

Caratteristica del diodo

Per polarizzazione diretta:

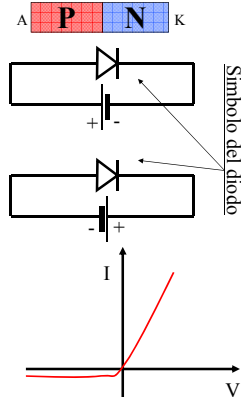
$$I_{NP} - I_{oPN} = I_o \left[1 - e^{\frac{e|V|}{kT}} \right]$$

Per polarizzazione inversa:

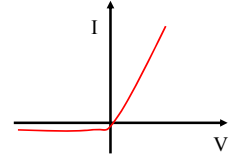
$$I_{oPN} - I_{NP} = I_o \left[1 - e^{\frac{-e|V|}{kT}} \right]$$

Quindi la corrente convenzionale è:

$$I = I_o \left[e^{\frac{eV}{kT}} - 1 \right]$$

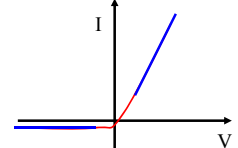


$$I = I_o \left[e^{\frac{eV}{kT}} - 1 \right]$$

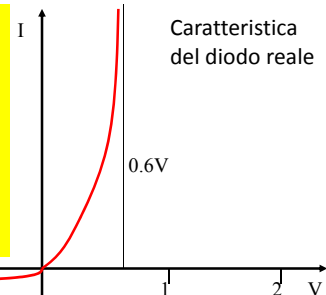


- Il diodo si comporta approssimativamente come una resistenza molto alta per polarizzazione inversa, e come una resistenza bassa per polarizzazione diretta.

$$R_{eq} = \frac{dV}{dI} = \frac{1}{\frac{dI}{dV}}$$

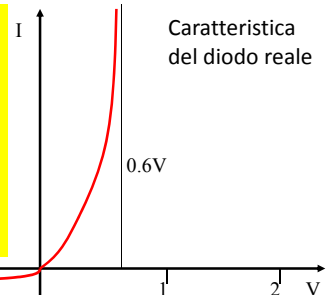


Quando si polarizza inversamente con una ddp molto alta, si arriva al breakdown: le cariche vengono accelerate dal campo elettrico e riescono ad attraversare il cristallo anche se è praticamente dielettrico, perfino ionizzando altri atomi che incontrano.



Si genera quindi una forte corrente, che può portare alla distruzione del diodo. Alcuni diodi sono costruiti apposta per sopportare forti correnti di breakdown: **diodi Zener**

Questo andamento della curva caratteristica del diodo Zener significa che la corrente può cambiare molto, ma la tensione ai capi del diodo rimane praticamente costante. Questo fenomeno viene utilizzato quando si ha bisogno di una tensione di riferimento.



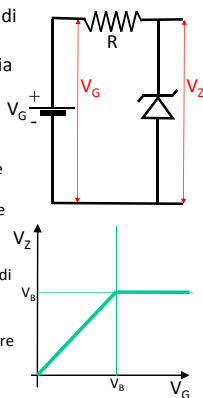
Diodo Zener come stabilizzatore di tensione

- Consideriamo il circuito a lato, con il verso di V_G tale da polarizzare inversamente lo Zener. Supponiamo che il diodo Zener abbia una tensione di breakdown V_B .
- Avremo $V_G = R_i + V_Z(i)$ dove $V_Z(i)$ è la caratteristica dello Zener.

- finché $V_G < V_B$ la tensione ai capi dello Zener V_Z è praticamente pari a V_G , perché lo Zener polarizzato inversamente conduce una corrente piccolissima.

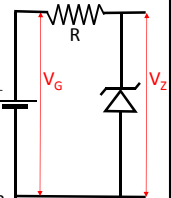
- Se $V_G > V_B$ la tensione ai capi dello Zener V_Z è praticamente pari a V_B , dato che nella regione di breakdown la tensione ai capi dello Zener è costante per qualsiasi corrente.

- Ovviamente non si deve esagerare ad aumentare V_G perché se la corrente aumenta troppo lo Zener e/o la resistenza si bruciano.



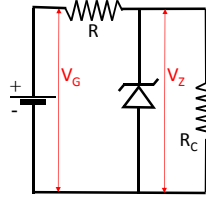
Diodo Zener come stabilizzatore di tensione

- Questo circuito può quindi essere utilizzato per stabilizzare una tensione continua.
- Esistono in commercio diodi Zener con varie tensioni di breakdown e varie potenze dissipabili.
- Se ad esempio si ha bisogno di una tensione stabile di 12V, si produce una tensione più alta (ad esempio con un trasformatore, un ponte di diodi ed il filtro RC, producendo ad esempio $V_G = 15V$ con 0.1V di ripple) e poi si usa il circuito a lato per stabilizzarla, scegliendo uno zener con $V_B = 12V$.
- L'eccesso di tensione rispetto a 12V cadrà sulla resistenza R: la caratteristica così ripida dello Zener fa in modo che nel resistore cada una tensione di 3V con 0.1V di ripple, garantendo 12V costanti ai capi dello Zener.



