

## Esperienza 3 : circuiti RC e CR

Corso di Laboratorio di Elettromagnetismo e Circuiti, prof. S. Masi

### 1 MISURE DI RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN CIRCUITO RC

Si hanno a disposizione un generatore di tensione sinusoidale con frequenza  $f$  e ampiezza  $V_m$  variabili, un resistore di resistenza  $R$  e un condensatore di capacità  $C$ , un oscilloscopio.

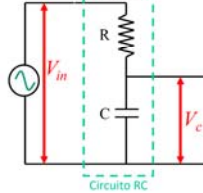
Lo scopo dell'esperienza è di misurare la risposta in frequenza del circuito RC visibile in figura, utilizzato come filtro passa-basso. Dalla teoria sappiamo che

$$\vec{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} \vec{V}_m$$

$$V_{C,rms} = \frac{V_{m,rms}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\varphi = \arctan(-\omega RC)$$

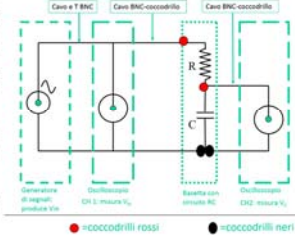
Dove  $V_{C,rms}$  e  $V_{m,rms}$  sono i moduli delle due tensioni alternate,  $\omega$  è la loro pulsazione ( $\omega = 2\pi f$ ), e  $\phi$  è lo sfasamento della  $V_C$  rispetto alla  $V_m$ . Per risposta in frequenza si intendono i grafici della funzione  $V_{C,rms}/V_{m,rms}$  in funzione di  $f$ , e della funzione  $\phi$  in funzione di  $f$ . La costante di tempo  $\tau$  è pari al prodotto  $RC$ .



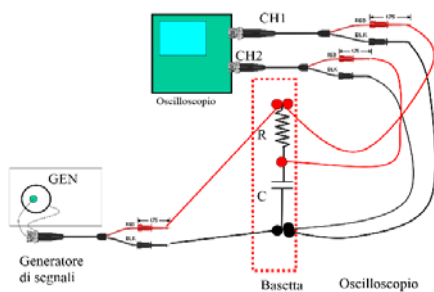
Consiglio una frequenza di taglio  $f_c = \omega_c/2\pi$  dell'ordine di 1000 Hz, in modo da poter agevolmente impostare sul generatore di tensione sia frequenze più basse che frequenze più alte della frequenza di taglio del circuito. Qui  $\omega_c$  è tale da rendere la risposta  $V_{C,rms}/V_{m,rms} \approx 1/\sqrt{2}$ , quindi  $\omega_c = 1/\tau = 1/RC$  e  $f_c = \omega_c/2\pi = 1/(2\pi RC)$ . Ad esempio:  $R=10k\Omega$ ,  $C=10nF$ ,  $f_c=1.6kHz$ .

La prima cosa da fare è stimare la frequenza di taglio del circuito, dai valori di  $R$  e  $C$ , che si possono misurare con il ponte a disposizione.

Si passa poi al montaggio del circuito. Le connessioni da realizzare in pratica sono illustrate nella figura accanto.



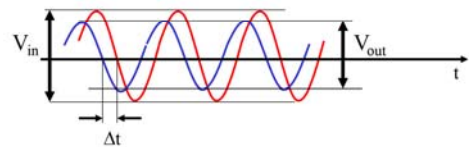
## Montaggio pratico



Si deve poi fare una scansione veloce osservando l'ampiezza del segnale in uscita quando la frequenza del generatore varia da  $0.1f_c$  a  $10f_c$ , in modo da vedere se c'è davvero una sua riduzione (taglio) al di sopra della frequenza di taglio, mentre l'ampiezza del segnale in ingresso deve rimanere costante. Se non c'è il taglio, il circuito non è stato montato bene, e quindi non si deve cominciare a fare le misure di risposta in frequenza finché non si trova l'errore nel montaggio. Quando succede quello che ci si aspetta, si procede alle misure.

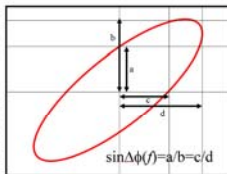
Le misure devono essere effettuate su un ampio intervallo di frequenze, possibilmente da  $f_c/100$  a  $f_c \cdot 100$ , in modo da evidenziare la forte riduzione dell'ampiezza ed il forte sfasamento del segnale in uscita a frequenze molto più alte di quella di taglio, e la pratica identità tra il segnale in uscita e quello in ingresso a frequenze molto più basse di quella di taglio.

Visualizzando  $V_C$  e  $V_m$  in funzione del tempo (vedi figura sotto, ricordarsi di azzerare le due tracce sulla metà dello schermo mettendo a GND i due ingressi) si costruisce una tabella di  $f$ ,  $V_{m,rms}$ ,  $V_{C,rms}$ ,  $\Delta t$ . Da queste misure si ricavano le altre due colonne per  $A(f) = V_{C,rms}/V_{m,rms}$  e  $\phi(f) = 2\pi \Delta t / T$ , sulle quali va propagato l'errore di lettura di  $V_{m,rms}$ ,  $V_{C,rms}$ ,  $\Delta t$ , e che vanno graficate.



Dai grafici si ricava il valore della frequenza di taglio: da quello del rapporto tra i moduli, stimando a che frequenza questo viene ridotto di 0.707, da quello dello sfasamento stimando a che frequenza è pari a  $45^\circ$ .

Visualizzando poi  $V_{m,rms}$  in funzione di  $V_{C,rms}$  (modalità XY, ricordarsi di centrare il puntino luminoso mettendo a GND i due ingressi all'inizio, vedi figura a lato) si costruisce una tabella di  $f$ ,  $a$ ,  $b$ . Si ricava poi  $\phi(f) = \arcsin(a/b) = \arcsin(c/d)$ , e si grafica, ottenendo un'ulteriore valutazione della frequenza di taglio.



### 2 MISURE DI RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN CIRCUITO CR

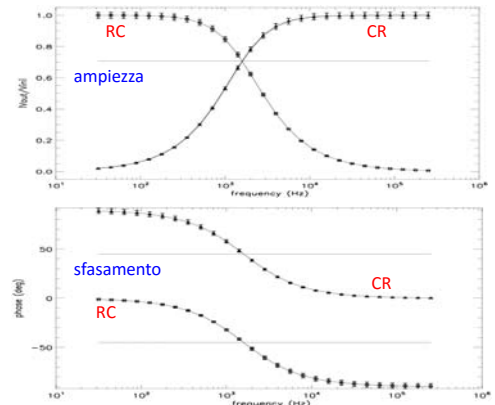
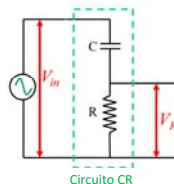
Questo circuito si ottiene dal precedente scambiando di posto  $R$  e  $C$ . Dalla teoria sappiamo che

$$\vec{V}_R = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \vec{V}_m$$

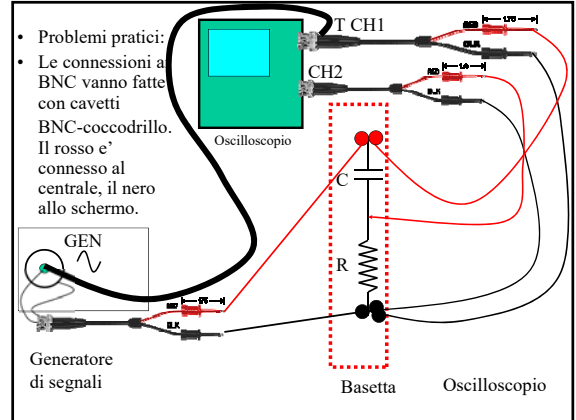
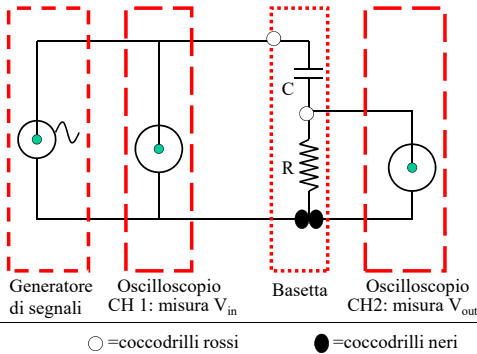
$$V_{R,rms} = \frac{\omega RC V_{m,rms}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\varphi = \arctan(1 - \omega RC)$$

Per le misure e i grafici si procede esattamente come nel caso precedente. A titolo di esempio, riportiamo i grafici che si dovrebbero ottenere (sia RC che CR):

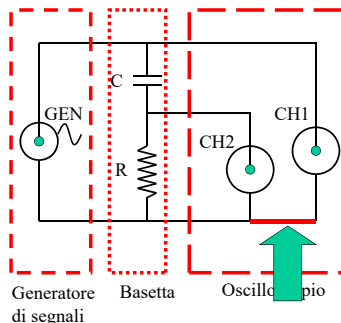


## Circuito CR : schema di montaggio



## Misure su circuiti RC e CR in regime sinusoidale

- La connessione tra la GND del CH1 e la GND del CH2 (cioè tra gli schermi dei connettori BNC di ingresso) è già presente all'interno dell'oscilloscopio.
- Ci si deve ricordare di questo quando si costruisce un qualsiasi circuito: la connessione di GND deve essere fatta sempre con questo punto.



