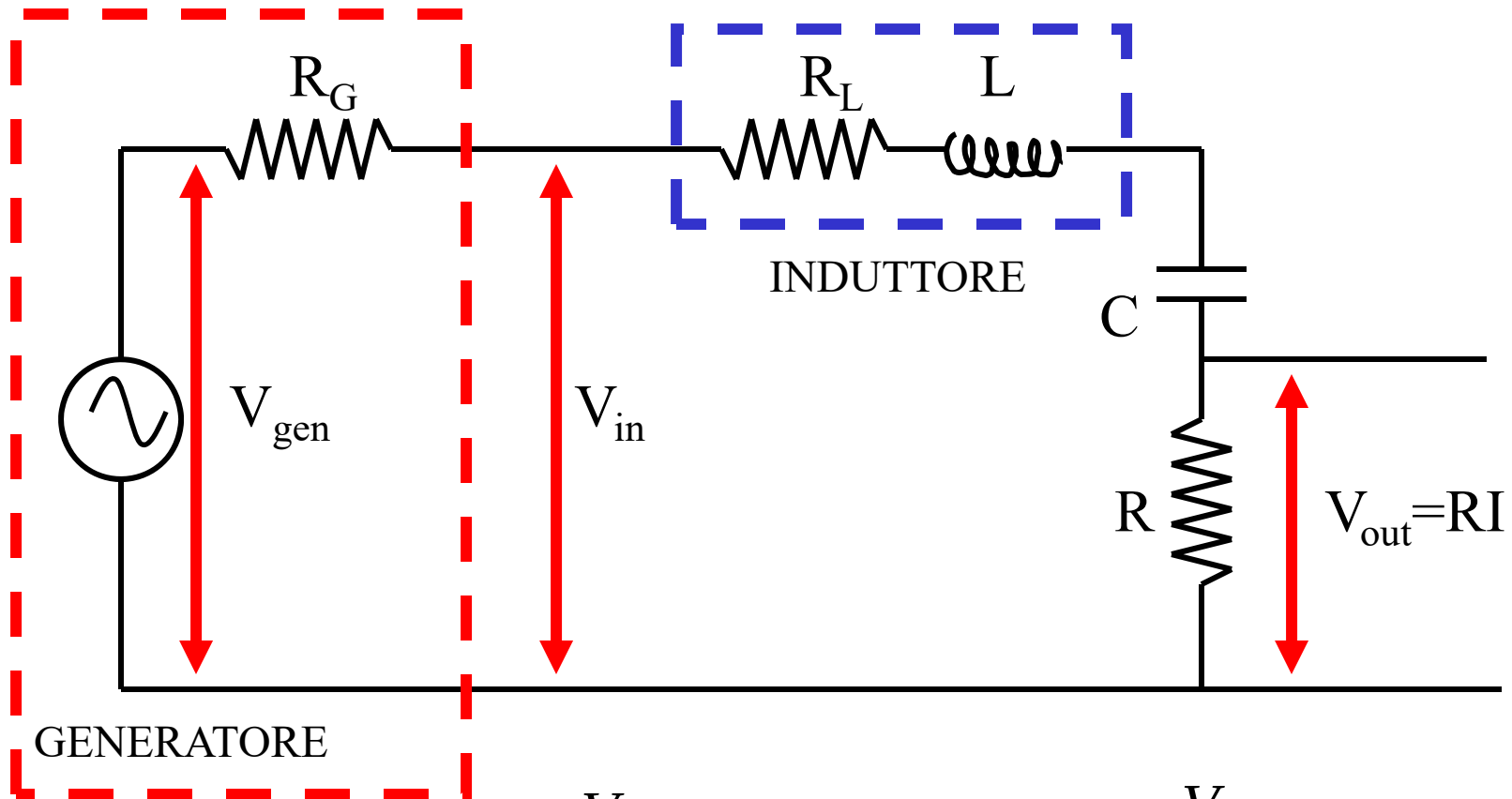
Nota: Misura di Q_o

- Il Q_o che abbiamo definito si riferisce all'espressione della **corrente** nel circuito.
- La R che compare nell'espressione di Q_o è la resistenza totale del circuito, somma di
 - Resistenza interna del generatore
 - Resistenza interna dell'induttore
 - Resistenza reale
- La corrente che scorre nel circuito può essere valutata misurando V ai capi della resistenza reale e dividendo per il valore della resistenza reale.
- Da una curva di I in funzione della frequenza si valuta $Q_o = f_o / \Delta f$

Nota: Misura di Q_0



- In un circuito reale solo V_{in} e V_{out} sono misurabili, V_{gen} non lo è (almeno non direttamente).



Q_o si valuta
da questa

non da questa !

$$\frac{V_{out}}{R} = I_o = \frac{V_{gen}}{R_G + R_L + R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R_L + R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Nota2: se si vuole misurare R_L

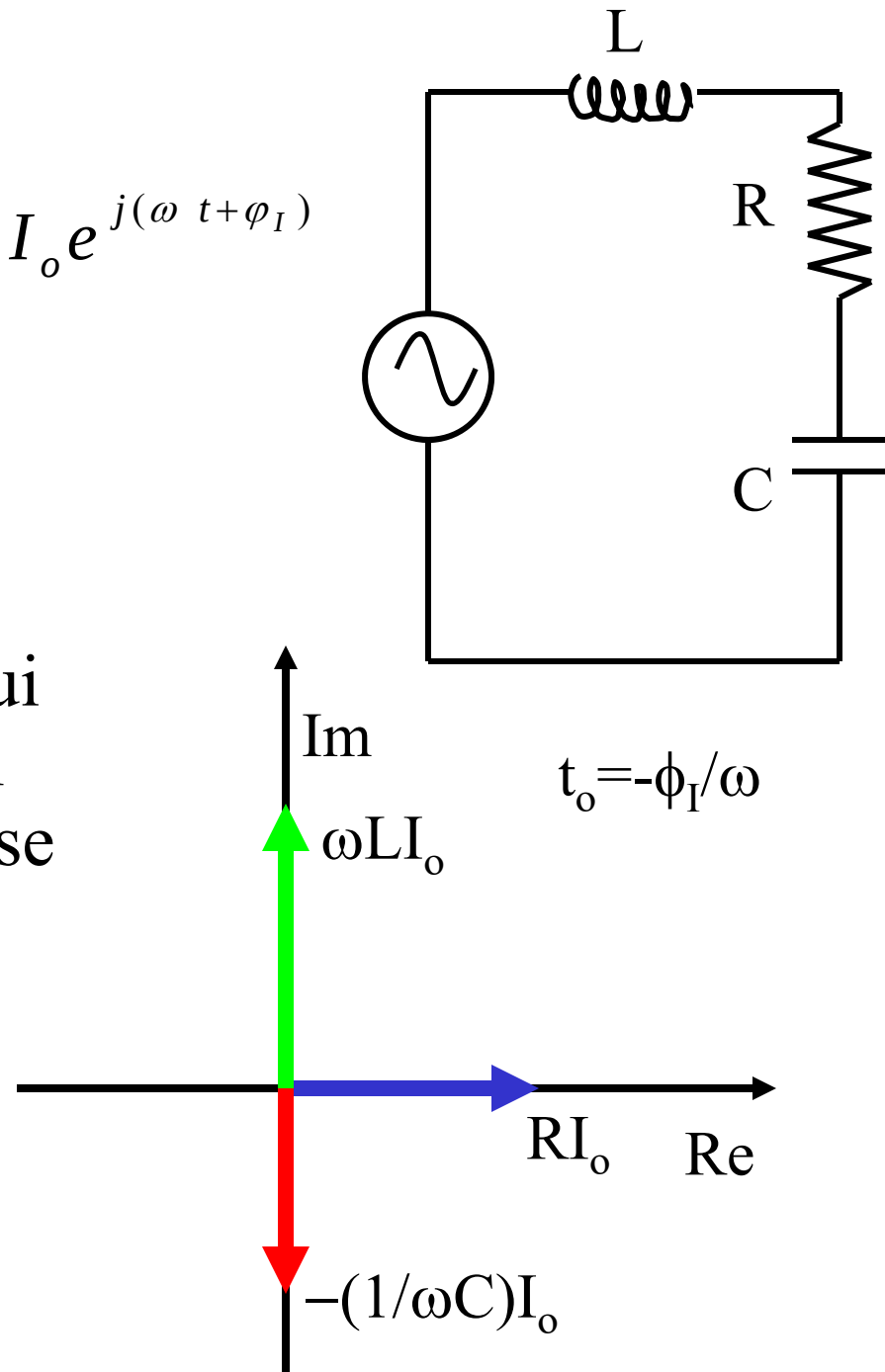
- Dalle misure di I si valuta $Q_o = f_o / \Delta f$ e da questo la somma di $R_L + R_G + R$, da cui per sottrazione R_L (sapendo le altre due)
- Oppure, meglio
- Dalle misure di V_{out}/V_{in} alla risonanza:

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{RIS} = \frac{R}{R + R_L} \quad \Rightarrow \quad R_L = R \left[\left. \frac{V_{in}}{V_{out}} \right|_{RIS} - 1 \right]$$

Lo sfasamento

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \phi_I)}$$

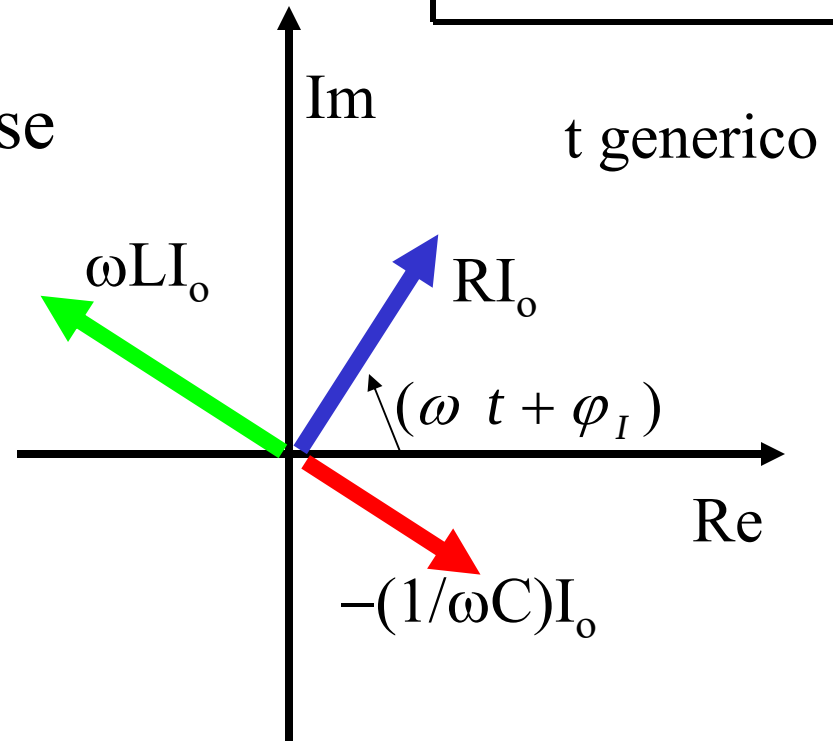
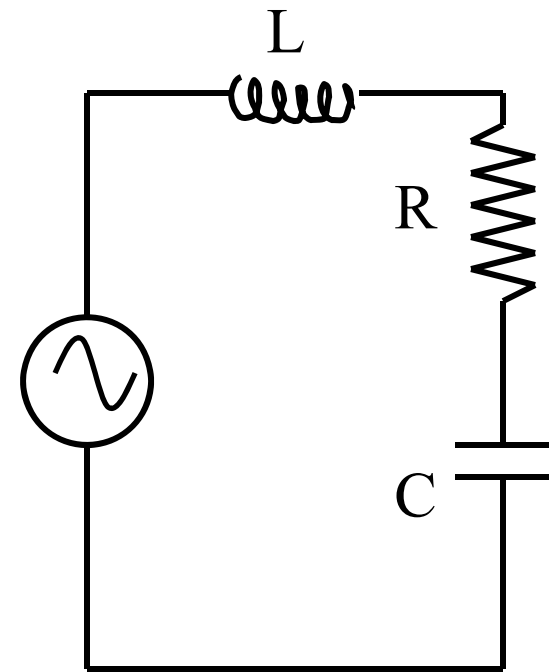
- Vediamo le tensioni ai capi di ciascun componente:
- I tre termini nell' equazione sopra sono delle tensioni, la cui parte reale e' la proiezione del fasore rappresentativo sull' asse reale del piano complesso.
- I tre vettori sono lunghi rispettivamente
- $I_o R$, $I_o \omega L$, $I_o / \omega C$



Il circuito RLC serie

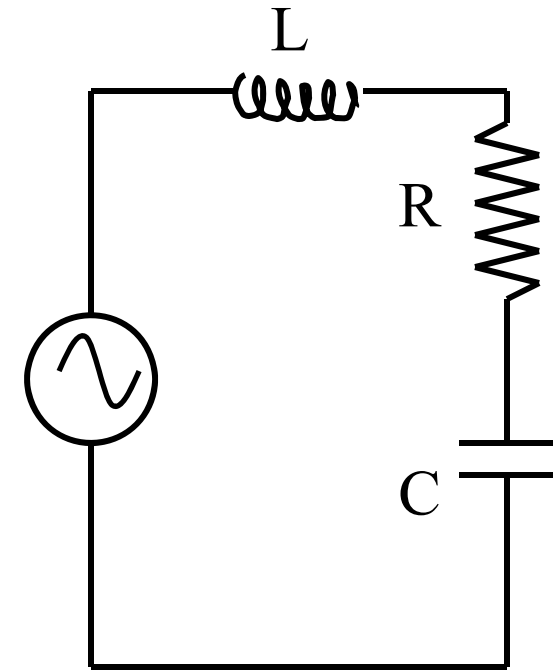
$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- Vediamo le tensioni ai capi di ciascun componente:
- I tre termini nell'equazione sopra sono delle tensioni, la cui parte reale è la proiezione del fasore rappresentativo sull'asse reale del piano complesso.
- I tre vettori sono lunghi rispettivamente
- $I_o R$, $I_o \omega L$, $I_o / \omega C$
- Al passare del tempo ruotano mantenendo le stesse fasi relative