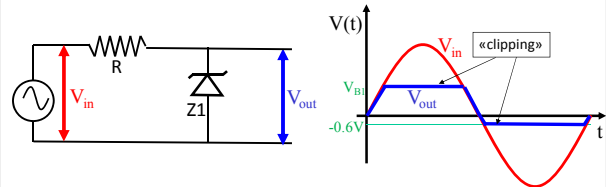
Diodo Zener come stabilizzatore di tensione

- Un circuito di questo genere, comunemente non garantisce che la tensione in uscita V_Z rimanga costante quando si connette un utilizzatore, R_C , all'uscita.
- Questo succede solo se la corrente che scorre nel carico è molto inferiore alla corrente che scorre nello Zener. Altrimenti il partitore tra R e R_C può ridurre la tensione ai capi dello Zener sotto alla tensione di breakdown, perdendo la stabilizzazione.
- La corrente massima che scorre nello Zener è limitata dal fatto che la dissipazione di potenza nello Zener deve essere inferiore a quella massima specificata dal costruttore (oltre si fonderebbe). Deve cioè essere $V_Z I_{Z_{max}}$.
- Se servono correnti importanti nel carico, si deve utilizzare un regolatore di tensione, che utilizza uno Zener solo come riferimento, ma fa scorrere la corrente in uscita in un transistor.



Altre applicazioni del diodo Zener

- Il diodo Zener può essere usato come limitatore di segnali.
- Se si vuole che un segnale non superi un certo livello, si fa passare attraverso una cella costituita da una resistenza e uno Zener con tensione di breakdown pari al massimo livello di segnale desiderato.



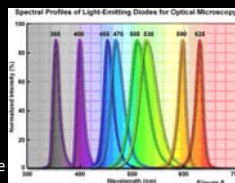
- E' un diodo realizzato con una giunzione p-n molto sottile, in un contenitore trasparente.
- Quando il diodo è polarizzato direttamente gli elettroni di conduzione si ricombinano con le lacune, e l'eccesso di energia viene rilasciato sotto forma di fotoni, che, dato il minimo spessore della giunzione, possono uscire dal cristallo. Si assiste così all'emissione di luce, con lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{ch}{E}$$

dove E è la differenza di energia tra gli elettroni e le lacune.

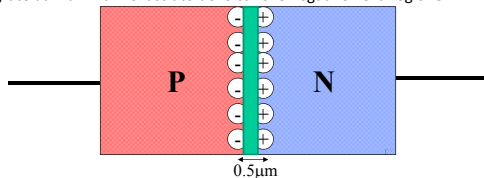
- Per ottenere colori diversi si usano semiconduttori di tipo diverso (AlGaAs; GaAlP; GaAsP; GaN; GaP; ZnSe; InGaN; InGaAlP; SiC)
- Avviene anche il processo inverso: l'arrivo di fotoni di energia sufficiente sulla giunzione può produrre una differenza di potenziale, ed il LED agisce come un fotodiodo (vedi dopo).

Il diodo LED



Regione di deplezione

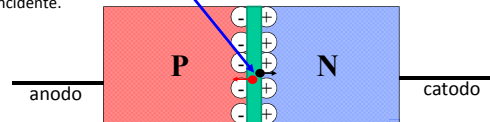
- Quando si saldano due cristalli di semiconduttore, uno drogato N e uno drogato P, si ottiene un diodo a giunzione PN. Il gradiente di concentrazione provoca una diffusione di lacune da P verso N e di elettroni da N verso P.
- I processi di diffusione non vanno avanti per molto, perchè si forma un **doppio strato** di cariche che genera un campo elettrico, che si oppone ad una ulteriore diffusione. Infatti gli elettroni che da N sono migrati verso P hanno lasciato gli ioni positivi dai quali sono stati originati nella regione N, mentre le lacune che sono migrate da P a N hanno lasciato delle cariche negative nella regione P.



- Ma gli elettroni che sono migrati in P hanno trovato lacune disponibili e si sono ricombinati, così come le lacune che da P hanno diffuso in N. Si forma così, dove sono avvenute le ricombinazioni, una **regione di deplezione (verde in figura) dove non ci sono cariche disponibili per la conduzione**.