## Perché in modalità XY si vede un'ellisse ?

- I due segnali che inviamo agli ingressi x e y (e quindi le conseguenti deflessioni del puntino luminoso sugli assi x e y del monitor) sono:
 
$$\begin{cases} x = X \sin(\omega t) \\ y = Y \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$
- Al passare del tempo il puntino luminoso percorrerà tutti i punti descritti dalle due equazioni sopra, che rappresentano quindi l'equazione parametrica della curva percorsa. Si può eliminare il parametro (t) e ricavare quindi l'equazione della traiettoria come segue. Si riscrivono le due equazioni in modo che una dia il seno di  $\omega t$  e l'altra dia il coseno:

$$\frac{x}{X} = \sin \omega t$$

$$\frac{y}{Y} = \frac{x}{X} \cos \varphi + \cos \omega t \Rightarrow \frac{1}{\sin \varphi} \left[ \frac{y}{Y} - \frac{x}{X} \cos \varphi \right] = \cos \omega t$$

- Quadrando le due equazioni e sommando membro a membro si elimina  $t$ , ottenendo

$$\left( \frac{x}{X} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[ \frac{y}{Y} - \frac{x}{X} \cos \varphi \right]^2 = 1$$

- da cui

$$\sin^2 \varphi \left( \frac{x}{X} \right)^2 + \left( \frac{y}{Y} \right)^2 - 2 \left( \frac{y}{Y} \right) \left( \frac{x}{X} \right) \cos \varphi + \left( \frac{x}{X} \right)^2 \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$$

- ovvero

$$\left( \frac{x}{X} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{X} \right) \left( \frac{y}{Y} \right) \cos \varphi + \left( \frac{y}{Y} \right)^2 = \sin^2 \varphi$$

Equazione di una ellisse ruotata rispetto agli assi xy

## Perché in modalità XY si vede un'ellisse ?

$$\left( \frac{x}{X} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{X} \right) \left( \frac{y}{Y} \right) \cos \varphi + \left( \frac{y}{Y} \right)^2 = \sin^2 \varphi$$

- è l'equazione di una ellisse il cui semiasse maggiore forma un angolo  $\theta$  rispetto all'asse x, con

$$\tan(2\theta) = \frac{2XY}{Y^2 - X^2} \cos \varphi$$

- Infatti, sostituendo il legame tra coordinate ruotate di un angolo  $\theta$  (coordinate  $x'$  e  $y'$ ) e coordinate non ruotate (coordinate x e y)

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned}$$

nell'equazione sopra, si ha

$$\left( \frac{x' \cos \theta - y' \sin \theta}{X} \right)^2 - 2 \left[ \frac{x' \cos \theta - y' \sin \theta}{X} \right] \left[ \frac{x' \sin \theta + y' \cos \theta}{Y} \right] \cos \varphi + \left[ \frac{x' \sin \theta + y' \cos \theta}{Y} \right]^2 = \sin^2 \varphi$$

- Da cui, (d'ora in poi scriveremo x e y invece che  $x'$  e  $y'$ , per brevità):

$$\frac{x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta}{X^2} - \frac{2x^2 \sin \theta \cos \theta + xy \cos^2 \theta - yx \sin^2 \theta - y^2 \sin \theta \cos \theta}{XY} \cos \varphi + \frac{x^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta + 2xy \sin \theta \cos \theta}{Y^2} = \sin^2 \varphi$$

## Perché in modalità XY si vede un'ellisse ?

- Moltiplicando tutto per  $(XY)^2$  e svolgendo i calcoli si ottiene (d'ora in poi scriveremo x e y invece che  $x'$  e  $y'$ , per brevità):

$$Y^2 (x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta) - 2XY (x^2 \sin \theta \cos \theta + xy \cos^2 \theta - yx \sin^2 \theta - y^2 \sin \theta \cos \theta) \cos \varphi + X^2 (x^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta) = X^2 Y^2 \sin^2 \varphi$$

- Ovvero, raccogliendo i termini in  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $xy$ :

$$x^2 [Y^2 \cos^2 \theta - 2XY \sin \theta \cos \theta \cos \varphi + X^2 \sin^2 \theta] + y^2 [Y^2 \sin^2 \theta + 2XY \sin \theta \cos \theta \cos \varphi + X^2 \cos^2 \theta] - 2xy [Y^2 \sin \theta \cos \theta + XY (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \varphi - X^2 \sin \theta \cos \theta] = X^2 Y^2 \sin^2 \varphi$$

- Questa è l'equazione di una ellisse con semiassemi paralleli agli assi xy se può essere ridotta alla forma  $Ax^2 + By^2 = 1$ , ovvero se

$$Y^2 \sin \theta \cos \theta + XY (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cos \varphi - X^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \rightarrow \dots + XY (1 - 2 \sin^2 \theta) \cos \varphi - \dots = 0 \rightarrow$$

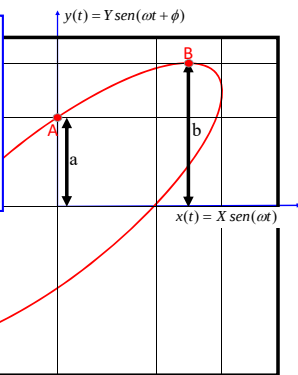
$$\rightarrow X^2 - Y^2 + XY \left[ \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right] \cos \varphi = 0 \rightarrow X^2 - Y^2 + XY \left[ \frac{\cos 2\theta}{(\sin 2\theta)/2} \right] \cos \varphi = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow X^2 - Y^2 + 2XY \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \cos \varphi = 0 \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2XY}{Y^2 - X^2} \cos \varphi$$

- CVD

Come si ricava lo sfasamento dall'ellisse ?

- Nel punto **B** si ha la massima escursione del segnale  $y(t)$ , quindi  **$b=Y$**
- Nel punto **A** si ha che  $x(t)=0$ , quindi  $t=0$ , quindi  **$a=y(0)=Y\sin(\phi)$**
- Dal rapporto tra le due espressioni risulta  **$\sin(\phi)=a/b$**
- Quindi misurando  $a$  e  $b$  si ricava lo sfasamento  $\phi$  tra  $y(t)$  e  $x(t)$ .



## Funzione di trasferimento

- Dato un circuito con un ingresso ed una uscita (dispositivo a due porte), **lineare** (cioè formato da componenti lineari), la funzione di trasferimento è definita come il rapporto tra il segnale (di solito una tensione) in uscita ed il segnale in ingresso.