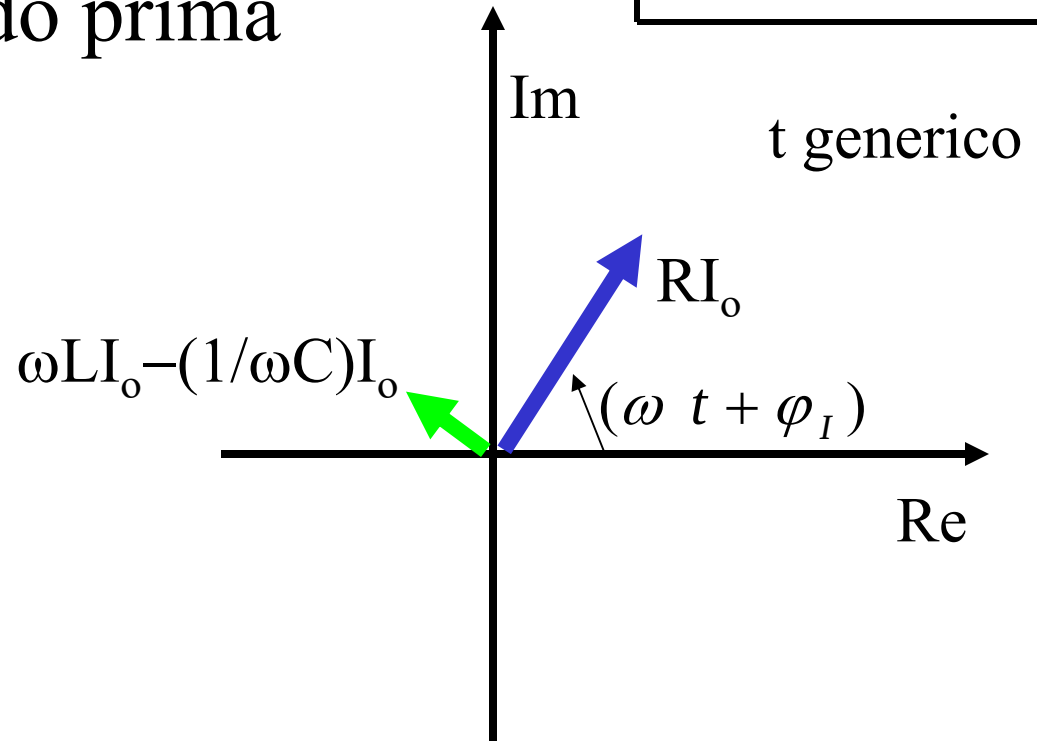


Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

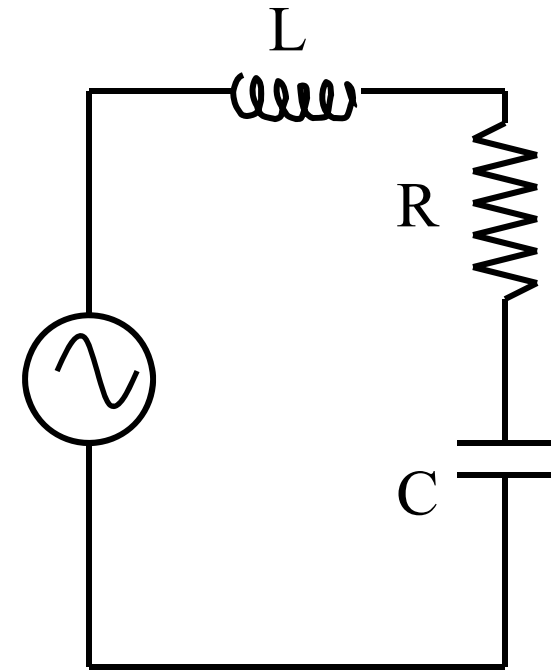


- La composizione dei vettori si può fare sommando prima i contributi di L e C:

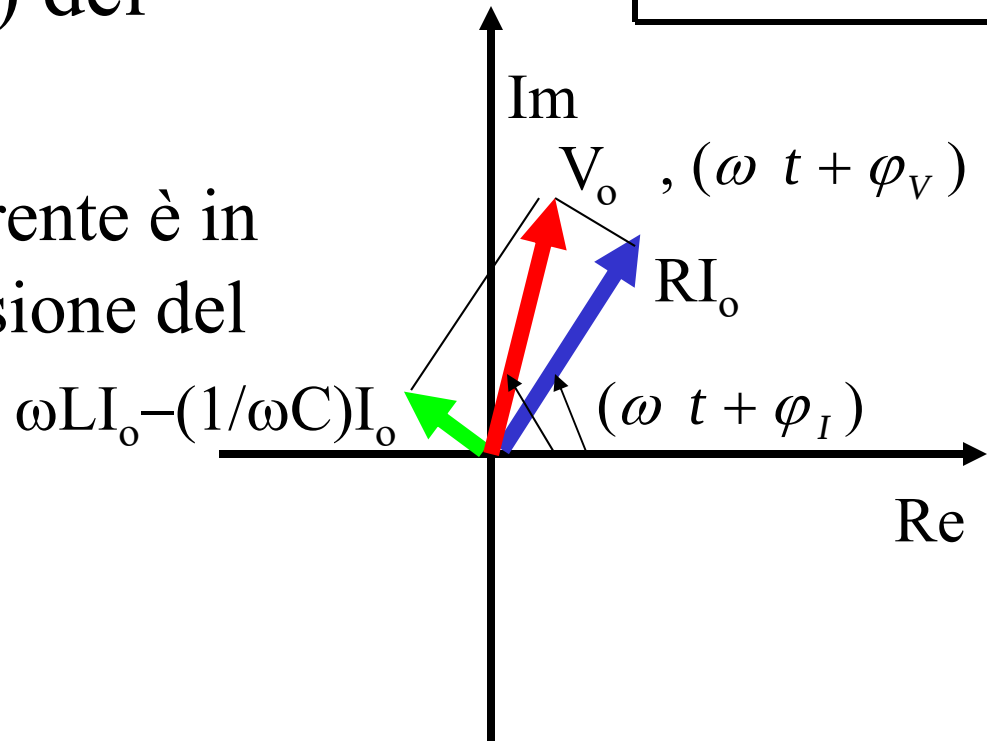


Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

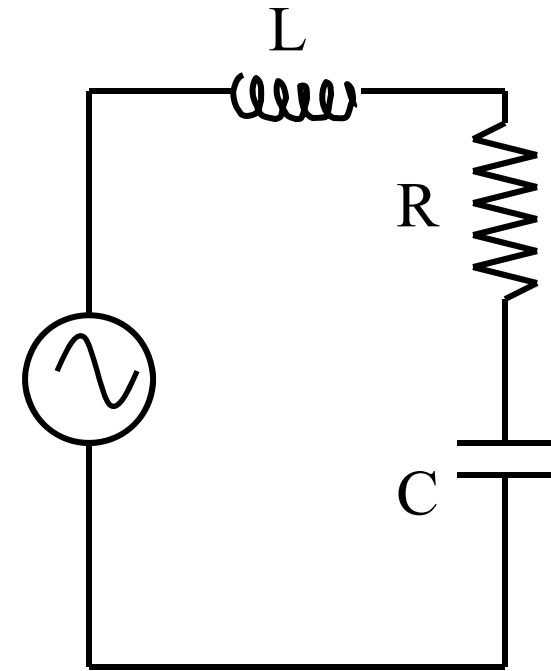


- E poi trovando la risultante, che deve essere proprio la tensione (complessa) del generatore.
- Se $\omega L > (1/\omega C)$, la corrente è in ritardo rispetto alla tensione del generatore

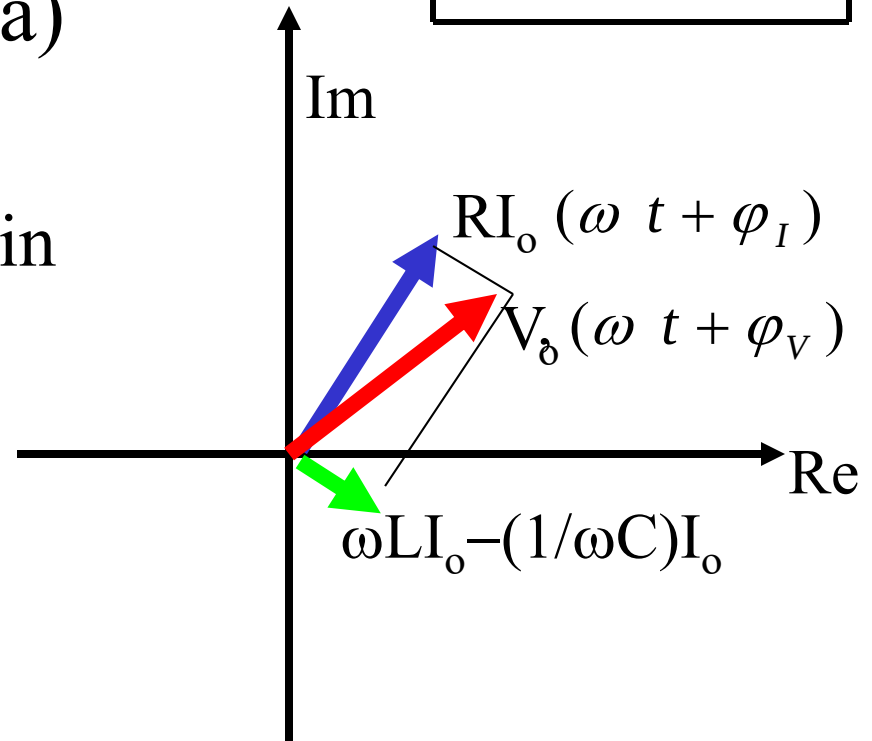


Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$



- E poi trovando la risultante, cioè la tensione (complessa) del generatore.
- Se $\omega L < (1/\omega C)$, la corrente è in anticipo rispetto alla tensione



circuito RLC serie

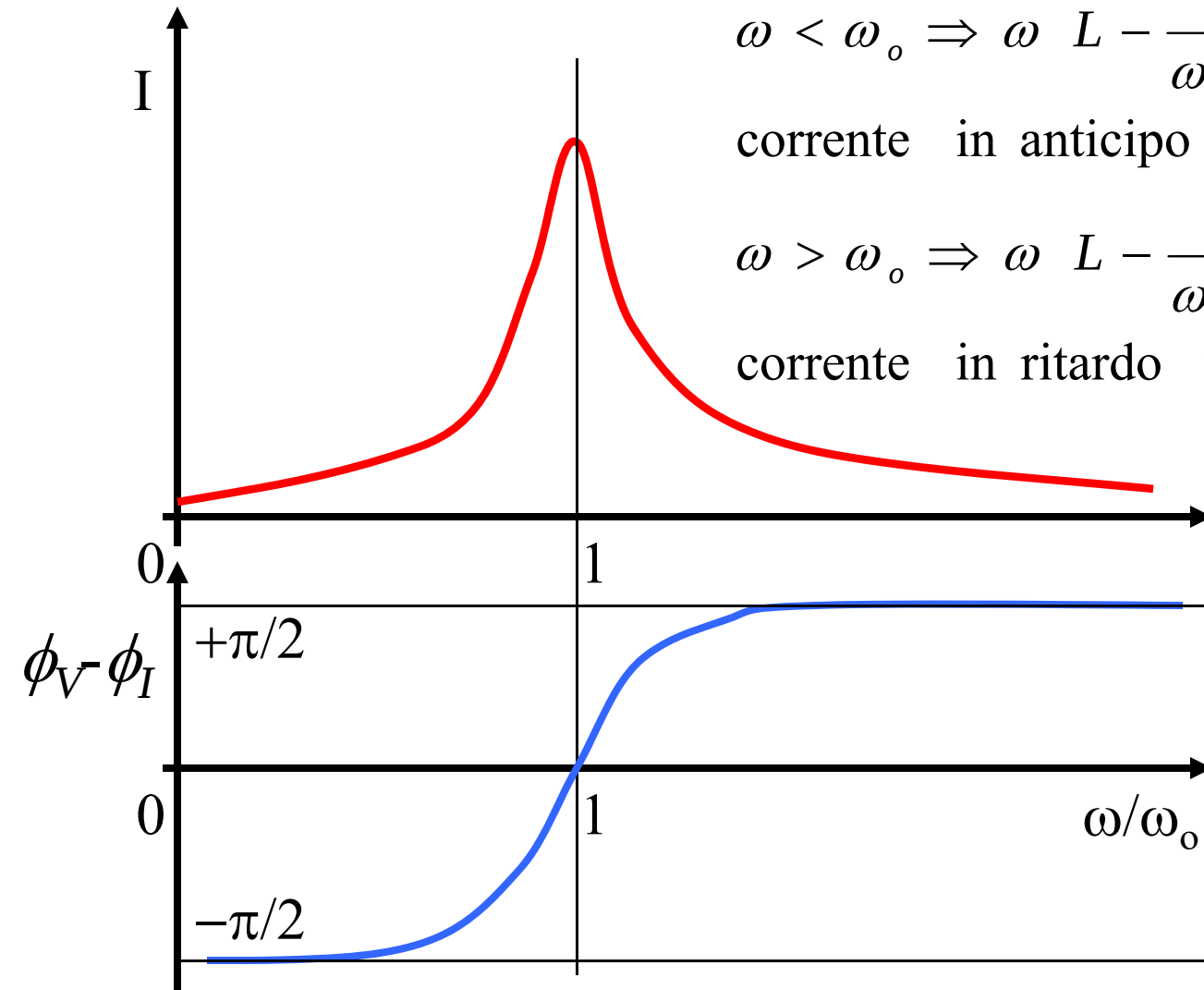
Sfasamento tra tensione e corrente: $\varphi_V - \varphi_I = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]$

$$\omega < \omega_o \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} < 0 \Rightarrow \varphi_V - \varphi_I < 0$$

corrente in anticipo rispetto alla tensione

$$\omega > \omega_o \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0 \Rightarrow \varphi_V - \varphi_I > 0$$

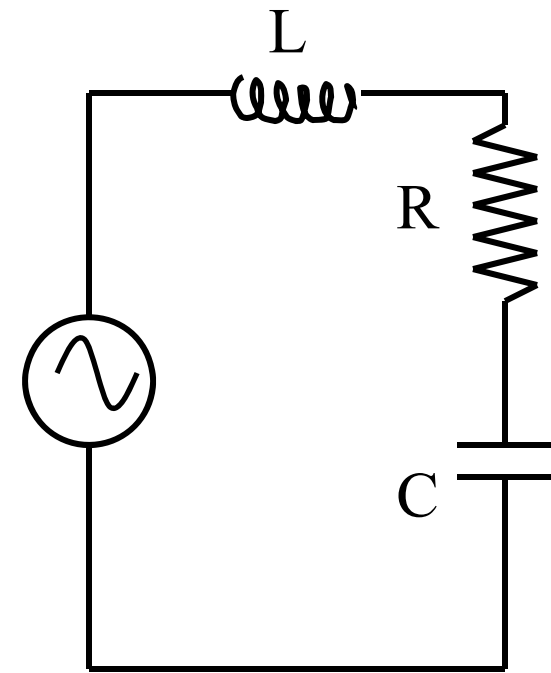
corrente in ritardo rispetto alla tensione



Extratensioni

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- Vediamo i moduli delle tensioni ai capi di ciascun componente **reattivo**:



$$\vec{V}_C = \vec{Z}_C \vec{I} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \vec{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$\vec{V}_L = \vec{Z}_L \vec{I} = \frac{j\omega L \vec{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