Fotodiodo

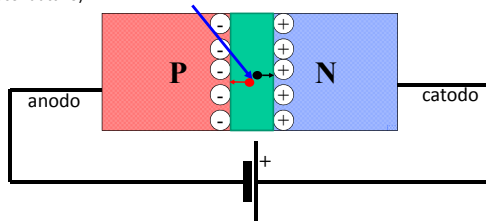
- La regione di deplezione è fotosensibile.
- Infatti, se su di essa incide un flusso di fotoni con energia sufficiente (maggiore dell'energia di legame), ciascun fotone può strappare un elettrone esterno al suo atomo, creando una coppia elettrone-lacuna.
- Se questo processo avviene nella regione di deplezione, a causa del campo di doppio strato ivi presente l'elettrone viene attirato verso la regione N (catodo) mentre la lacuna viene attirata verso la regione P (anodo).
- Si forma così una corrente (fotocorrente), proporzionale al flusso di fotoni incidente.



- A causa di questo spostamento di cariche, si forma una piccola differenza di potenziale ai capi del fotodiodo, proporzionale al flusso di fotoni, che può essere amplificata e misurata (modo fotovoltaico).
- Nota: le celle fotovoltaiche non sono altro che fotodiodi con area molto grande.

Fotodiodo

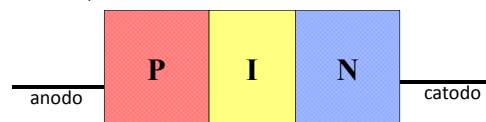
- Il processo può essere aiutato polarizzando il fotodiodo inversamente (modo fotoconduttivo)



- Il campo elettrico aggiuntivo dovuto alla batteria favorisce lo spostamento degli elettroni verso il catodo e delle lacune verso l'anodo. Nel circuito scorre una fotocorrente proporzionale al flusso di fotoni, che può essere amplificata e misurata.
- Inoltre il campo elettrico aggiuntivo aumenta lo spessore della regione di deplezione, aumentando l'area sensibile e diminuendo la *capacità* del fotodiodo, quindi rendendolo più pronto a seguire le variazioni del flusso incidente di fotoni.

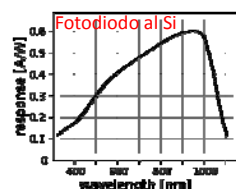
Fotodiodo PIN

- E' realizzato aggiungendo una zona di cristallo non drogato (intrinseco), e quindi isolante, tra il cristallo drogato N (pesantemente) e quello drogato P (pesantemente).



- Viene usato in modo fotoconduttivo, con una forte polarizzazione inversa.
- L'area sensibile (I) è molto grande e il campo è forte, per cui questi diodi sono molto più sensibili alla luce.
- Alcuni usano l'effetto **valanga**, nel senso che il campo elettrico forte accelera molto gli elettroni fotoprodotti, che possono raggiungere una energia cinetica sufficiente da ionizzare altri atomi che incontrano nel loro percorso, generando elettroni aggiuntivi e quindi moltiplicando la corrente.

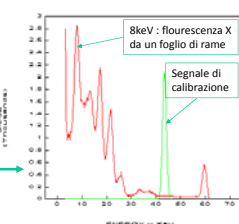
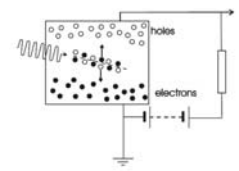
Fotodiodi



Materiale	Lunghezze d'onda operative (nm)
Silicio	190-1100
Germanio	400-1700
InGaAs	800-2600
Solfuro di Zinco	<1000-3500
HgCdTe	400-14000

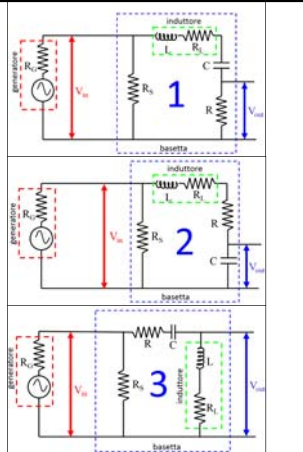
Diodi come rivelatori di radiazione

- I diodi PIN vengono usati anche come rivelatori di radiazioni ionizzanti (raggi gamma, X, particelle energetiche), che passando nella regione I la ionizzano, producendo coppie elettrone-lacuna e quindi un impulso di corrente.
- Polarizzati inversamente i diodi PIN hanno una bassa capacità e sono quindi abbastanza veloci (ns), e quindi adatti a misurare impulsi da radiazioni ionizzanti. Possono sostituire i tubi Geiger in alcune applicazioni.
- La carica generata è approssimativamente proporzionale all'energia depositata dalla particella, che a sua volta dipende dall'energia della particella. L'**istogramma** degli impulsi di corrente permette quindi di ottenere lo spettro delle energie delle particelle ionizzanti sotto esame.