Diagram illustrating a black box system. The input is labeled  $V_{IN}$  and the output is labeled  $V_{OUT}$ . The transfer function is given by the formula:

$$T = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

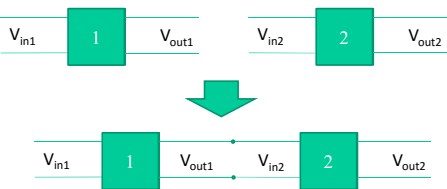
- In generale la funzione di trasferimento dipenderà dalla frequenza del segnale.
- Per esprimere gli effetti del circuito sia sull'ampiezza che sulla fase del segnale che viene trasferito all'uscita, la funzione di trasferimento è una funzione a valori complessi:

$$\bar{T}(\omega) = \frac{\bar{V}_{out}(\omega)}{\bar{V}_{in}(\omega)} \iff \begin{cases} |\bar{T}(\omega)| = \frac{|\bar{V}_{out}(\omega)|}{|\bar{V}_{in}(\omega)|} \\ \varphi(\omega) = \varphi_{out}(\omega) - \varphi_{in}(\omega) \end{cases}$$

- Qui  $V_{in}$  e  $V_{out}$  sono i fasori che descrivono segnale in ingresso e in uscita.
- Oggi misurerete la funzione di trasferimento dei circuiti RC e CR.

## Circuiti in cascata

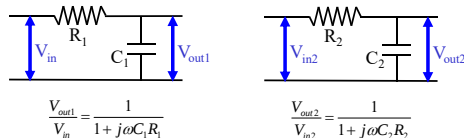
- Supponiamo di avere due circuiti a due porte e di collegarli in cascata, cioè di connettere l'uscita del primo all'ingresso del secondo:



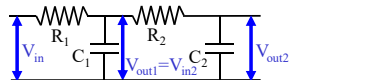
- Ci si chiede quale sia la funzione di trasferimento complessiva  $V_{out2}/V_{in1}$ .
- Faremo prima un esempio concreto, poi generalizzeremo.
- Consideriamo come esempio di dispositivi a due porte due filtri RC passa-basso.

## Due RC in cascata

Consideriamo due filtri passa basso RC :



Possiamo sperare di ottenere un filtro più ripido collegandoli in cascata:

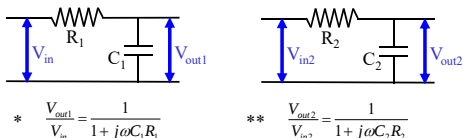


Siccome l'uscita del primo coincide con l'ingresso del secondo, viene voglia di scrivere:

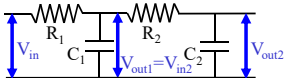
$$\frac{V_{out2}}{V_{in}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{V_{in2}}{V_{in}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{V_{out1}}{V_{in}} = \left[ \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2} \right] \left[ \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1} \right]$$

## Due RC in cascata

Consideriamo due filtri passa basso RC :



Possiamo sperare di ottenere un filtro più ripido mettendoli in cascata:

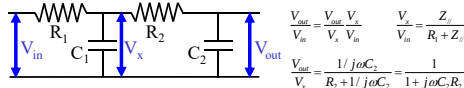


Siccome l'uscita del primo coincide con l'ingresso del secondo, viene

$$\frac{V_{out2}}{V_{in}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{V_{in2}}{V_{in}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{V_{out1}}{V_{in}} = \left[ \frac{1}{1+j\omega C_2 R_2} \right] \left[ \frac{1}{1+j\omega C_4 R_1} \right]$$

**SBAGLIATO !**  
Le formule \* e \*\* valgono solo se i due circuiti sono isolati. La presenza del secondo circuito modifica la risposta del primo. Vediamo come.

## Due RC in cascata



$$Z_{in} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{\frac{j\omega R_2 C_2 + 1}{j\omega C_1 j\omega C_2}}{\frac{j\omega C_1 + j\omega C_2 - \omega^2 C_1 C_2 R_2}{j\omega C_1 j\omega C_2}} = \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{-\omega^2 C_1 C_2 R_2 + j\omega(C_1 + C_2)}$$

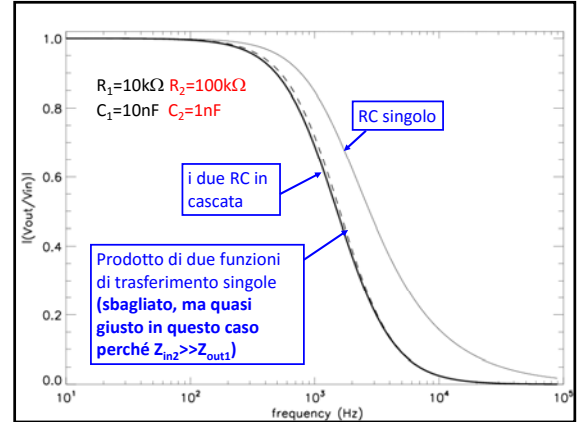
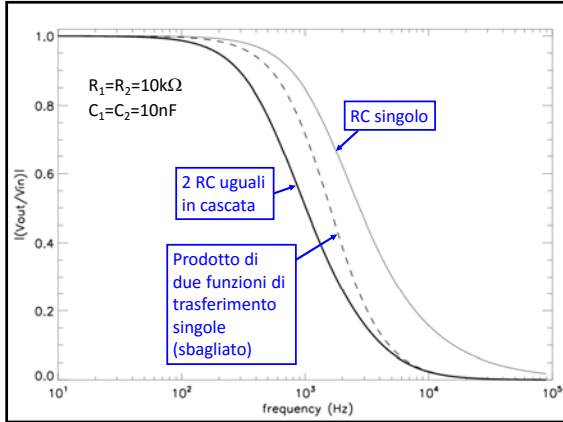
$$\frac{V_x}{V_{in}} = \frac{Z_{//}}{R_1 + Z_{//}} = \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{R_1 [-\omega^2 C_1 C_2 R_2 + j\omega(C_1 + C_2)] + 1 + j\omega R_2 C_2} = \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_2 R_1 + j\omega[R_2 C_2 + (C_1 + C_2)R_1]}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out}}{V_x} \frac{V_x}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1} \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + j\omega [R_2 C_1 + (C_1 + C_2) R_1]}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{(1 - \omega^2 C_1 C_2 R_2 R_1) + j\omega[R_2 C_2 + (C_1 + C_2)R_1]} = \frac{1}{A(\omega) + j\omega B} = \frac{A(\omega) - j\omega B}{\sqrt{A^2(\omega) + j\omega^2 B^2}}$$

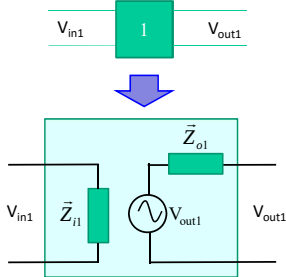
$$\left| \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{A^2(\omega) + \omega^2 B^2}} \quad \tan \varphi = -\frac{\omega B}{A(\omega)}$$

Dove il  
è tra  $C_1$   
la serie  
 $R_2$  e  $C_2$ .



### Circuiti in cascata - generalizzazione

- Ciascun dispositivo a due porte sarà schematizzabile per i nostri scopi con una impedenza d'ingresso, un generatore ed una impedenza d'uscita.

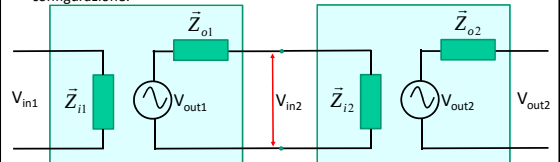


$$T_1 = \frac{V_{out1}}{V_{in1}}$$

- E' la funzione di trasferimento intrinseca del circuito 1, valida quando non c'è carico applicato all'uscita.