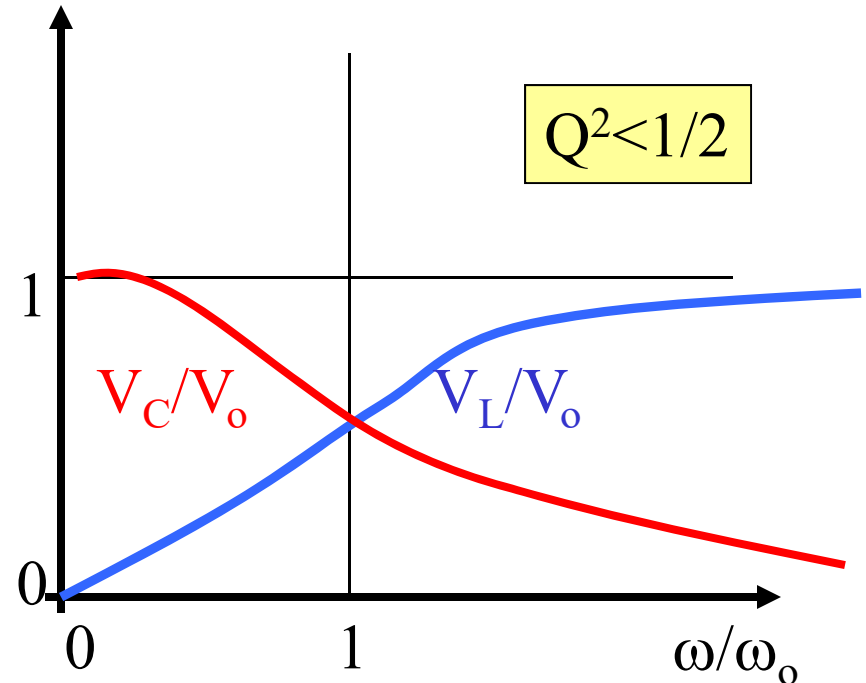
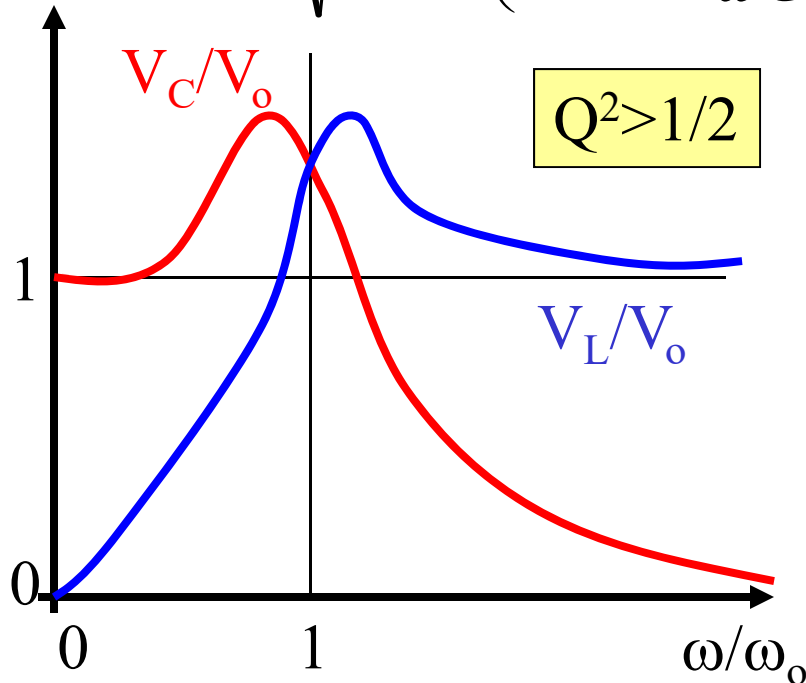
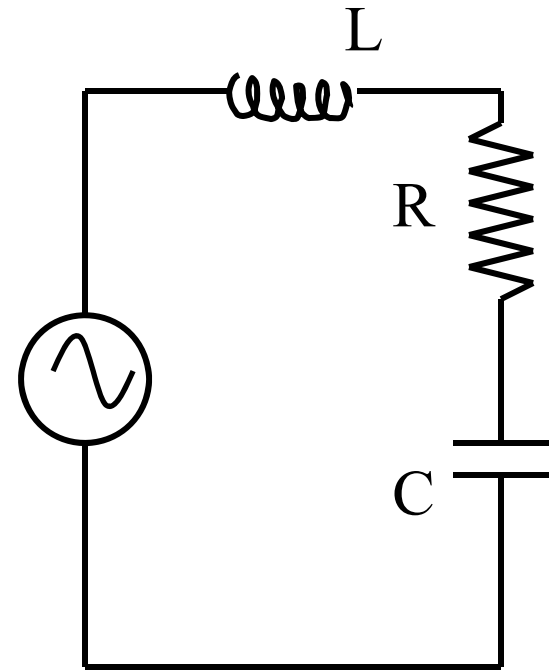
$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Il circuito RLC serie

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$



Extratensioni

- Notare che, alla risonanza :

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \rightarrow \frac{V_C}{V_o} = \frac{1}{R \omega_o C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \rightarrow \frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

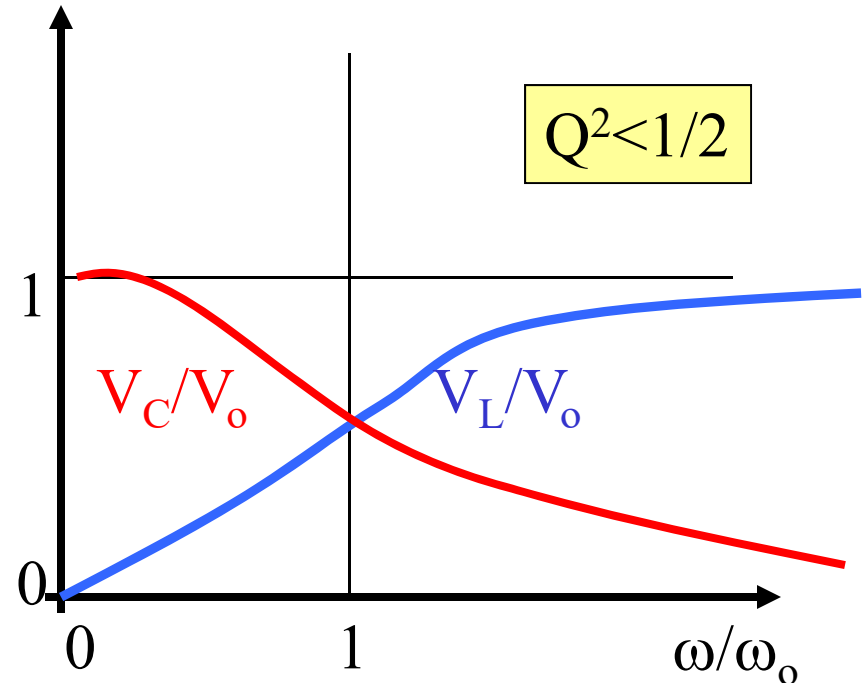
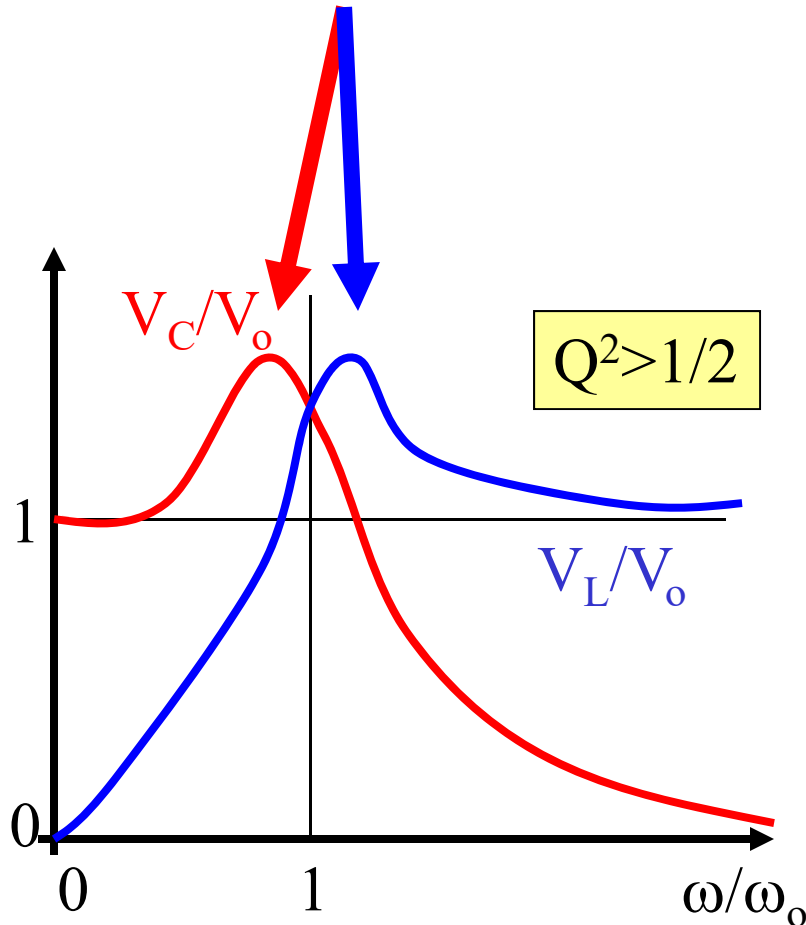
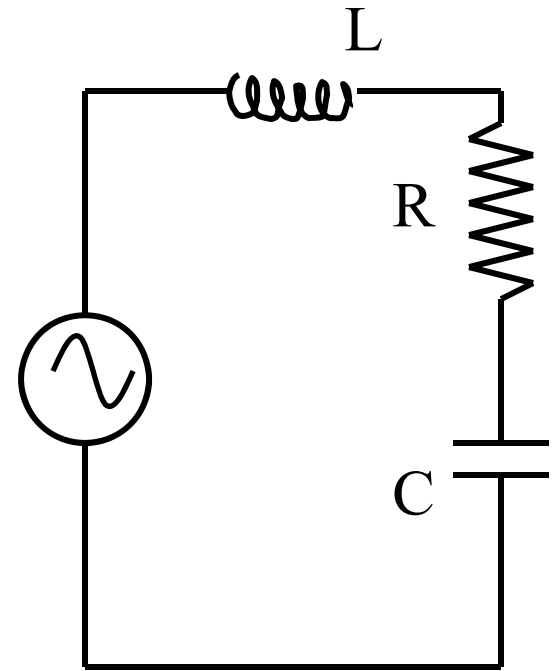
cioè la tensione ai capi di C e L è maggiore di quella di ingresso, di un fattore pari a Q_o .

- Va anche notato che, seppure le due tensioni su L e su C siano grandi, hanno fase opposta, e quindi si elidono istante per istante, e non fanno scorrere alcuna corrente, né nel resistore né nel generatore.

Il circuito RLC serie

EXTRATENSIONI:

La tensione massima, però, si ha per una frequenza leggermente diversa da quella di risonanza.

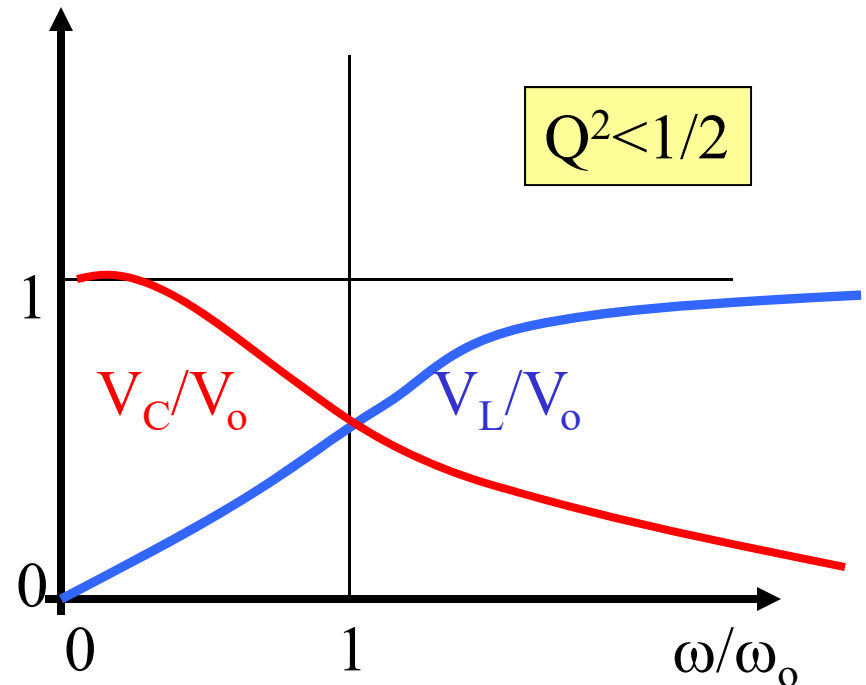
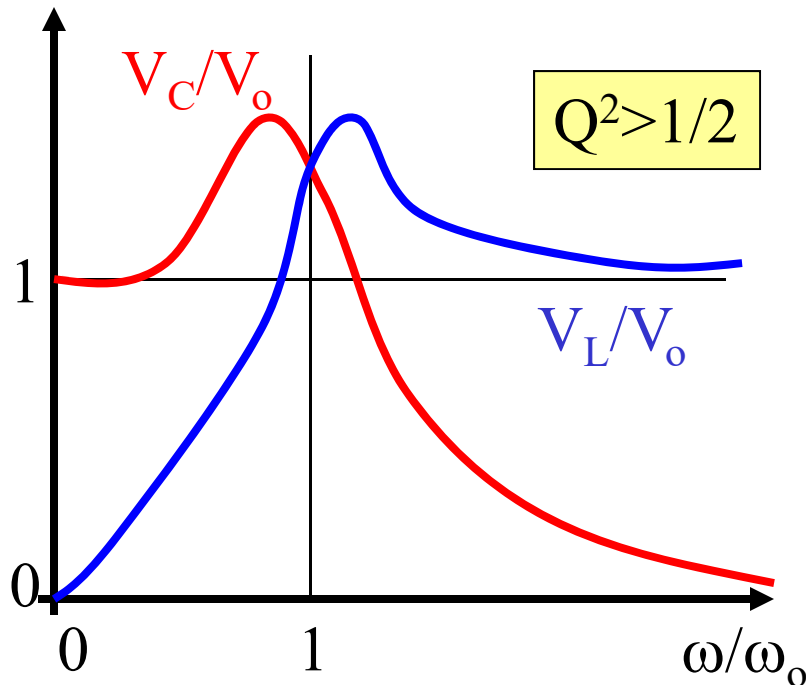
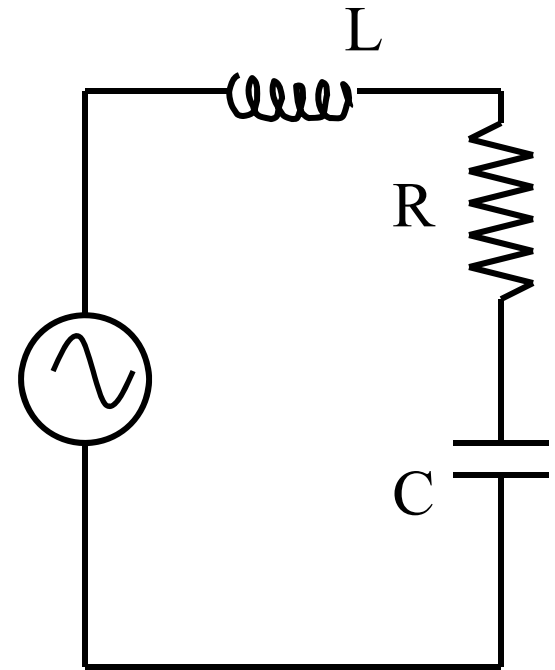