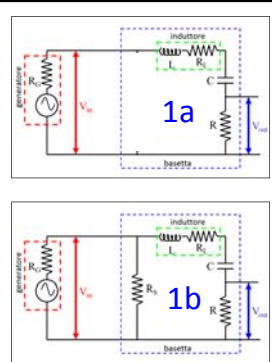
Esperienza del 13/5/2015 Circuito RLC con segnali sinusoidali

- Lo scopo dell'esperienza è misurare la risposta dei circuiti RLC visibili a fianco.
- Dal circuito 1 (uscita ai capi del resistore) si vuole stimare la frequenza di risonanza f_0 e il fattore di merito Q ;
- Con i circuiti 2 (uscita ai capi del condensatore) e 3 (uscita ai capi dell'induttore) si vogliono evidenziare le extrarisonanze.
- Si suggeriscono i seguenti valori: $R = 10 \Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ con $R_L = 10 \Omega$, $C = 47 \text{ nF}$, $R_s = 10 \Omega$.
- Si accettano (e apprezzano) comunque scelte diverse, a patto che producano un fattore di merito maggiore (e misurabile con la strumentazione a disposizione).



Misure sul circuito 1 (risonanza, ai capi del resistore)

- Per toccare con mano il fatto che il fattore di merito del risonatore dipende dalla resistenza complessiva del circuito risonante, si fanno misure sia con il generatore così com'è (1a), che con una resistenza di shunt che ne riduce l'impedenza d'uscita (1b).



- Nel primo caso la resistenza totale del circuito è pari a $R_T = R_G + R_L + R = 70 \Omega$ e quindi il fattore di merito atteso è

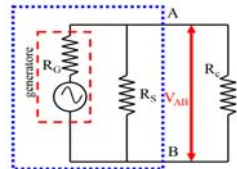
$$Q = \frac{1}{(R + R_L + R_G)} \sqrt{\frac{L}{C}} = 2.1$$

- Nel secondo caso è come avere un generatore con resistenza interna pari al parallelo tra R_G e R_s , e quindi

$$R_T = R_G^s + R_L + R = 28 \Omega \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1}{(R + R_L + R_G^s)} \sqrt{\frac{L}{C}} = 5.2$$

Misure sul circuito 1 (risonanza, ai capi del resistore)

- Per verificare che con una resistenza di shunt si può abbassare la resistenza interna del generatore, si esegue la seguente misura:
- Nel circuito a fianco, con una resistenza di shunt $R_s = 10 \Omega$, si misura V_{AB} con e senza resistenza carico $R_c = 10 \Omega$. Combinando le due misure si ricava la resistenza del generatore shuntato:



$$V_{AB}(R_c) = V_{AB}(R_c = \infty) \frac{R_c}{R_c + R_G^s} \Rightarrow R_G^s = R_c \left[\frac{V_{AB}(R_c = \infty)}{V_{AB}(R_c)} - 1 \right]$$

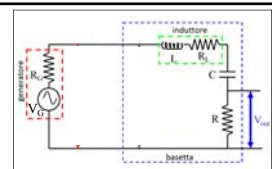
- Con i componenti suggeriti si deve ottenere

$$R_G^s = \frac{R_c R_s}{R_c + R_s} = \frac{50 \times 10}{50 + 10} \approx 8.3 \Omega$$

Nota: il fatto che la resistenza interna del generatore shuntato sia uguale al parallelo tra resistenza interna e resistenza di shunt si ottiene facilmente dal teorema di Thevenin.

Misure sul circuito 1 (risonanza, ai capi del resistore)

- Tornando al circuito RLC, sia nel caso 1a che nel caso 1b abbiamo il circuito di figura, con valori della resistenza interna del generatore di 50Ω nel caso 1a e di 8.3Ω nel caso 1b.



- considerando il partitore tra (resistenza interna del generatore + induttore + condensatore) e resistore, si scrive subito:

$$\frac{V_{out}}{V_{Gen}} = \frac{R}{(R_G + j\omega L + 1/j\omega C) + R}$$

- E' massimo alla risonanza, quando $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e vale $\left(\frac{V_{out}}{V_{Gen}} \right)_{max} = \frac{R}{R_G + R_L + R}$

$$\frac{V_{out}}{V_{out,max}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R + R_G + R_L} (j\omega L + 1/j\omega C)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R + R_G + R_L} \sqrt{\frac{L}{C}} j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- E definendo

$$Q = \frac{1}{R + R_G + R_L} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{R_{tot}} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{out}}{V_{out,max}} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