### Circuiti in cascata - generalizzazione

- Quando si collegano due circuiti in cascata si ottiene la seguente configurazione:

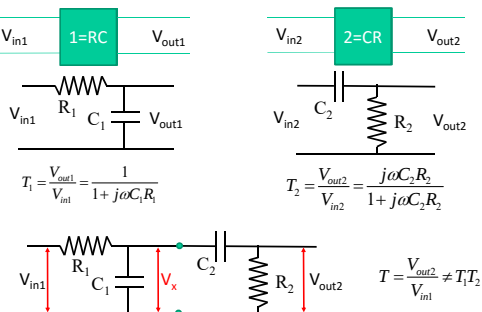


- Quindi la tensione che si otterrà all'uscita del primo - che è la stessa presente all'ingresso del secondo - si troverà dalla formula del partitore:

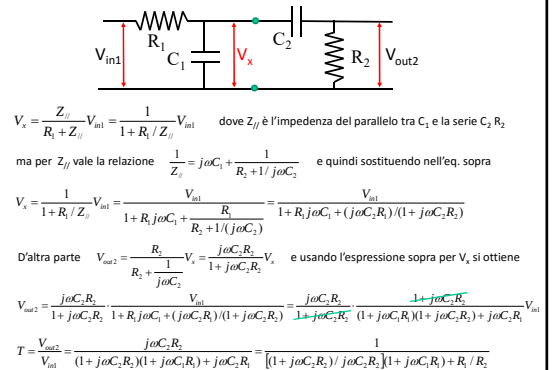
$$V_{in2} = \frac{\bar{Z}_{i2}}{\bar{Z}_{i2} + \bar{Z}_{o1}} V_{out1} \Rightarrow T = \frac{V_{out2}}{V_{in1}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{V_{in2}}{V_{out1}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{\bar{Z}_{i2}}{\bar{Z}_{i2} + \bar{Z}_{o1}} V_{out1} = T_2 \frac{\bar{Z}_{i2}}{\bar{Z}_{i2} + \bar{Z}_{o1}} T_1$$

- Appena i due circuiti vengono connessi insieme, la presenza del secondo circuito modifica il segnale in uscita dal primo, che era  $V_{out1}$ , **riducendolo**.
- Solo se  $Z_{in2} \gg Z_{out1}$  l'inserimento del secondo circuito non modifica apprezzabilmente l'uscita del primo. Solo in tal caso la funzione di trasferimento complessiva è pari al prodotto delle singole f. di trasferimento.

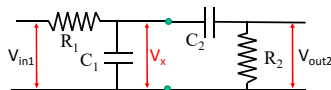
### Circuiti in cascata: secondo esempio - RC seguito da CR



### Circuiti in cascata: secondo esempio - RC seguito da CR



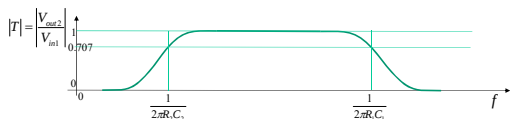
### Circuiti in cascata: secondo esempio - RC seguito da CR



$$T = \frac{V_{out2}}{V_{in1}} = \frac{j\omega C_2 R_2}{(1 + j\omega C_2 R_2)(1 + j\omega C_1 R_1) + j\omega C_2 R_1} = \frac{1}{[(1 + j\omega C_2 R_2) / j\omega C_2 R_2] [1 + j\omega C_1 R_1] + R_1 / R_2}$$

Se  $R_2 \gg R_1$  (cioè l'impedenza di ingresso del secondo circuito è molto maggiore dell'impedenza di uscita del primo) si ha che la funzione di trasferimento complessiva si riduce al prodotto delle due singole:

$$T = \frac{V_{out2}}{V_{in1}} = \frac{1}{[(1 + j\omega C_2 R_2) / j\omega C_2 R_2] [1 + j\omega C_1 R_1] + R_1 / R_2} \approx \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega C_1 R_1)} = T_1 T_2$$



- Torniamo alla teoria dei circuiti risonanti:
- I circuiti LC e RLC sono circuiti risonanti
  - senza smorzamento (LC)
  - con smorzamento (RLC)
- Abbiamo visto che l'oscillazione alla frequenza di risonanza avviene tramite una continua trasformazione di energia elettrica in magnetica e viceversa, in un tempo caratteristico determinato da L e C
- l'energia rimane costante se non c'è dissipazione ( $R=0$ ) e l'oscillazione persiste.
- Nel caso che ci sia dissipazione ( $R>0$ ) l'energia persa può venire rimpiazzata collegando il circuito a un generatore esterno (forzante), il che avviene con massima efficienza se il generatore produce corrente proprio alla frequenza di risonanza.

### Fenomeni di Risonanza

- Già conosciuti in meccanica.
- Quando c'è un sistema che ha una frequenza propria di oscillazione  $\omega_N$ , stimolandolo con una piccola forza oscillante con frequenza  $\omega_F$  molto vicina a  $\omega_N$  si può aumentare moltissimo l'ampiezza del moto.
- Equazione dell'oscillatore forzato:

$$\ddot{x} + \omega_N^2 x = a_0 F \cos(\omega_F t)$$

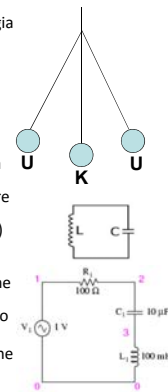
- Soluzione:

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega_N t + \phi) + B \cos(\omega_F t - \delta) \quad B = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_N^2 - \omega_F^2)^2 + \gamma^2 \omega_F^2}}$$

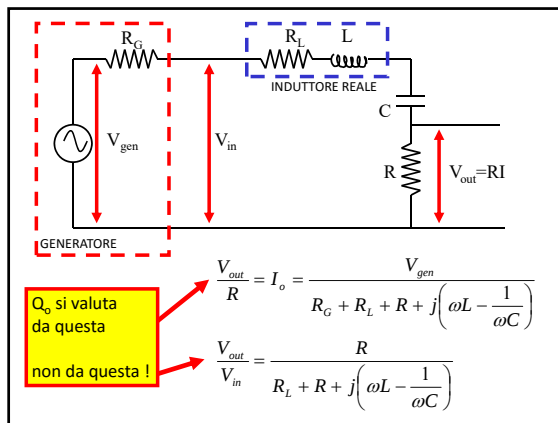
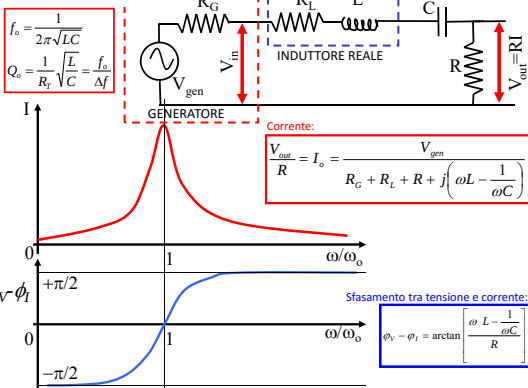
- Esempi pratici: l'altalena, il diapason, il bicchiere che suona, le corde "simpatiche" nella viola d'amore o nella chitarra a 12 corde ...

### Caso elettrico

- L'oscillatore è un sistema in cui si converte l'energia da una forma a un'altra, e viceversa, alternativamente.
- Nel pendolo, da potenziale (all'estremo) l'energia diventa cinetica (nel punto più basso della traiettoria) e poi di nuovo potenziale (all'altro estremo) ... e così via.
- Nel caso elettrico se si connettono tra loro un induttore e un condensatore l'energia si trasforma alternativamente da elettrica (quando il condensatore è completamente carico, e non scorre corrente) a magnetica (quando scorre massima corrente nell'induttore e il condensatore è scarico) e di nuovo a elettrica quando il condensatore è di nuovo carico ... e così via.
- Il circuito avrà una sua frequenza di risonanza (come il pendolo ha la sua frequenza di oscillazione), e si potrà forzare il trasferimento di corrente collegando il circuito ad un generatore di corrente alternata.
- L'analogo della viscosità è la resistenza elettrica, che impedisce il libero trasferimento di cariche (e di energia).