Il circuito RLC serie

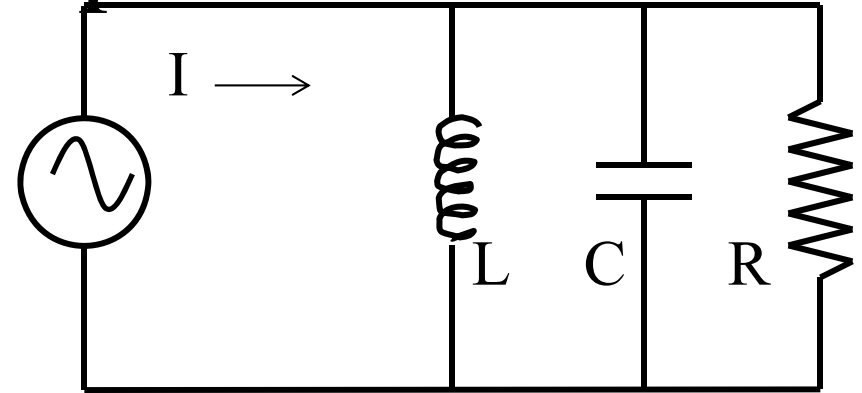
Si può dimostrare che nei due casi

$$\omega_{\max}(V_L) = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{(RC)^2}{2}}} > \omega_o$$

$$\omega_{\max}(V_C) = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2} < \omega_o$$



Il circuito RLC parallelo



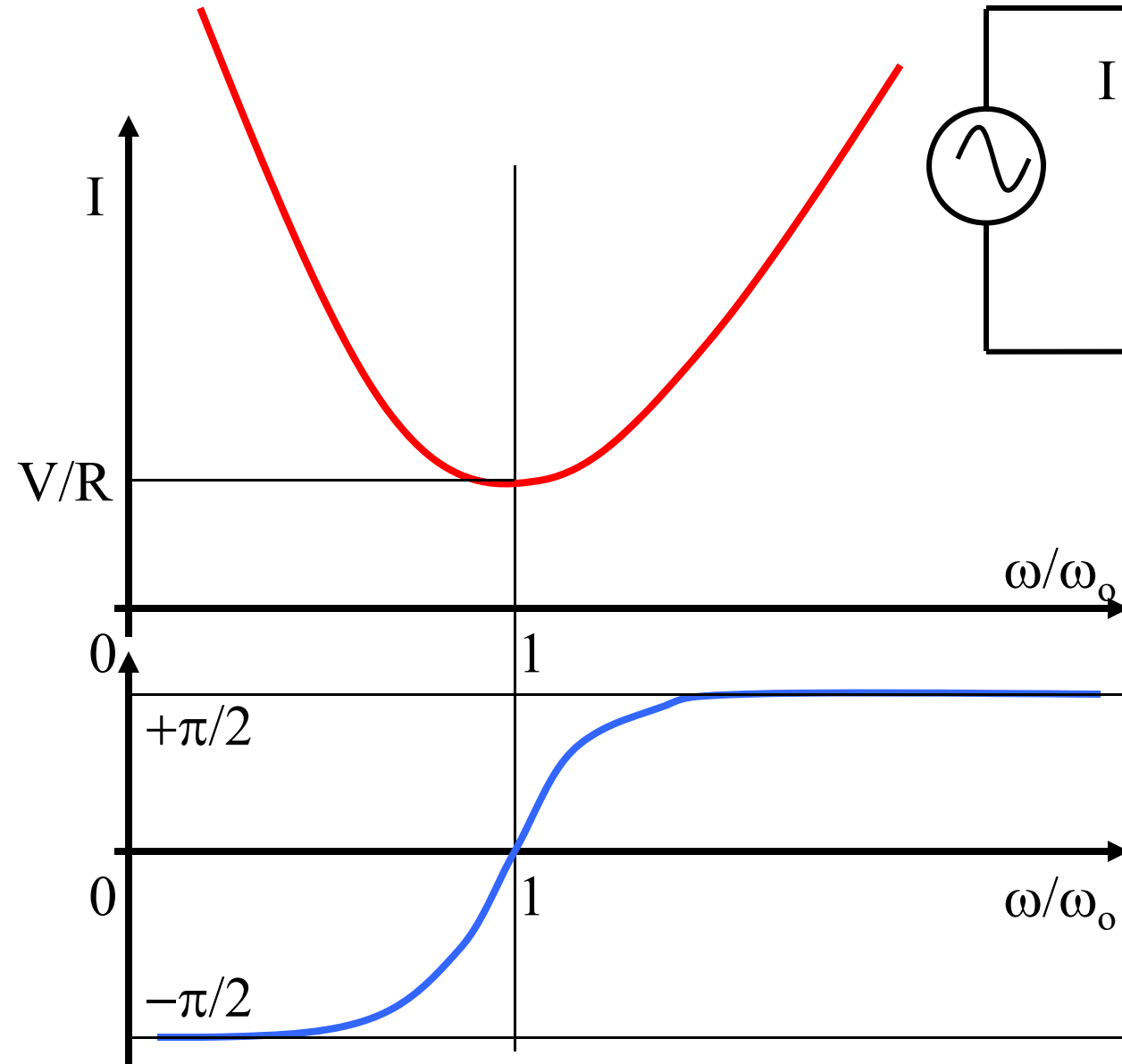
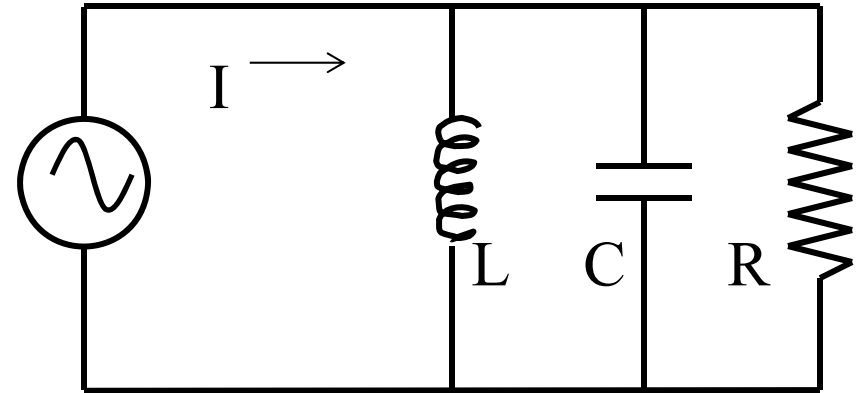
$$\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \left[\frac{1}{R} + j \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right] \right]$$

$$\vec{I} = \vec{V} \frac{1}{\vec{Z}} = \vec{V} \left[\frac{1}{R} + j \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right] \right]$$

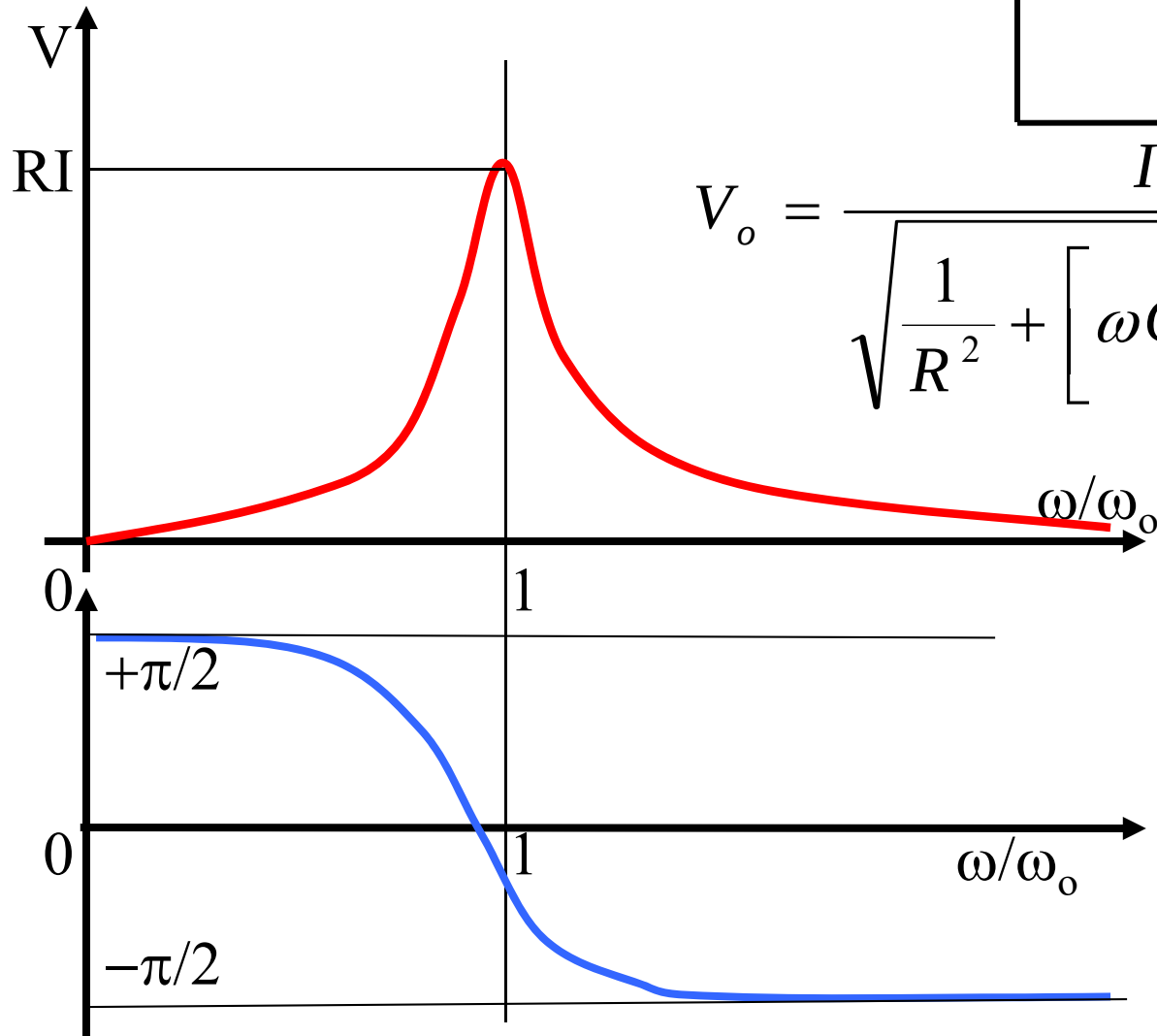
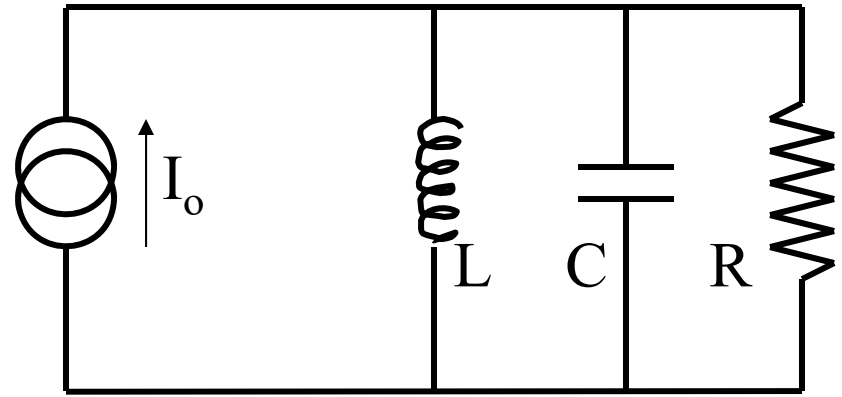
$$I_o = V_o \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right]^2}$$

$$\varphi = \arctg \left[\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) / (1/R) \right] = \arctg \left[\frac{1}{\omega \tau} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \right]$$

Il circuito RLC parallelo



Il circuito RLC parallelo



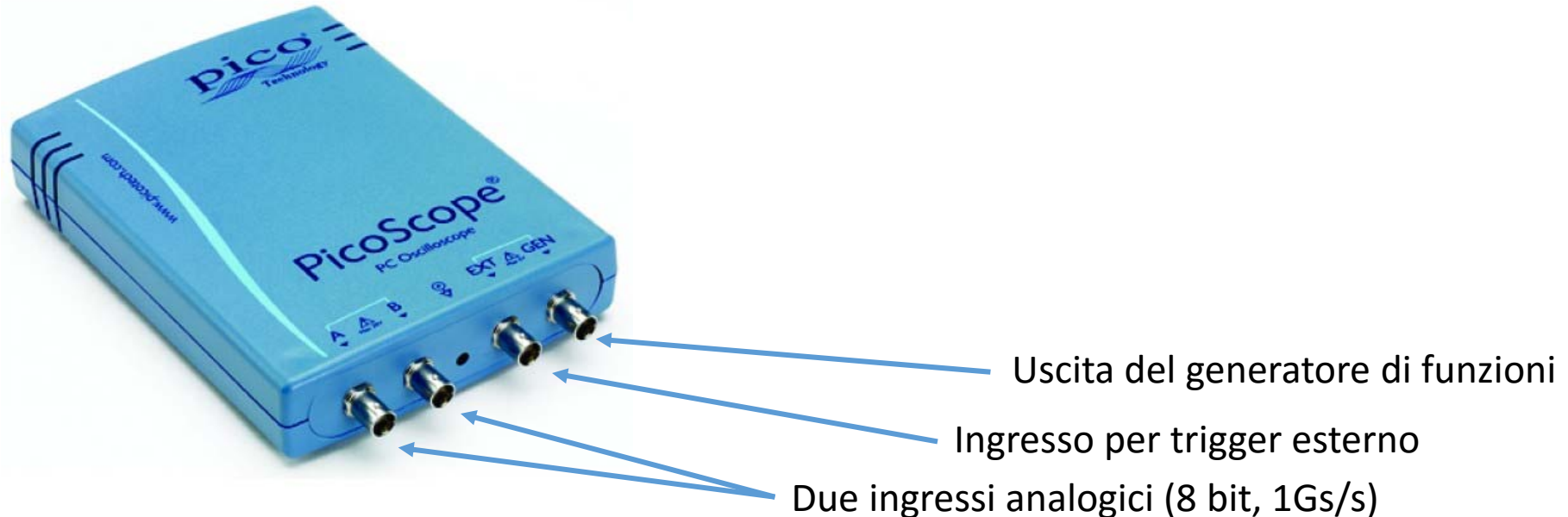
$$V_o = \frac{I_o}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right]^2}}$$

$$\varphi = \arctg \left[\left(-\omega C + \frac{1}{\omega L} \right) / (1/R) \right]$$

$$= \arctg \left[\frac{1}{\omega \tau} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right]$$