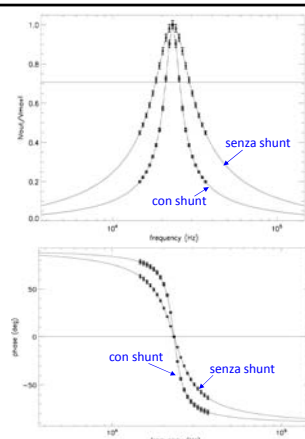
Misure sul circuito 1 (risonanza, ai capi del resistore)

$$\frac{V_{out}}{V_{out,max}} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- Si possono allora misurare i valori di V_{out} al variare della frequenza, e lo sfasamento tra V_{out} e V_{in} . Si ottiene

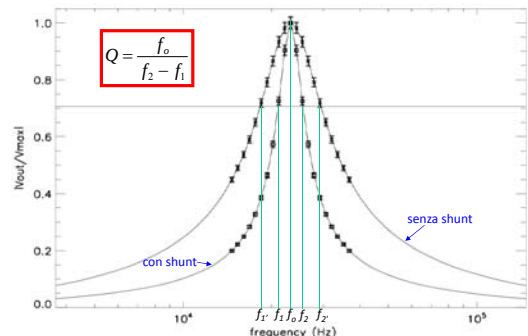
$$\left| \frac{V_{out}}{V_{out,max}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

$$\tan \varphi = -Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$



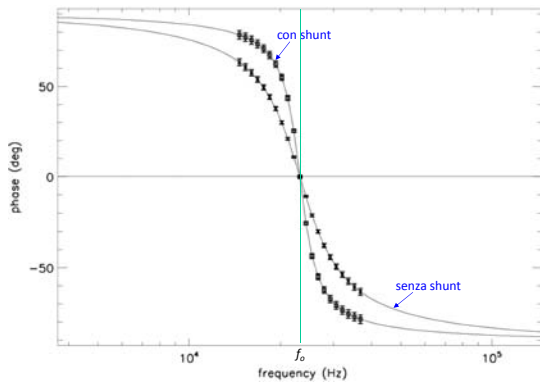
Misure sul circuito 1 (risonanza, ai capi del resistore)

- Dalle misure di ampiezza si ricavano la frequenza di risonanza e i fattori di merito:



Misure sul circuito 1 (risonanza, ai capi del resistore)

- Dalle misure di fase si conferma la frequenza di risonanza:



Misure sul circuito 2 (extratensioni ai capi del condensatore)

- Considerando il partitore tra (induttore + resistore) e condensatore, si scrive subito:

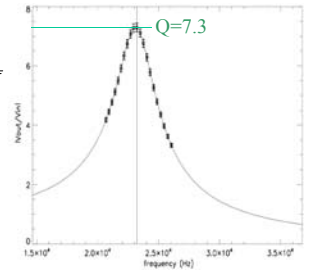
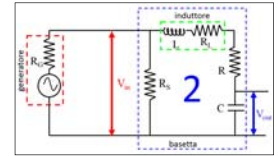
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1/j\omega C}{R + R_L + j\omega L + 1/j\omega C}$$

- Calcolando il modulo si ottiene:

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{1}{\omega C \sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

- alla risonanza: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|(\omega_0) = \frac{1}{\omega_0 C \sqrt{(R + R_L)^2}} = \frac{\sqrt{LC}}{C(R + R_L)} = \frac{1}{(R + R_L)} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q$$



Misure sul circuito 2 (extratensioni ai capi del condensatore)

- Considerando il partitore tra (induttore + resistore) e condensatore, si scrive subito:

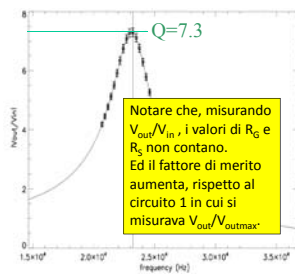
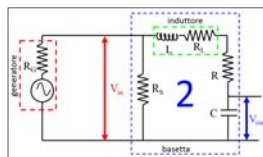
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1/j\omega C}{R + R_L + j\omega L + 1/j\omega C}$$

- Calcolando il modulo si ottiene:

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{1}{\omega C \sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

- alla risonanza: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|(\omega_0) = \frac{1}{\omega_0 C \sqrt{(R + R_L)^2}} = \frac{\sqrt{LC}}{C(R + R_L)} = \frac{1}{(R + R_L)} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q$$



Misure sul circuito 3 (extratensioni ai capi dell'induttore)

- Considerando il partitore tra (condensatore + resistore) e induttore, si scrive subito:

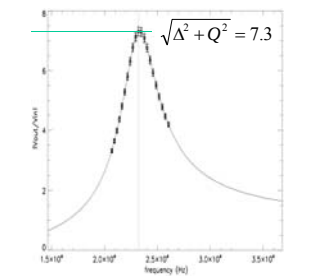
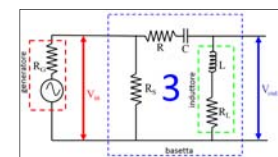
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_L + j\omega L}{R + R_L + j\omega L + 1/j\omega C}$$