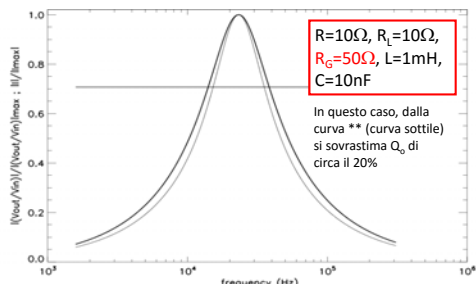
### circuito RLC serie



Differenza tra le 2 formule:

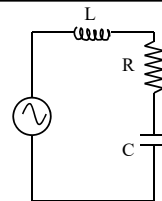
$$* : \frac{V_{out}}{R} = I_o = \frac{V_{gen}}{R_G + R_L + R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

$$** : \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R_L + R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$



## Extrazioni

$$V_o e^{j\omega t} = \left[ R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] I_o e^{j(\omega t + \phi)}$$



- Vediamo i moduli delle tensioni ai capi di ciascun componente reattivo:

$$\vec{V}_C = \vec{Z}_C \vec{I} = \frac{1}{j\omega C} \vec{V}_o$$

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\vec{V}_L = \vec{Z}_L \vec{I} = j\omega L \vec{V}_o$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

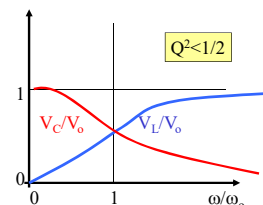
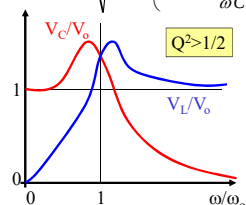
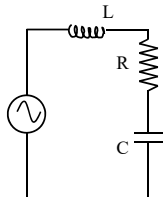
$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

## Il circuito RLC serie

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



## Extrazioni

- Notare che, alla risonanza :

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{1}{\omega C} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \rightarrow \frac{V_C}{V_o} = \frac{1}{R\omega_o C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \rightarrow \frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

cioè la tensione ai capi di C e L è maggiore di quella di ingresso, di un fattore pari a  $Q_o$ .

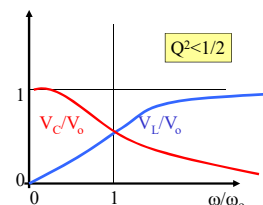
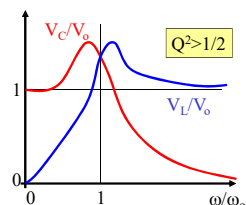
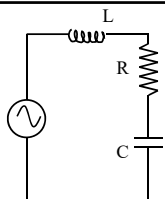
- Va anche notato che, seppure le due tensioni su L e su C siano grandi, hanno fase opposta, e quindi si elidono istante per istante, e non fanno scorrere alcuna corrente, né nel resistore né nel generatore.

## Il circuito RLC serie

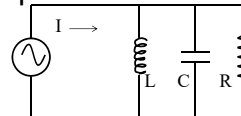
Si può dimostrare che, nei due casi:

$$\omega_{\max}(V_L) = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{(RC)^2}{2}}} > \omega_o$$

$$\omega_{\max}(V_C) = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2} < \omega_o$$



## Il circuito RLC parallelo

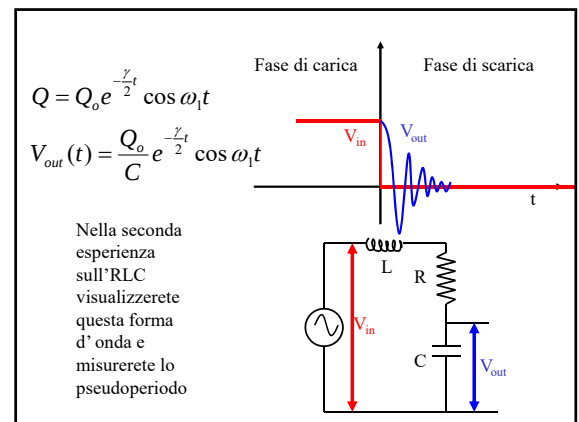
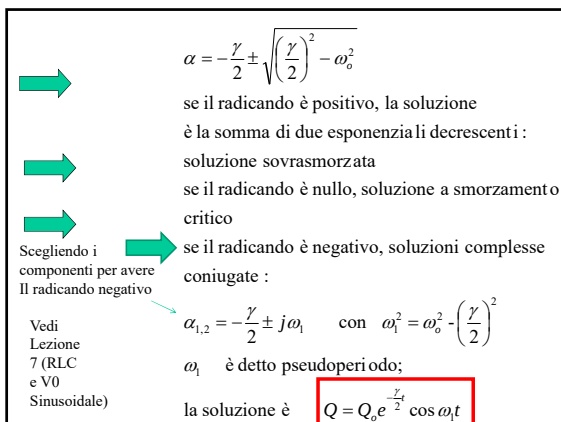
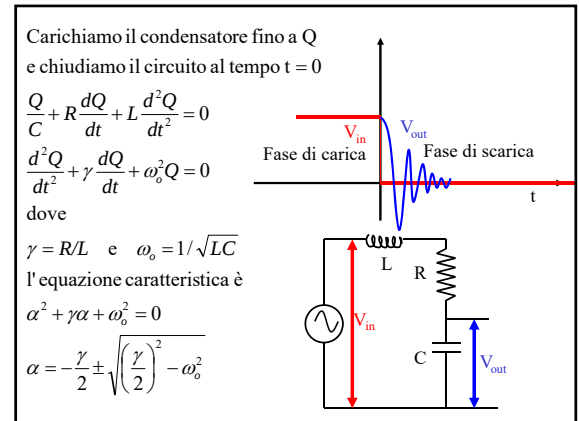
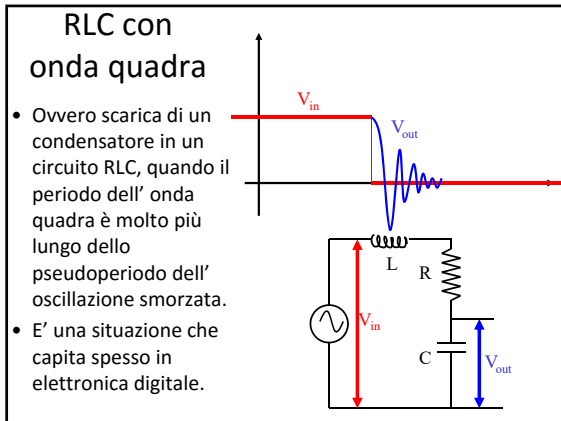
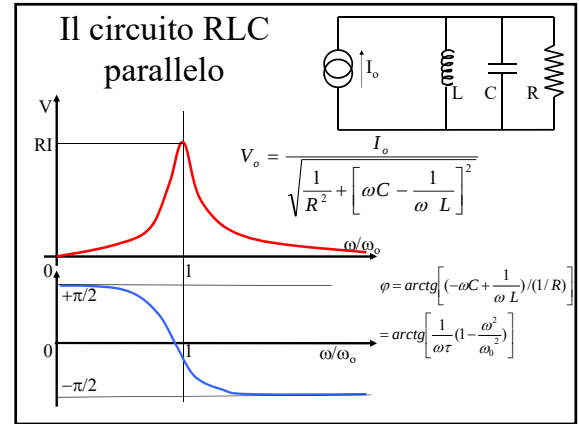
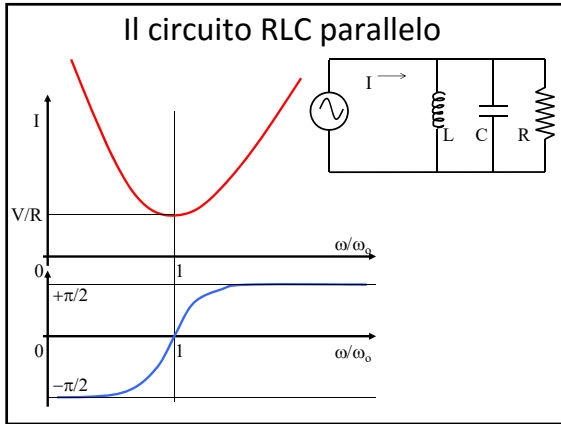