Misure con il *pico*scope

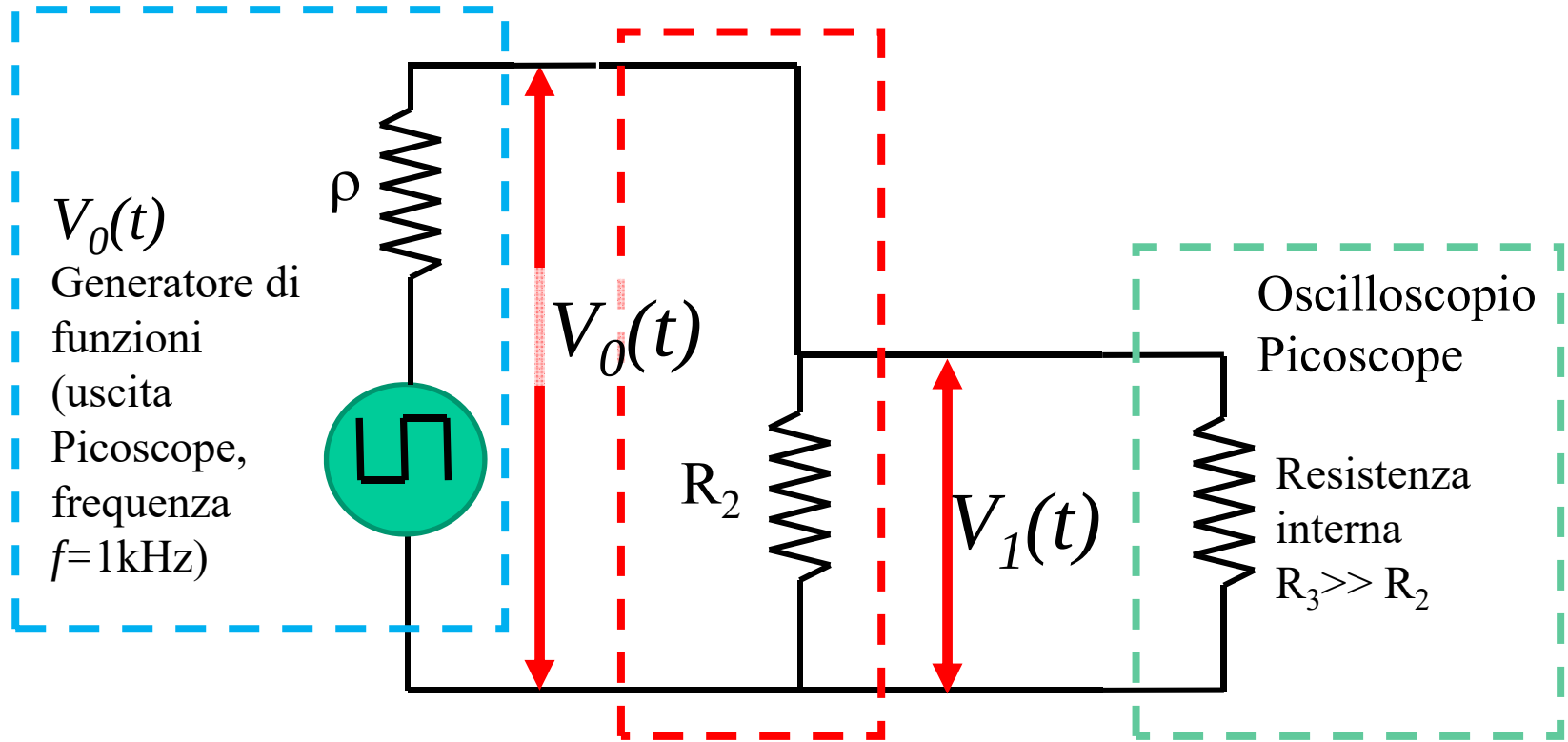
- Ovvero: l' oscilloscopio digitale in azione
- Il picoscope è un oscilloscopio digitale completo di generatore di funzioni, che lavora in simbiosi con un PC (al quale sono demandate le funzioni di visualizzazione e impostazione delle misure)
- Permette di eseguire misure complesse in modo semplice.



Uso del Picoscope per verificare il comportamento di circuiti RC, con onde quadre e sinusoidali in ingresso

- 1) Misura resistenza interna del generatore integrato nel picoscope
- 2) Circuito RC con onda quadra in ingresso: misura costante di tempo dalla salita e dalla discesa dell'onda in uscita
- 3) Circuito RC come integratore
- 4) Circuito RC con onda sinusoidale in ingresso: misura frequenza di taglio del circuito

1) Misura della resistenza interna del generatore di funzioni del picoscope



Si genera un segnale quadro $V_0(t)$ impostandone l'ampiezza a 1V e si legge il valore dell'ampiezza A_0 senza carico. Si inserisce poi una resistenza di carico R_2 e si misura $V_1(t)$ stimandone l'ampiezza A_1 . Dal rapporto tra A_0 e A_1 e dal valore di R_2 si ricava ρ con la formula del partitore.

Immagine schermo con segnale generatore (picoSCOPE) onda quadra $V_0(t)$ con ampiezza $A_0=1.00\text{ V}$, frequenza 1 KHz

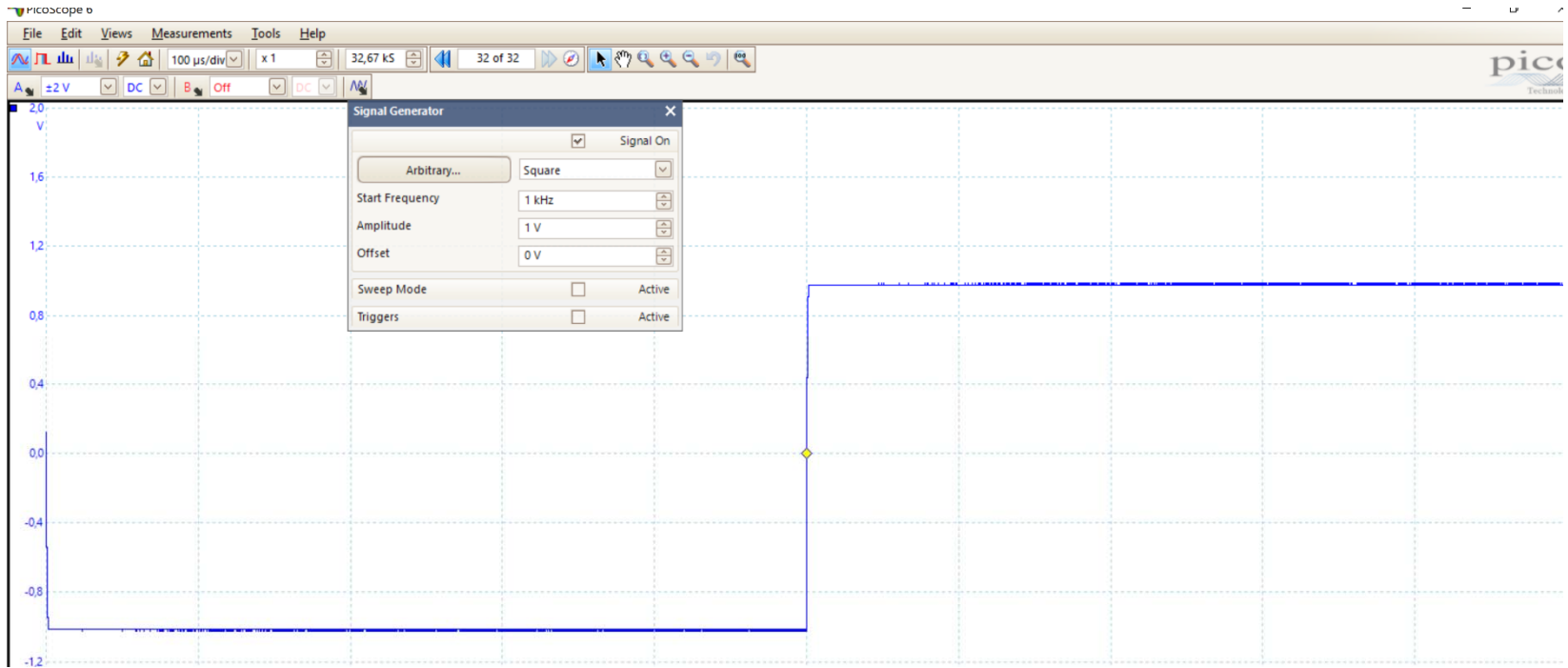
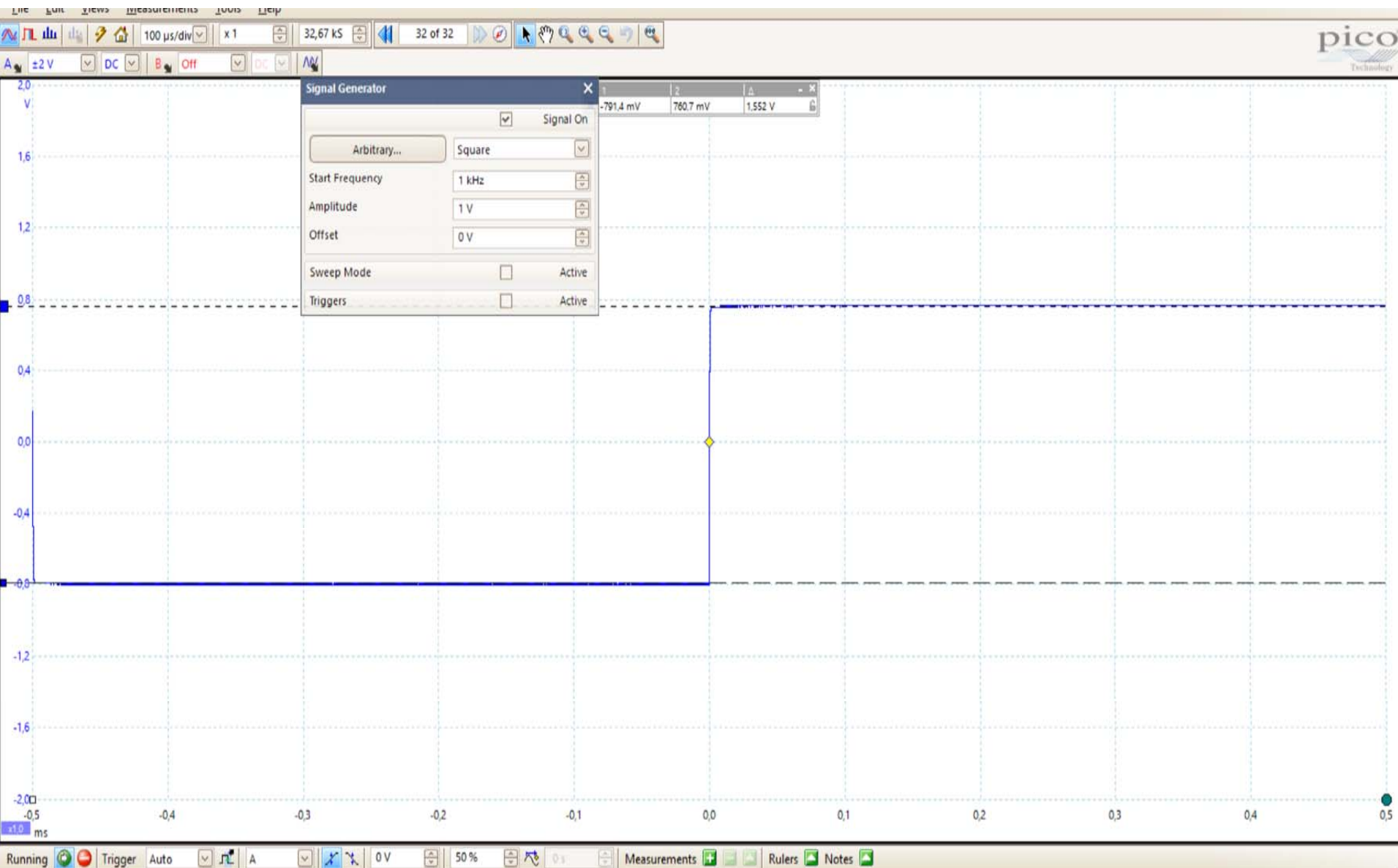


Immagine schermo con segnale ai capi di R_2 : onda quadra $V_1(t)$ con ampiezza $A_1 = (1.552 / 2)$ V , frequenza 1 kHz



Stima resistenza interna ρ dal confronto delle due misure (formula del partitore di tensione):