- Calcolando il modulo si ottiene:

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{\sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

- alla risonanza: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|(\omega_0) = \frac{\sqrt{R_L^2 + \omega_0^2 L^2}}{\sqrt{(R + R_L)^2}} = \frac{\sqrt{R_L^2 + L/C}}{(R + R_L)} = \sqrt{\Delta^2 + Q^2}$$



Misure sul circuito 3 (extratensioni ai capi dell'induttore)

- Considerando il partitore tra (condensatore + resistore) e induttore, si scrive subito:

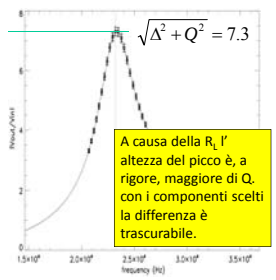
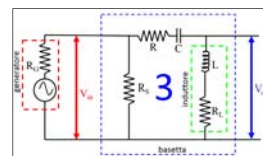
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_L + j\omega L}{R + R_L + j\omega L + 1/j\omega C}$$

- Calcolando il modulo si ottiene:

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{\sqrt{R_L^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

- alla risonanza: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|(\omega_0) = \frac{\sqrt{R_L^2 + \omega_0^2 L^2}}{\sqrt{(R + R_L)^2}} = \frac{\sqrt{R_L^2 + L/C}}{(R + R_L)} = \sqrt{\Delta^2 + Q^2}$$



Misura Aggiuntiva (filtro passa-basso RL)

- Prendere l'uscita sul resistore come nel circuito 1, ma eliminare il condensatore, connettendo direttamente l'induttore al resistore. Si ottiene un filtro passa basso. Infatti:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + R_L + j\omega L} = \frac{R}{R + R_L} \frac{1}{1 + j\omega L/(R + R_L)}$$

- Calcolando il modulo si ottiene:

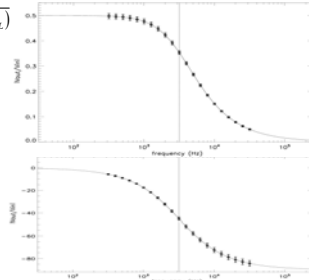
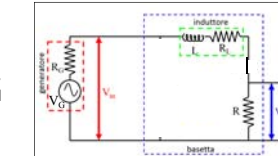
$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{R}{R + R_L} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

- Dove la costante di tempo e la frequenza di taglio sono:

$$\tau = \frac{L}{R + R_L} \rightarrow f_c = \frac{R + R_L}{2\pi L}$$

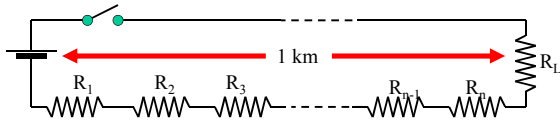
- Per lo sfasamento si ottiene:

$$\tan \phi = \frac{\omega L}{R + R_L} = -\omega \tau$$



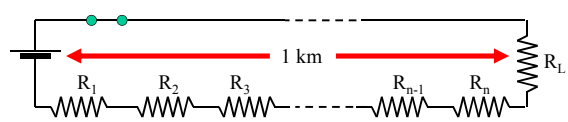
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Kirchhoff prevederebbe che appena chiuso l'interruttore scorresse *istantaneamente* una corrente $I=V/R_{tot}$
- Inoltre, se si lavora con tensioni variabili nel tempo si assume che la corrente sia *in ogni istante la stessa* in tutta la maglia.



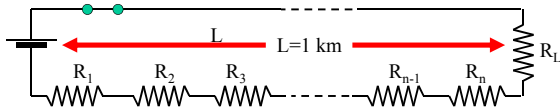
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Kirchhoff prevederebbe che appena chiuso l'interruttore scorresse *istantaneamente* una corrente $I=V/R_{tot}$
- Inoltre, se si lavora con tensioni variabili nel tempo si assume che la corrente sia *in ogni istante la stessa* in tutta la maglia.



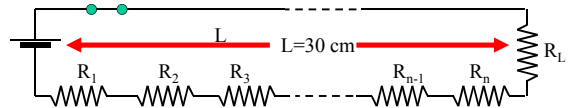
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Evidentemente questo non può essere, perché implicherebbe un trasferimento istantaneo dell'informazione «interruttore chiuso» dall'interruttore al carico.
- Le informazioni non possono viaggiare a velocità maggiore di quella della luce.
- La corrente non può arrivare alla R_L prima di t_0+L/c . Qui c è la velocità della luce: $c=30\text{ cm/ns}$.