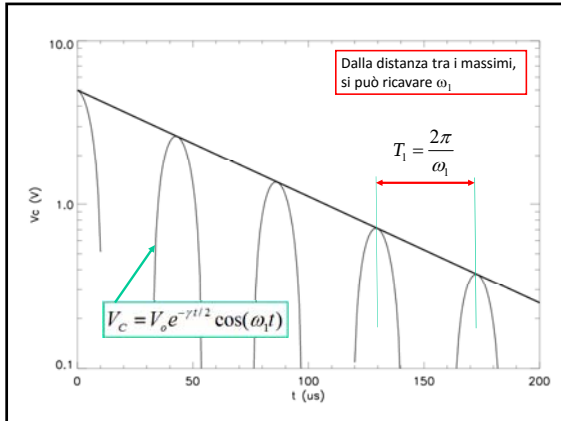
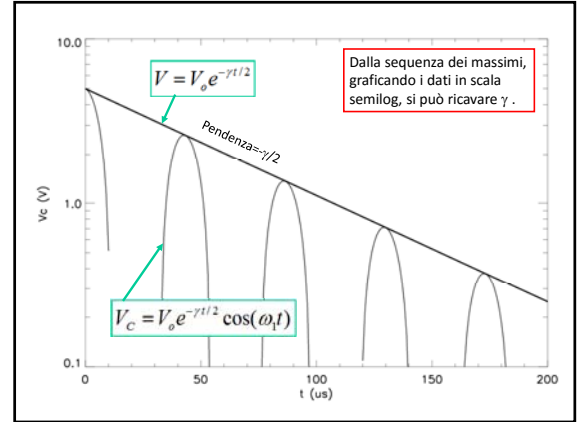
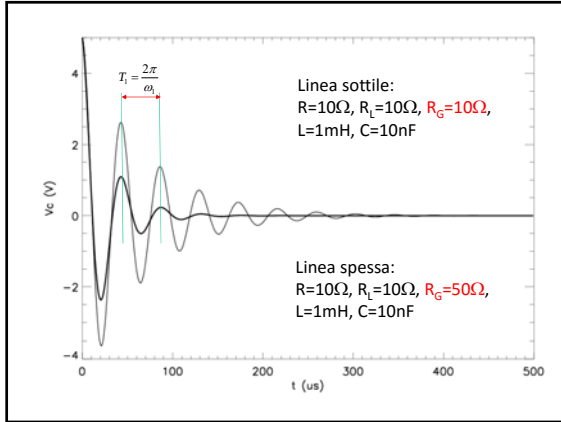
$$\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \left[ \frac{1}{R} + j\left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right] \right]$$

$$\vec{I} = \vec{V} \frac{1}{\vec{Z}} = \vec{V} \left[ \frac{1}{R} + j\left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right] \right]$$

$$I_o = V_o \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right]^2}$$

$$\phi = \arctg \left[ \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) / (1/R) \right] = \arctg \left[ \frac{1}{\omega \tau} \left( \frac{\omega^2}{\omega_o^2} - 1 \right) \right]$$





### Potenza elettrica in AC

- La potenza dissipata istante per istante in un componente è
- $W(t) = i(t)V(t)$
- Se usiamo tensioni alternate,  $W$  varia continuamente nel tempo, e potrebbe anche essere negativa (!)
- Esempio:

### Potenza elettrica in AC

$V = ZI \Rightarrow V = \frac{I}{j\omega C}$

$I = j\omega CV$

$|I| = \omega C|V|$

$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega CV}{0}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$

$V = V_o \sin(\omega t)$

$I = \omega CV_o \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

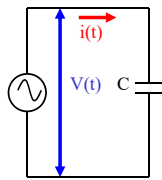
- Anticipo di  $90^\circ$  della corrente rispetto alla tensione.

### Potenza elettrica in AC

- Durante gli intervalli A e C il condensatore viene caricato dal generatore, e quindi aumenta la sua energia, e quindi gli viene fornita potenza.
- Durante gli intervalli B e D il condensatore si scarica sul generatore, e quindi perde energia, fornendo potenza al generatore: la potenza a lui fornita è negativa.

## Potenza elettrica in AC

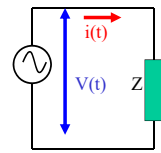
- La potenza media fornita al condensatore e' la media di  $W(t)$  su un ciclo lungo  $T=2\pi/\omega$ .



$$\begin{aligned}\langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t)V(t)dt = \frac{V_0 I_0}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{V_0 I_0}{\omega T} \int_0^{\omega T} \sin(x) \cos(x) dx = \frac{V_0 I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \\ &= \frac{V_0 I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x) d \sin(x) = \frac{V_0 I_0}{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

## Potenza elettrica in AC

- In generale :

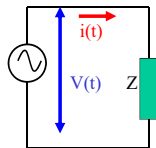


$$\begin{aligned}\langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t)V(t)dt = \frac{V_0 I_0}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{V_0 I_0}{T} \left[ \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\phi) \cos(\omega t) dt + \int_0^T \sin(\omega t) \sin(\phi) \cos(\omega t) dt \right] = \\ &= \frac{V_0 I_0}{T} \cos(\phi) \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{V_0 I_0}{\omega T} \cos(\phi) \int_0^{\omega T} \cos^2(x) dx \Rightarrow \\ \langle W \rangle &= \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\phi) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos(\phi) \Rightarrow \boxed{\langle W \rangle = V_{eff} I_{eff} \cos(\phi)}\end{aligned}$$

## Potenza elettrica in AC

$$\langle W \rangle = V_{eff} I_{eff} \cos(\phi)$$

$$\phi = \arctan \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}$$



- $\cos(\phi)$  e' detto Fattore di Potenza.
- In circuiti puramente reattivi (come il condensatore da solo)  $\text{Re}(Z)=0$  e lo sfasamento tra tensione e corrente è di  $90^\circ$ , e il fattore di potenza è 0; la potenza media dissipata è nulla.
- Ma nel circuito scorre corrente. Quindi, ad esempio la potenza dissipata nel generatore (nella sua resistenza interna) non è nulla !
- Nelle apparecchiature industriali con carichi induttivi, come i motori elettrici, sono necessari grandi condensatori, in modo da riportare il fattore di potenza vicino ad 1.

## Circuito RLC: fattore di merito in termini di energia

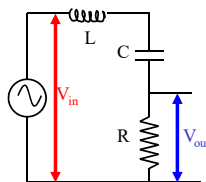
- Il fattore di merito può essere riscritto anche in termini di energia immagazzinata nell'oscillatore ed energia dissipata in un periodo.
- Infatti:

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{2\pi}{T} \frac{L}{R} \frac{I_o^2 / 2}{I_o^2 / 2} = 2\pi \frac{LI_o^2 / 2}{TRI_o^2 / 2} = 2\pi \frac{E_{st}}{TW_J} = 2\pi \frac{E_{st}}{E_J}$$

- dove  $I_o$  è la corrente massima che passa nel circuito,  $E_{st}$  è l'energia immagazzinata nel circuito,  $W_J$  è la potenza media dissipata (convertita in calore) per effetto Joule nel resistore .
- Quindi il fattore di merito è pari a  $2\pi$  volte il rapporto tra energia elettromagnetica immagazzinata nel risonatore ed energia dissipata in un periodo (che deve quindi essere via via rifornita dal generatore per mantenere l'oscillazione).

## Come costruire un RLC con un buon $Q_o$ (esperienza RLC)

- Il filtro RLC serve a selezionare una banda di frequenze intorno a una particolare frequenza di risonanza, dove normalmente c'è il segnale che interessa, mentre alle altre frequenze c'è solo rumore.
- Se  $Q_o$  è alto, la banda selezionata è stretta, e si elimina piu' rumore.



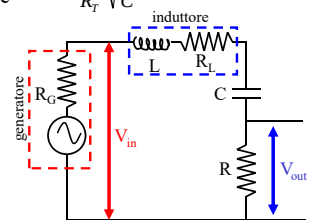
## Come costruire un RLC con un buon $Q_o$

- Per ottenere un  $Q_o$  alto per una data  $f_o$ ,  $R_T$  deve essere piccola.
- $R_T$  è la somma di tutte le R in serie nel circuito:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- La  $R_G$  interna del generatore
- La R da cui si preleva il segnale in uscita
- La  $R_L$  interna all'induttore.
- $R_T = R_G + R_L + R$



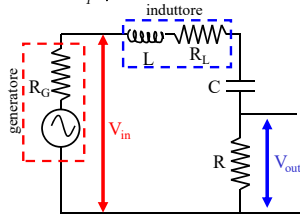
## Come costruire un RLC con un buon $Q_o$

- $R$  non può essere troppo piccola, altrimenti il segnale in uscita  $V_{out}=RI$  è piccolo. Un buon compromesso si ha per  **$R=10\Omega$**

- $R_L$  dipende dalla qualità dell'induttore. Valori ragionevoli sono  **$R_L=10\Omega$**  per  $L=10\text{mH}$ . Il valore di  $R_L$  può essere misurato con un ohmetro in continua.