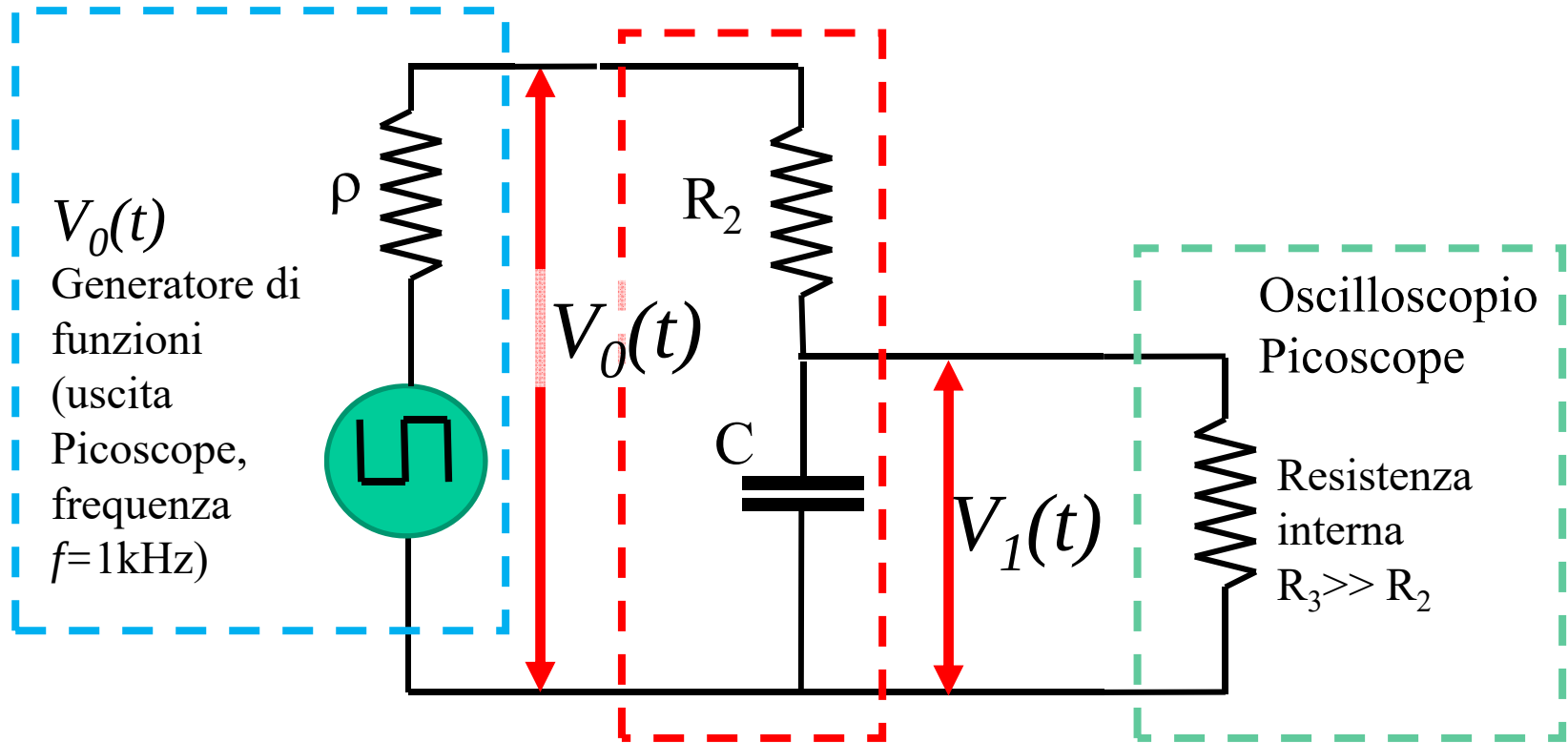
$$R_2 = 2.7k\Omega$$

$$A_0 = 1.000 V$$

$$A_1 = 0.776 V$$

$$\rho = R_2 \left(\frac{A_0 - A_1}{A_1} \right) \approx 430 \Omega$$

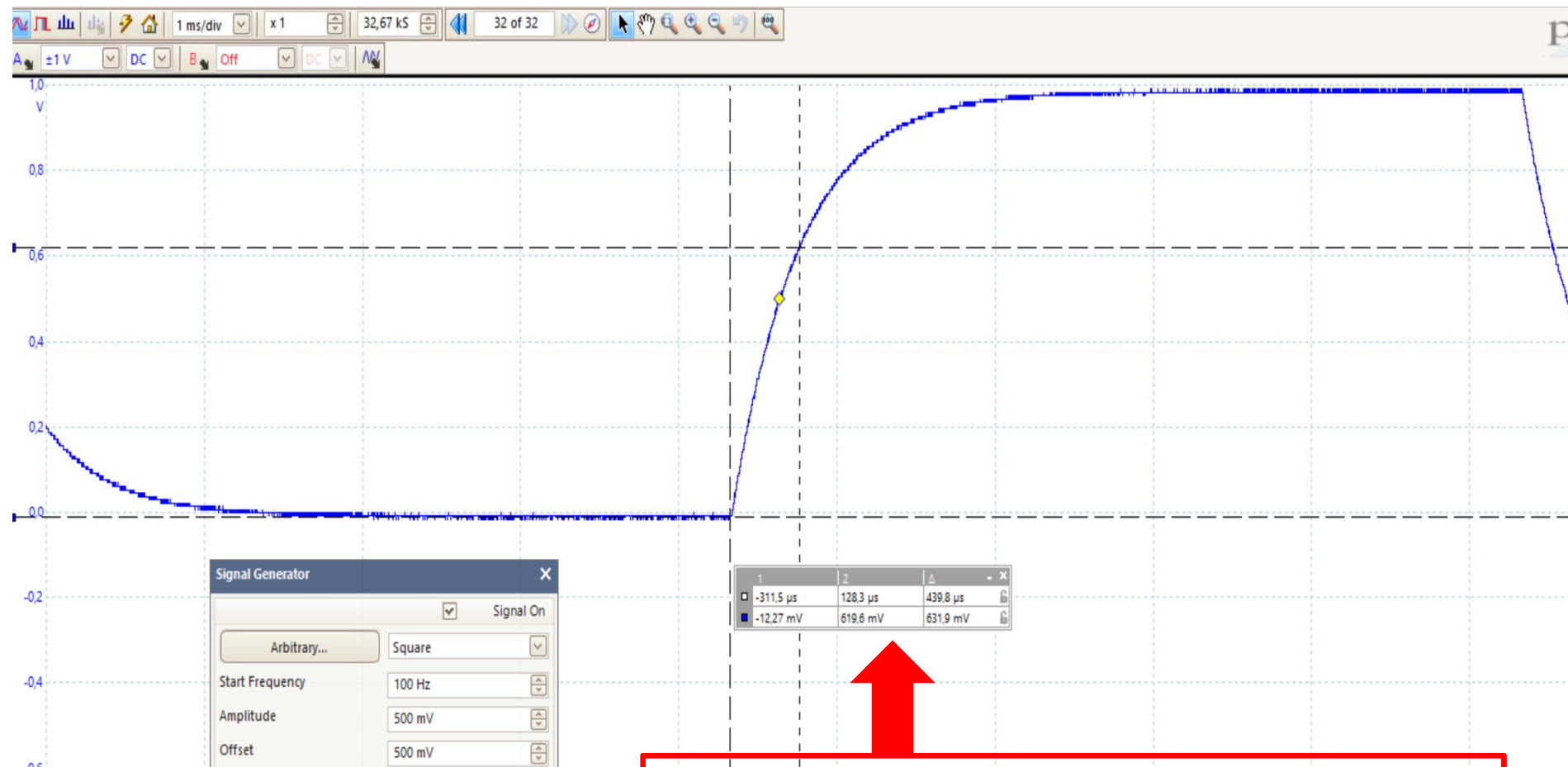
2) RC eccitato con onda quadra



Si provano due circuiti che hanno nominalmente la stessa costante di tempo:

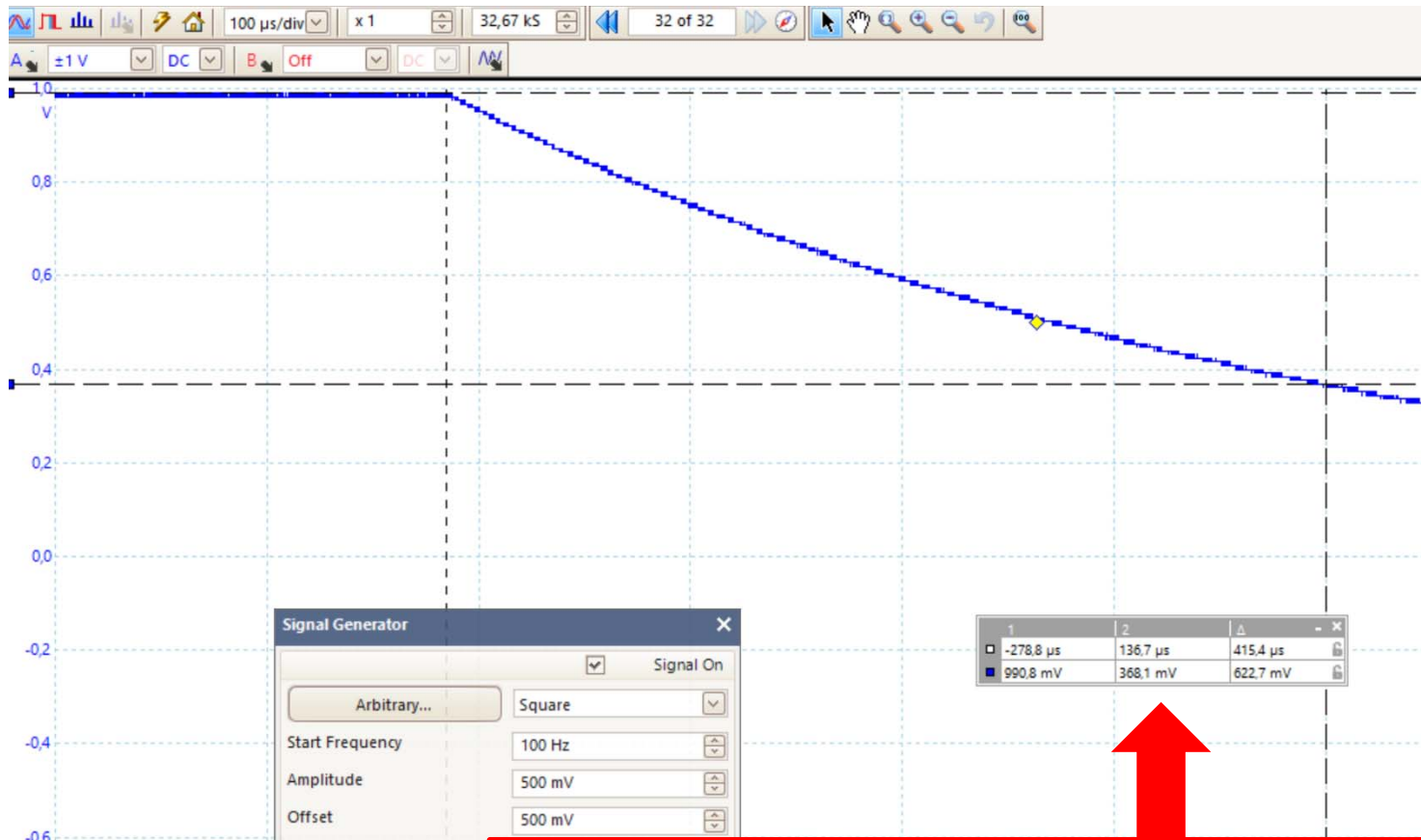
$R_2=2.7\text{k}\Omega$ e $C=150\text{nF}$ oppure $R_2=27\text{k}\Omega$ e $C=15\text{nF}$

Costante di tempo per circuito RC ($C=150\text{ nF}$ $R=2.7\text{ K}\Omega$) da dati di salita



usando i cursori si cerca il momento in cui l'ampiezza diventa pari a $(1-e^{-1})$ del valore asintotico: si trova $\Delta t = \tau = 440\mu\text{s}$

Costante di tempo per circuito RC ($C=150\text{ nF}$ $R=2.7\text{K}\Omega$) da dati di discesa



usando i cursori si cerca il momento in cui l'ampiezza diventa pari a e^{-1} del valore di partenza: si trova $\Delta t = \tau = 420\mu\text{s}$

- Teoricamente la costante di tempo dovrebbe essere pari a $\tau = (\rho + R_2)C$
- Con i valori nominali dei componenti:

$$R_2 = 2.7k\Omega$$

$$\rho = 0.42k\Omega$$

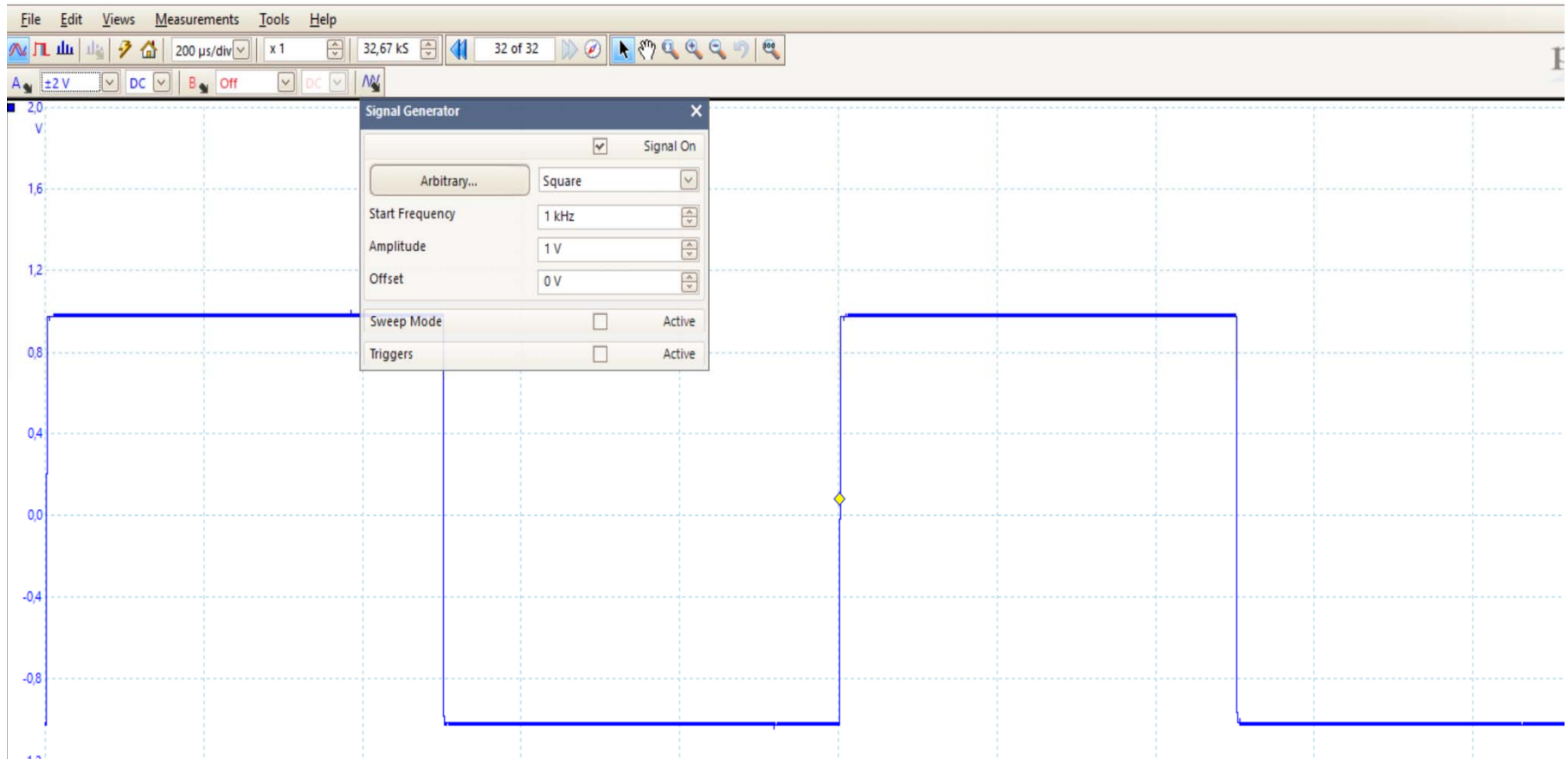
$$C = 150 \times 10^{-9} F$$

si dovrebbe avere:

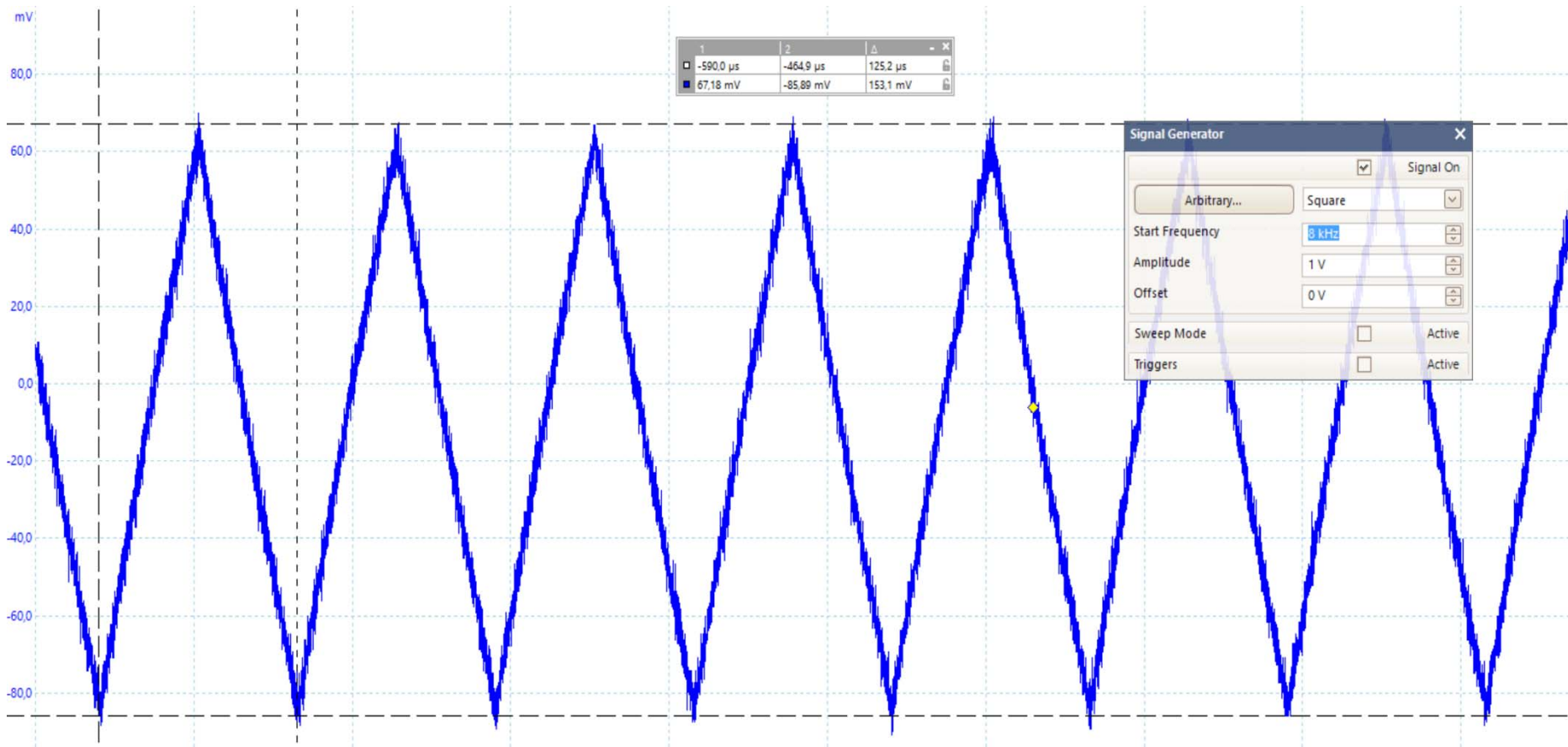
$$\tau = (\rho + R_2)C \approx 470\mu s$$

- in buon accordo con quanto misurato.
- Quindi la frequenza di taglio di questo RC è pari a $f = \frac{1}{2\pi\tau} = 340Hz$

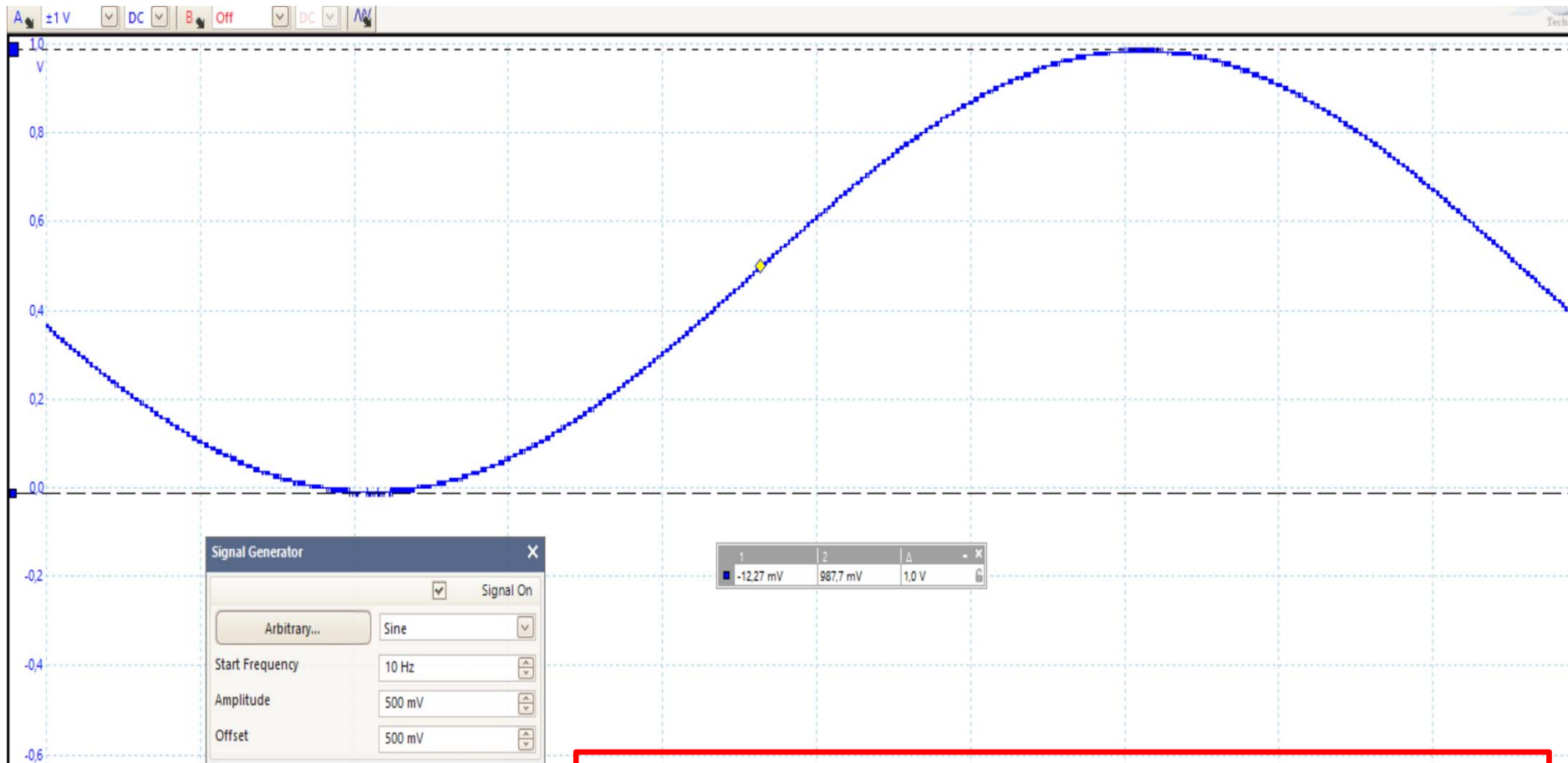
3) Circuito RC come integratore: onda quadra in ingresso



Circuito RC come integratore:
segnale in uscita a frequenza $f=8\text{KHz}$ ($\gg f_{\text{taglio}}$)

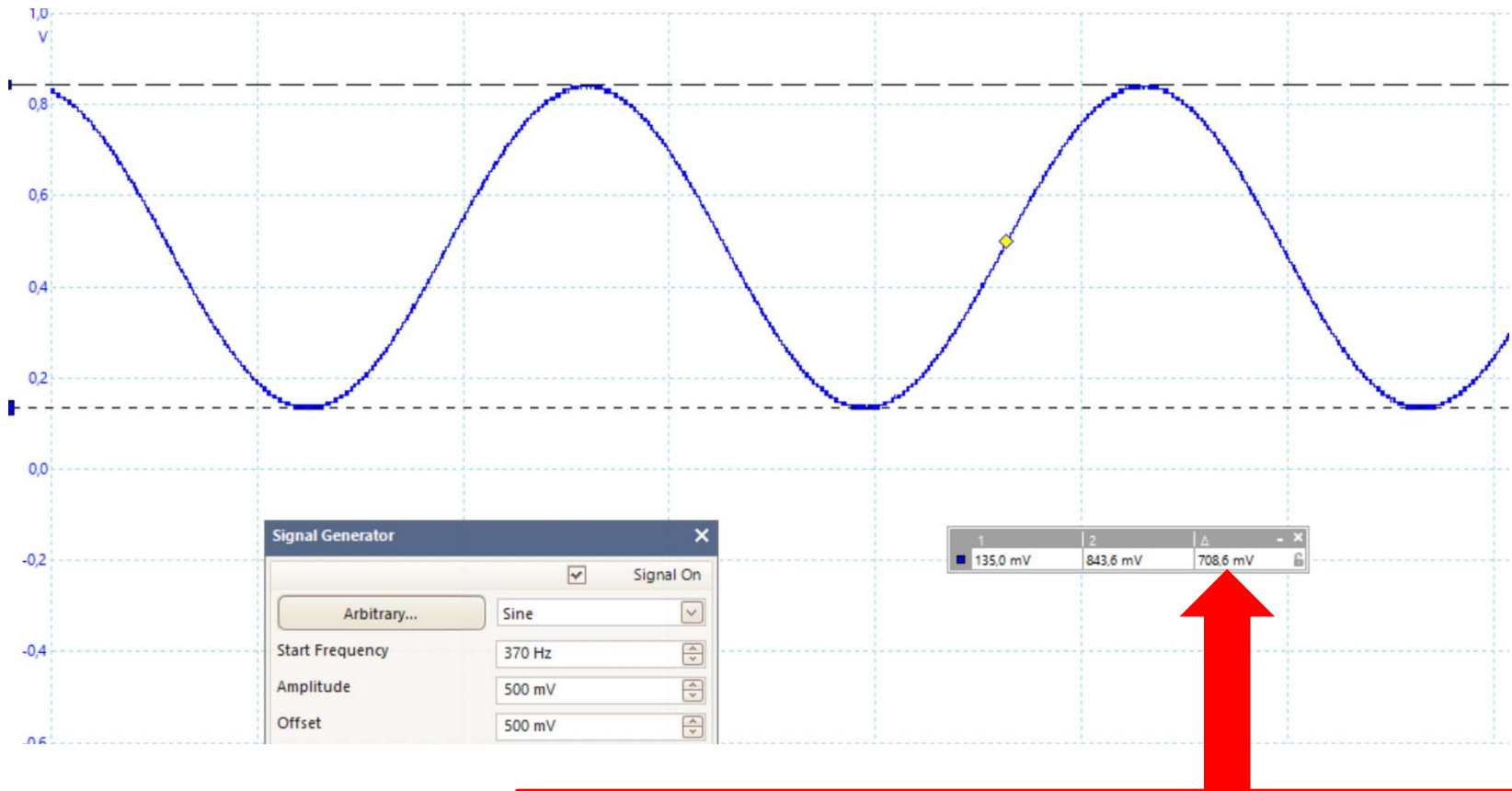


4) Risposta in frequenza circuito RC con segnale sinusoidale in ingresso.



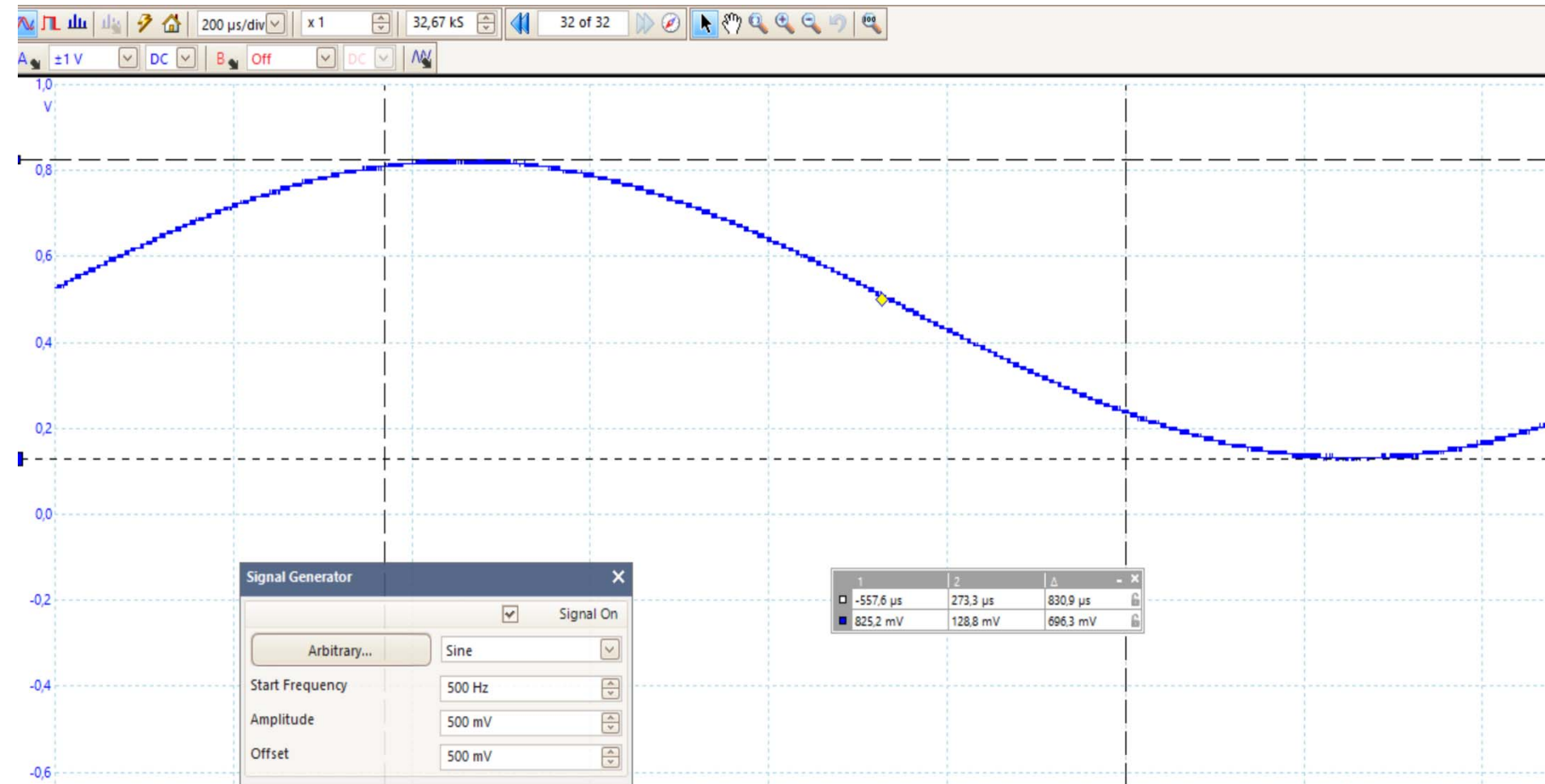
Si inizia con una frequenza (10Hz) $\ll$ di quella di taglio e si misura l'ampiezza.