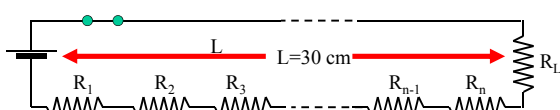
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Se ipotizziamo che i segnali si propagino a velocità dell'ordine di c , per $L=30\text{ cm}$ abbiamo un ritardo di circa 1 ns .
- Una corrente sinusoidale a $f=1\text{ GHz}$ arriverà al carico R_L in ritardo di un intero periodo.



Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Quindi possiamo trattare con l'approssimazione istantanea di Kirchhoff *circuiti piccoli e a frequenze $\ll 1\text{ GHz}$* .
- Altrimenti dovremo utilizzare le equazioni di Maxwell.



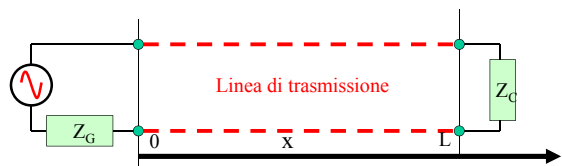
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Esempio comune: la motherboard di un computer ha dimensioni dell'ordine di 20 cm ed il segnale di clock è a $3\text{--}4\text{ GHz}$.
- I progettisti devono tenere conto del ritardo nella propagazione dei segnali dalla CPU ai chip esterni (ad esempio la RAM deve essere molto vicina alla CPU), altrimenti non si sincronizza nulla!



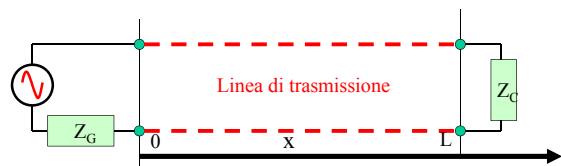
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Consideriamo ora il circuito elementare per la trasmissione di segnali su lunghe distanze, la cosiddetta “linea di trasmissione”.



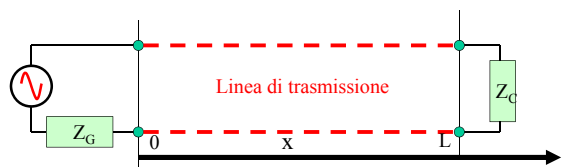
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- In pratica questa può essere una piastrina bifilare, o il cavo telefonico, o il cavo coassiale RG58 (BNC) che si usa in laboratorio o per le antenne, una pista di rame su un circuito stampato



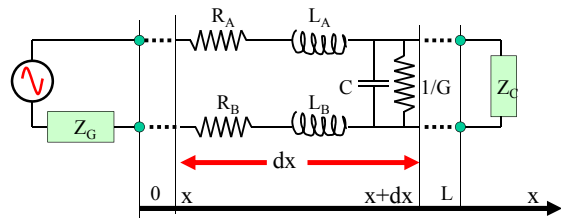
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Sia $V_G(t)$ la tensione del generatore e Z_G la sua impedenza interna.
- Sia Z_C l'impedenza del carico.



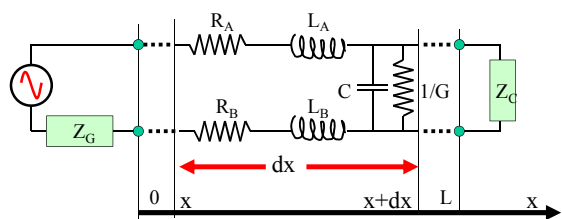
Linea di Trasmissione

- Schematizziamo la linea come due conduttori paralleli, con distanza e sezione costanti e fermi al passare del tempo (linee uniformi).
- Consideriamo un tratto dx della linea, e schematizziamolo col circuito equivalente visibile sotto:



Linea di Trasmissione

- Tra le posizioni x e $x+dx$ tensione e corrente variano, perchè ci sono *cadute di tensione* dovute a R e L , e *perdite di corrente* dovute a C e G .
- Siccome il tratto di circuito considerato è piccolo, al suo interno si può usare la trattazione standard:

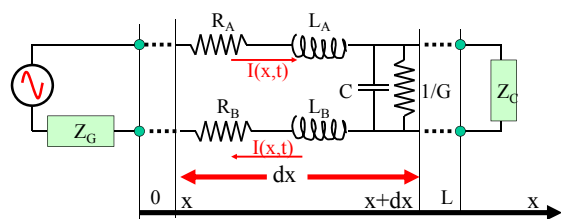


Linea di Trasmissione:

cadute di tensione

$$dV_A = V_A(x+dx, t) - V_A(x, t) = -R_A I(x, t) - L_A \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$

$$dV_B = V_B(x+dx, t) - V_B(x, t) = R_B I(x, t) + L_B \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$



$$dV_A = V_A(x+dx, t) - V_A(x, t) = -R_A I(x, t) - L_A \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$dV_B = V_B(x+dx, t) - V_B(x, t) = R_B I(x, t) + L_B \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$V(x+dx) - V(x) =$$

$$= [V_A(x+dx, t) - V_B(x+dx, t)] - [V_A(x, t) - V_B(x, t)]$$

$$V(x+dx) - V(x) = -(R_A + R_B) I(x, t) - (L_A + L_B) \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