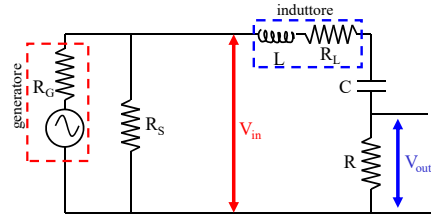
$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



## Come costruire un RLC con un buon $Q_o$

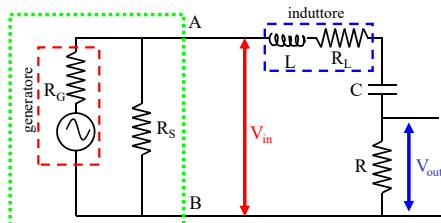
- $R_G$  è normalmente di  $50\Omega$ , quindi non è trascurabile rispetto alle altre. Un buon compromesso consiste nell'inserire una resistenza di **shunt**  $R_S = 10\Omega$  in parallelo al generatore.



## Come costruire un RLC con un buon $Q_o$

- Secondo il teorema di Thevenin il nuovo generatore (ottenuto tra i punti A e B del circuito, riquadro verde) ha una resistenza interna pari al parallelo tra  $R_G$  e  $R_S$ .

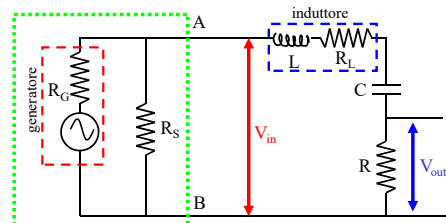
$$R'_G = \frac{R_G R_S}{R_G + R_S} = \frac{50 \times 10}{50 + 10} \cong 8.3 \Omega$$



## Come costruire un RLC con un buon $Q_o$

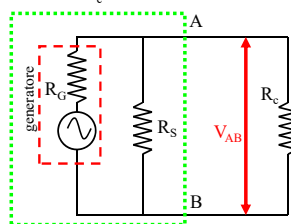
- La  $V_{in}$  sarà inferiore a quella che avremmo in assenza di  $R_S$ , ma questo si può rimediare agendo sul potenziometro di ampiezza del generatore.

$$R'_G = \frac{R_G R_S}{R_G + R_S} = \frac{50 \times 10}{50 + 10} \cong 8.3 \Omega$$



## Verifica dell'impedenza d'uscita del generatore

- La prima cosa da fare sarà collegare il generatore alla resistenza di shunt e misurare la resistenza interna equivalente.
- Si usa l'oscilloscopio e si misura l'ampiezza della tensione tra A e B al variare del carico  $R_c$  che connettiamo tra A e B. Si parte dall'ampiezza in assenza di carico  $R_c = \infty$  e si varia poi  $R_c$  tra  $20\Omega$  e  $1\Omega$ .  $R_G$  si ottiene facendo la media pesata delle stime ottenute con diversi  $R_c$ .



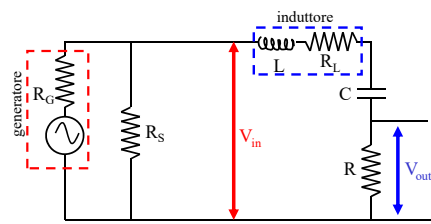
$$V_{AB}(R_c) = V_{AB}(\infty) \frac{R_c}{R_c + R'_G}$$

$$R'_G = R_c \left[ \frac{V_{AB}(\infty)}{V_{AB}(R_c)} - 1 \right]$$

## Come costruire un RLC con un buon $Q_o$

- In totale otteniamo una  $R_T = R_G + R_L + R$  dell'ordine di  $30\Omega$ .
- Per avere un buon  $Q_o$  conviene scegliere una  $f_o$  abbastanza alta:

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_o \frac{L}{R_T}$$

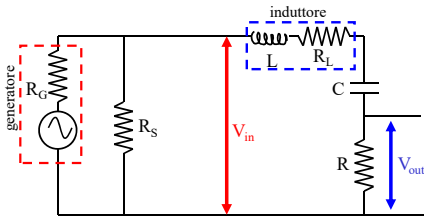


### Come costruire un RLC con un buon $Q_o$

- Con  $C=47\text{nF}$  e  $L=1\text{mH}$  si ottiene

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-3} \cdot 47 \cdot 10^{-9}}} \text{ Hz} \approx 23\text{kHz}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{30} \sqrt{\frac{10^{-3}}{47 \cdot 10^{-9}}} \approx 4.9$$



### Come costruire un RLC con un buon $Q_o$

- La risposta si calcola con le solite formule:

$$\frac{V_{out}}{R} = I_o = \frac{V_{gen} / R_T}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

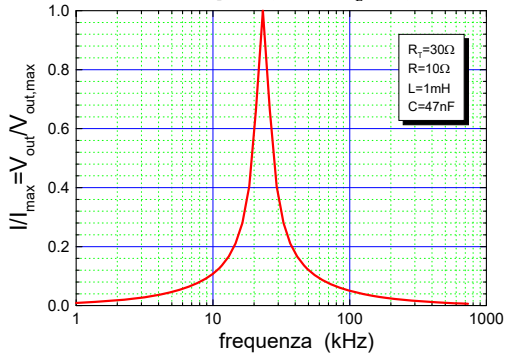
$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

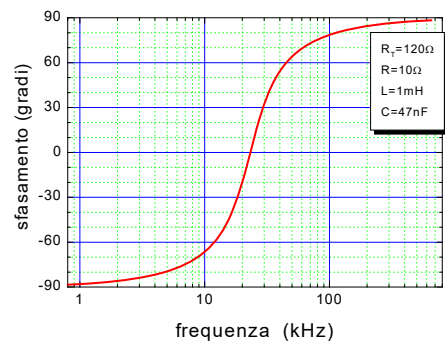
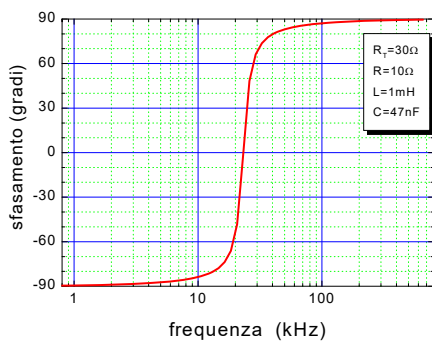
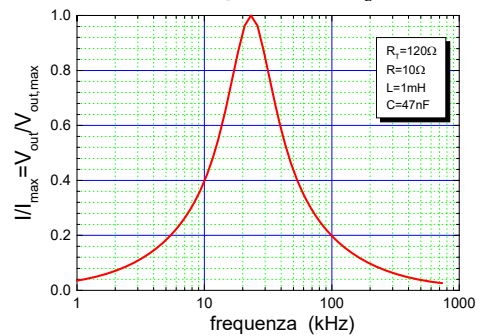
$$\frac{I_o}{I_{o,MAX}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

$$\varphi = \arctan \left[ Q_o \left( \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right) \right]$$

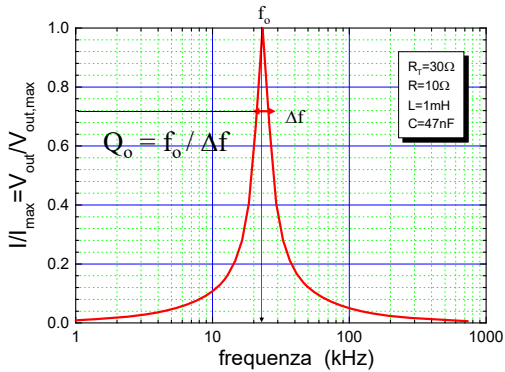
Con un induttore di buona qualità ( $L=1\text{mH}$ ,  $R_L=10\Omega$ ):