Frequenza di taglio circuito RC, da confrontare con quella ricavata dalla costante di tempo misurata prima (circa 340 Hz)

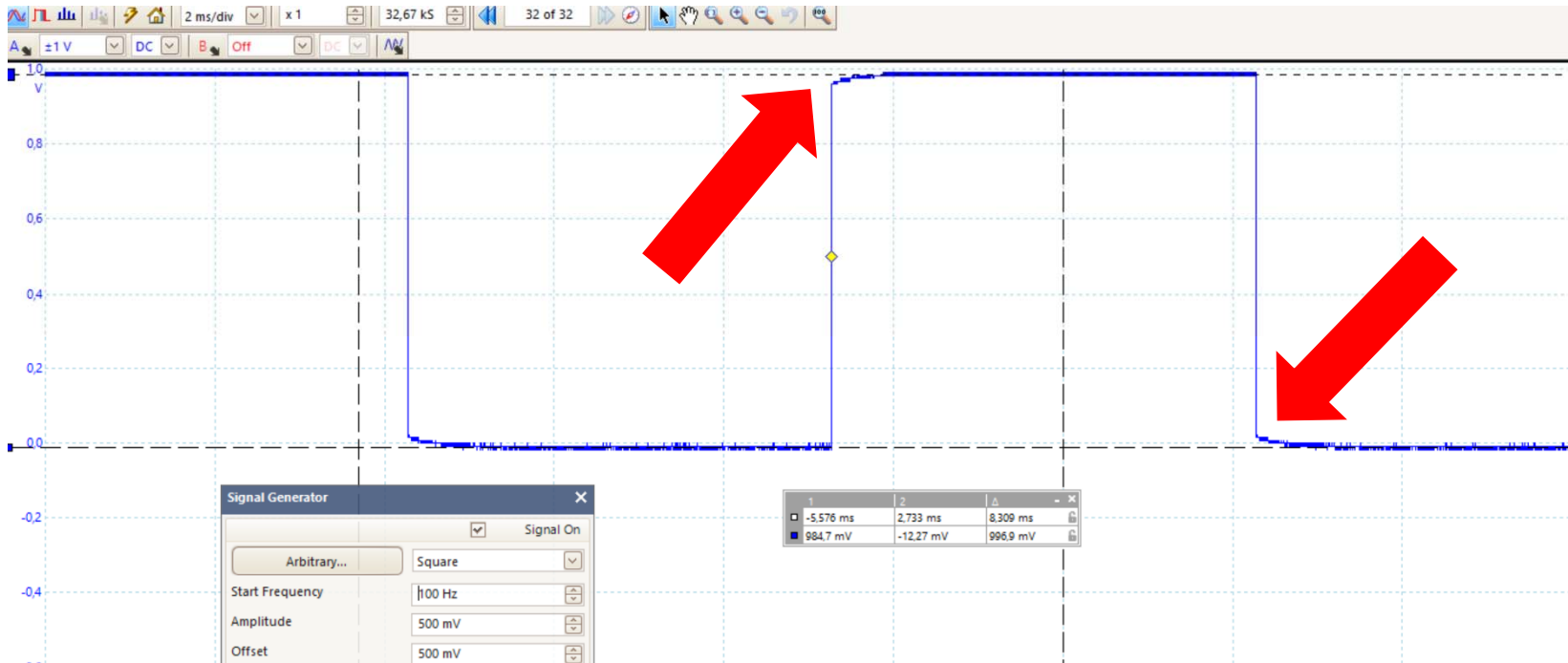


Si varia la frequenza finchè l'ampiezza non diventa $1/\sqrt{2}$ di quella a basse frequenze

Altro RC ($C=15\text{ nF}$, $R=27\text{k}\Omega$)

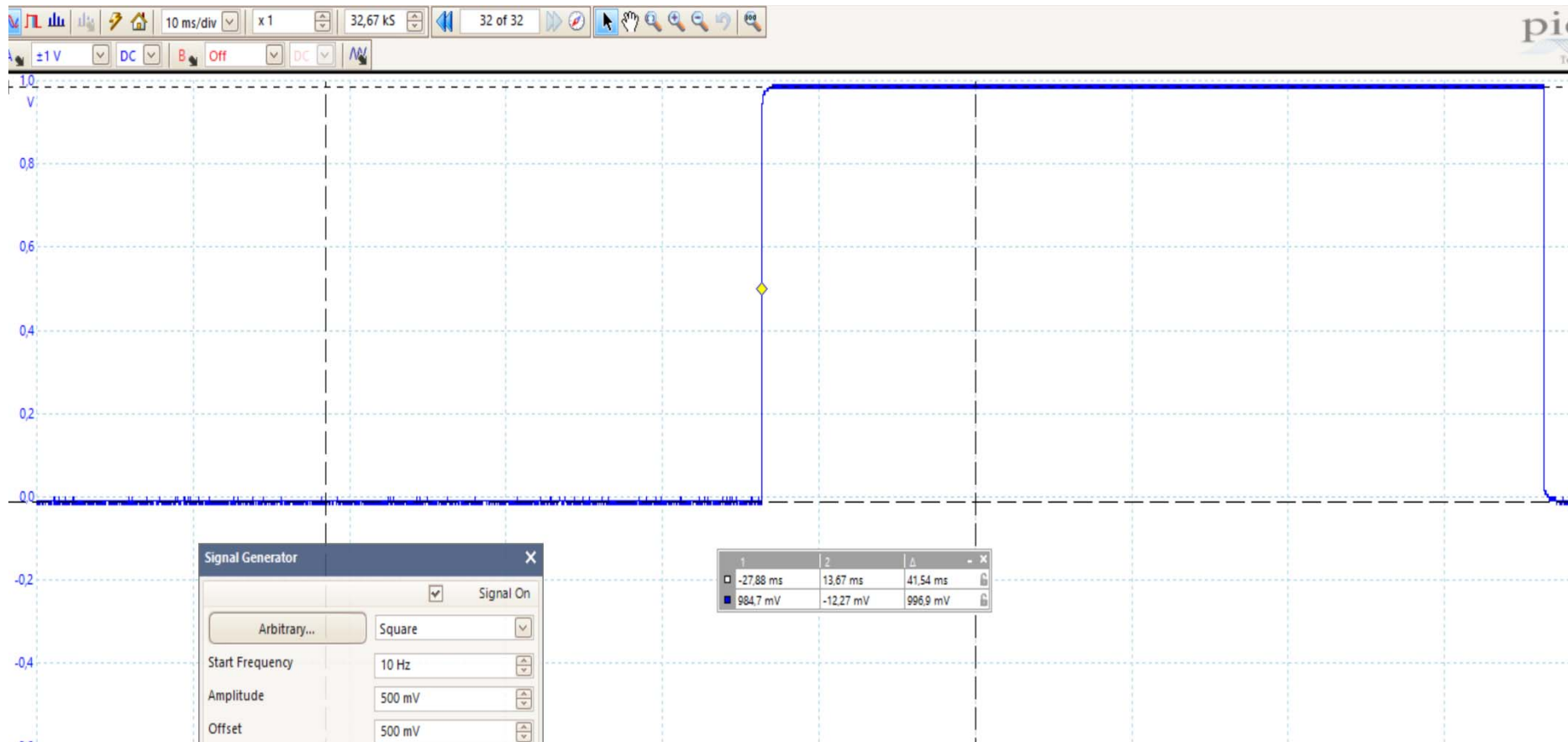


Dettagli dell' onda quadra in ingresso:

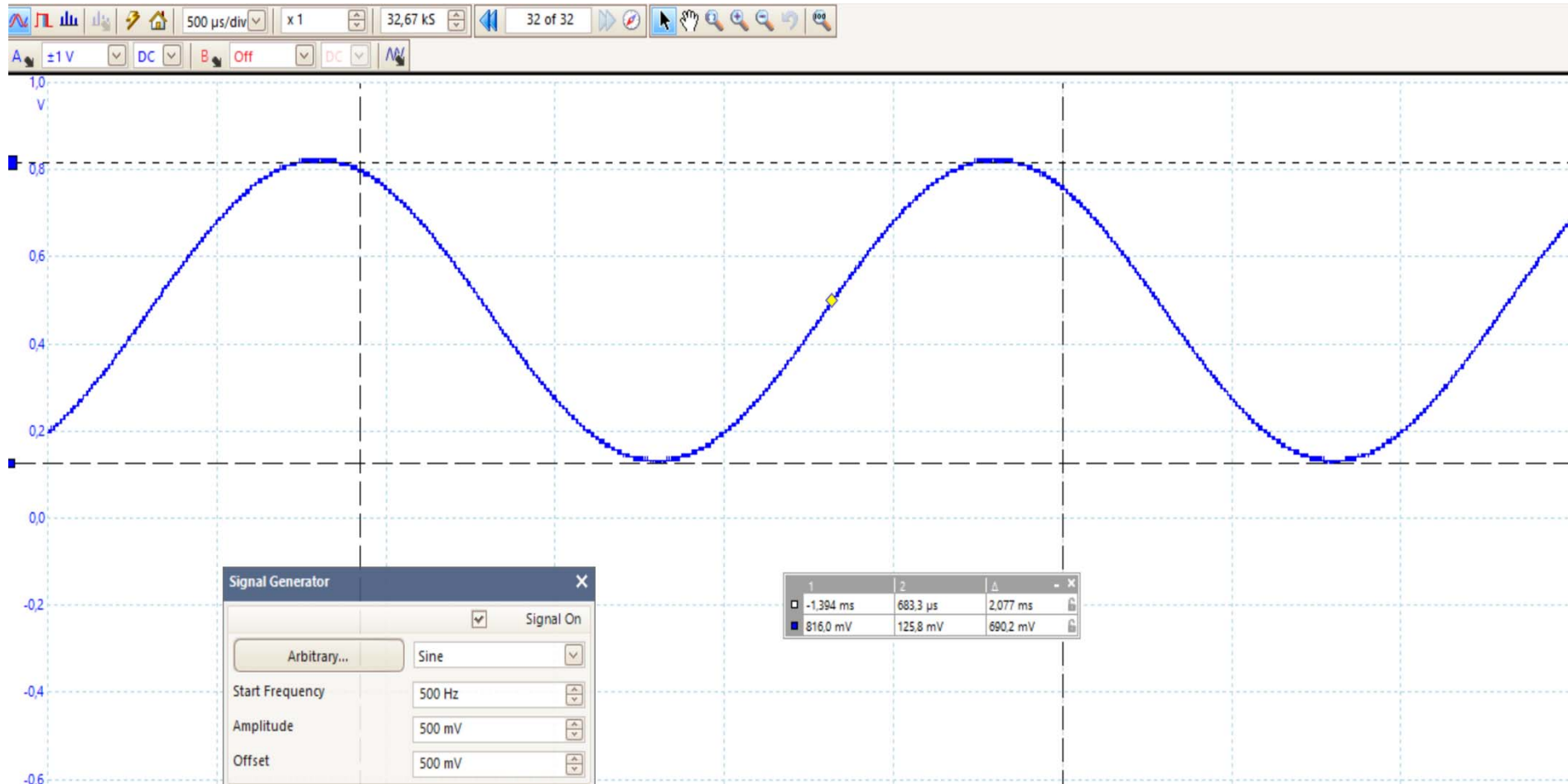


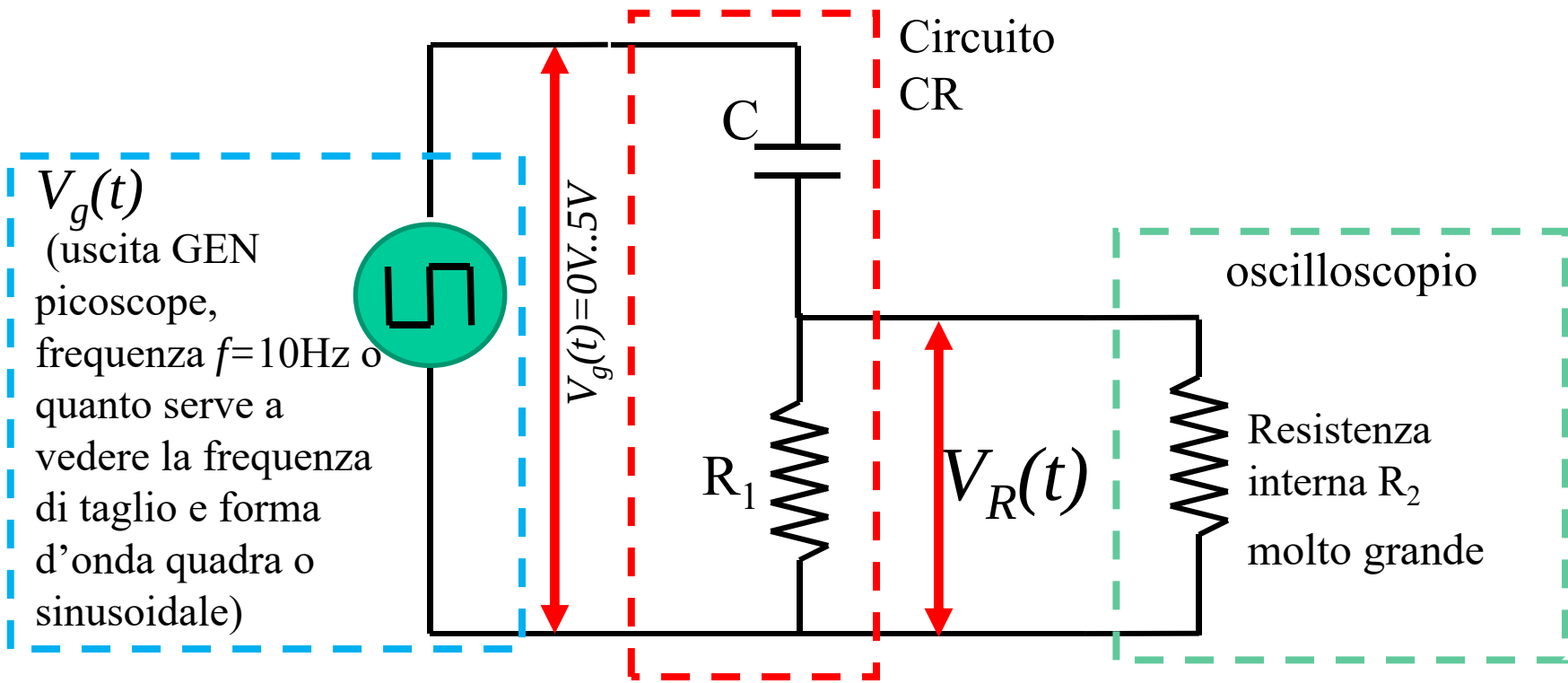
Quando il condensatore si carica (in un verso o nell'altro) il generatore, a causa della sua resistenza interna, fatica a mantenere l'ampiezza impostata per l'onda.

Stessa onda quadra in ingresso, a 10 Hz



RC ($C=15\text{ nF}$, $R=27\text{K}\Omega$), circa 500 Hz





Nello stesso modo si studia il circuito passa alto (CR) invertendo la disposizione di R e C, e si visualizza la sua azione come derivatore a basse frequenze