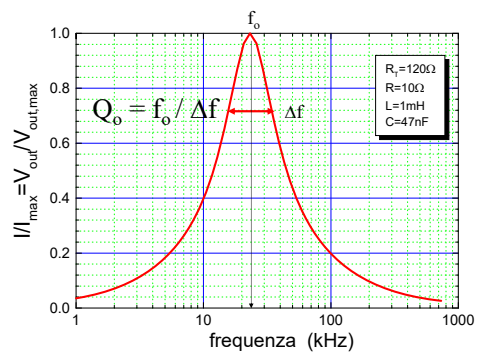
Con un induttore di cattiva qualità ( $L=1\text{mH}$ ,  $R_L=100\Omega$ ):



Con un induttore di buona qualità ( $L=1\text{mH}$ ,  $R_L=10\Omega$ ) :

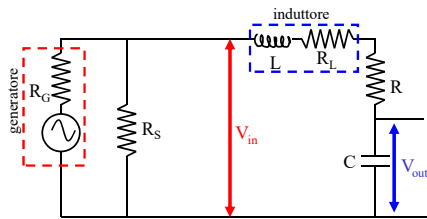


Con un induttore di cattiva qualità ( $L=1\text{mH}$ ,  $R_L=100\Omega$ ) :



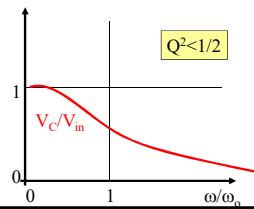
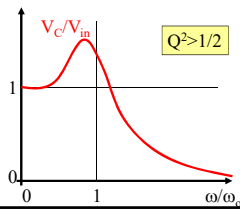
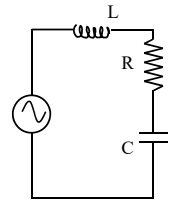
### Studio delle extratensioni

- Si modifica il circuito prendendo il segnale d'uscita ai capi di C.
- Si graficano  $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}(f)$  e  $\phi(f)$



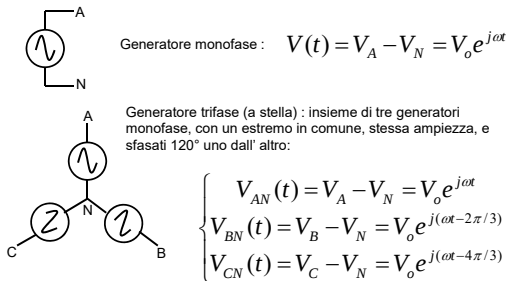
### Studio delle extratensioni

$$\frac{V_C}{V_{\text{in}}} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



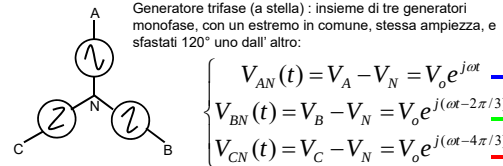
### Esempio sui fasori:

#### Generatori Monofase e Trifase



### Esempio sui fasori:

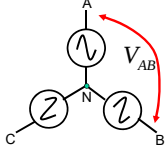
#### Generatori Monofase e Trifase



Che tensione c'è, istante per istante, tra A e B, tra B e C, tra C ed A?



### Esempio sui fasori: Generatori Monofase e Trifase



$$\begin{cases} V_{AN}(t) = V_A - V_N = V_o e^{j\omega t} \\ V_{BN}(t) = V_B - V_N = V_o e^{j(\omega t - 2\pi/3)} \\ V_{CN}(t) = V_C - V_N = V_o e^{j(\omega t - 4\pi/3)} \end{cases}$$

Che tensione c'è, istante per istante, tra A e B, tra B e C, tra C ed A?

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_{AN} - V_{BN} = V_o [e^{j\omega t} - e^{j(\omega t - 2\pi/3)}] = V_o e^{j\omega t} (1 - e^{-j2\pi/3}) = \\ &= V_o e^{j\omega t} [1 - \cos(-2\pi/3) - j \sin(-2\pi/3)] = V_o e^{j\omega t} \left[ 1 + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \\ &= V_o e^{j\omega t} \left[ \frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \sqrt{3} V_o e^{j\omega t} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right] = \sqrt{3} V_o e^{j\omega t} e^{-j\pi/6} = \\ &= \sqrt{3} V_o e^{j(\omega t - \pi/6)} \end{aligned}$$

$V_{AB}$  è  $\sqrt{3}$  volte maggiore di quella dei generatori, ed è sfasata di  $\pi/6$  rispetto a  $V_{AN}$ . Analogamente per  $V_{BC}$  e  $V_{CA}$ .

### Esempio sui fasori: Generatori Monofase e Trifase

- In Italia oggi  $V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} = \sqrt{2} 220V$  e  $V_{AB} = V_{BC} = V_{CA} = \sqrt{2} 400V$

- Per lungo tempo avevamo avuto

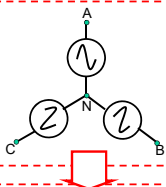
$$\begin{aligned} V_{AN} &= V_{BN} = V_{CN} = \sqrt{2} 220V \text{ e} \\ V_{AB} &= V_{BC} = V_{CA} = \sqrt{2} 380V \end{aligned}$$



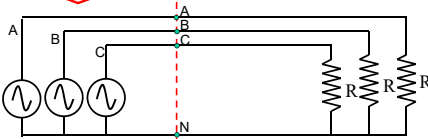
Presse trifase standard a 5 contatti :

- 3 fasi (A,B,C),
- neutro (N),
- terra (connessa alla scatola dello strumento utilizzatore, per motivi di sicurezza)

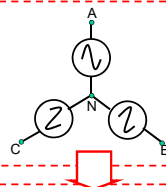
### Esempio sui fasori: Generatori Monofase e Trifase



Supponiamo ora di collegare 3 carichi uguali al generatore trifase:



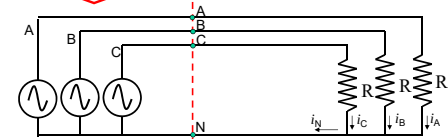
### Esempio sui fasori: Generatori Monofase e Trifase



Supponiamo ora di collegare 3 carichi uguali al generatore trifase:

Che corrente scorre nel conduttore N ???  
(N sta per neutro..)

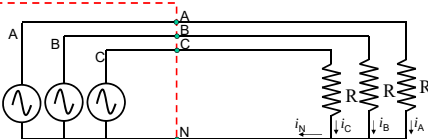
$$i_N = i_A + i_B + i_C$$



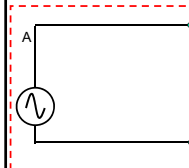
### Esempio sui fasori: Generatori Monofase e Trifase

$$i_N = i_A + i_B + i_C$$

$$\begin{aligned} i_N &= \frac{V_o}{R} [e^{j\omega t} + e^{j(\omega t - 2\pi/3)} + e^{j(\omega t - 4\pi/3)}] = \frac{V_o}{R} e^{j\omega t} (1 + e^{-j2\pi/3} + e^{-j4\pi/3}) = \\ &= \frac{V_o}{R} e^{j\omega t} (1 + \cos(-2\pi/3) + j \sin(-2\pi/3) + \cos(-4\pi/3) + j \sin(-4\pi/3)) = \\ &= \frac{V_o}{R} e^{j\omega t} (1 + (-1/2) + j(-\sqrt{3}/2) + (-1/2) + j(\sqrt{3}/2)) = 0!!! \end{aligned}$$

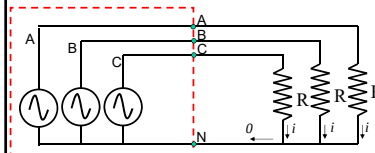


### Vantaggi della distribuzione trifase rispetto alla monofase



Supponiamo di dover far scorrere una corrente  $i$  in 3 carichi  $R$ . (I carichi nella grande distribuzione sono molti di più, ma si possono riunire sempre in 3 gruppi equivalenti.)

Con un generatore monofase scorrerà una corrente  $3i$  sia nel filo A che nel filo N



Con un generatore trifase scorrerà una corrente  $i$  in ciascuno dei tre cavi A,B,C. Quindi si devono usare 4 cavi al posto di 2, ma possono avere una sezione 3 volte più piccola, a parità di resistenza dei cavi e quindi di perdite ohmiche

- Ecco perché la distribuzione dell'energia elettrica, con linee lunghe centinaia di chilometri e quindi con perdite ohmiche non trascurabili, viene sempre fatta con linee trifase.