• Definendo

$$R_u = \frac{R_A + R_B}{dx} \quad \text{Resistenza per unità di lunghezza}$$

$$L_u = \frac{L_A + L_B}{dx} \quad \text{Induttanza per unità di lunghezza}$$

$$V(x+dx) - V(x) = -(R_A + R_B) I(x, t) - (L_A + L_B) \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$V(x+dx) - V(x) = -[R_u dx + L_u dx \frac{\partial}{\partial t}] I(x, t)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}] I(x, t) \Rightarrow \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -[Z_u] I(x, t)$$

Linea di Trasmissione:

perdite di corrente (1/G è una resistenza)...

$$dI(x, t) = -GV(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} Q(x, t) = -GV(x, t) - C \frac{\partial}{\partial t} V(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = -[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t}] V(x, t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = -[Y_u] V(x, t)$$

Come prima: G_u e C_u conducibilità e capacità per unità di lunghezza

Y_u e Z_u = Ammettenza e Impedenza della linea per unità di lunghezza

Linea di Trasmissione:

equazioni differenziali e quadrupolo equivalente

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}] I(x, t) \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t}] V(x, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -[Z_u] I(x, t) \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -[Y_u] V(x, t) \end{cases}$$

Linea di Trasmissione:

Per segnali sinusoidali

$$Z = R + j\omega L \Rightarrow Z_u dx = (R_u + j\omega L_u) dx$$

$$Y = G + j\omega C \Rightarrow Y_u dx = (G_u + j\omega C_u) dx$$

Dove Z_u e Y_u sono impedenza e ammettenza della linea per unità di lunghezza.

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -[Z_u]I(x) \\ \frac{\partial I(x)}{\partial x} = -[Y_u]V(x) \end{cases} \quad \text{Equazioni dei Telegrafisti}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -[Z_u] \frac{\partial}{\partial x} I(x) = Z_u Y_u V(x) \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = -[Y_u] \frac{\partial}{\partial x} V(x) = Z_u Y_u I(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = Z_u Y_u V(x) = \gamma^2 V(x) \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = Z_u Y_u I(x) = \gamma^2 I(x) \end{cases} \quad \text{Equazioni dei Telegrafisti}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 V(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 I(x) = 0 \end{cases} \quad \gamma^2 = Z_u Y_u$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 V(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 I(x) = 0 \end{cases} \quad \text{Equazioni dei Telegrafisti}$$

la soluzione è del tipo

$$c_1 e^{-\gamma x} + c_2 e^{+\gamma x} \quad \text{quindi}$$

$$\vec{V}(x) = \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x}$$

dove le costanti A_1 e A_2 contengono le fasi: $\vec{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1}$
 $\vec{A}_2 = A_2 e^{j\varphi_2}$
 $\vec{Z}_0 = Z_0 e^{j\psi}$
 definendo

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\vec{Z}_u \vec{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L)(G_u + j\omega C)}$$

$$\vec{V}(x) = \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x} = \vec{A}_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} + \vec{A}_2 e^{+(\alpha + j\beta)x}$$

Soluzione per V

$$\begin{aligned} \vec{V}(x) &= \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x} = \\ &= \vec{A}_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} + \vec{A}_2 e^{+(\alpha + j\beta)x} = \\ &= A_1 e^{j\varphi_1} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_2 e^{j\varphi_2} e^{+\alpha x} e^{+j\beta x} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \text{Re} \{ \vec{V}(x) e^{j\omega t} \} \\ &= A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad \text{Onda progressiva} \\ &+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad \text{Onda regressiva} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x, t) &= A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad \text{Onda progressiva} \\ &+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad \text{Onda regressiva} \end{aligned}$$

- L'ampiezza decresce esponenzialmente con la distanza, a causa delle dissipazioni R e G
- L'onda progressiva A_1 è grande all'inizio della linea e si smorza
- L'onda regressiva A_2 è grande alla fine della linea e si smorza "rimbalzando indietro"

$$\begin{aligned} V(x, t) &= A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad \text{Onda progressiva} \\ &+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad \text{Onda regressiva} \end{aligned}$$

- Vediamo perché l'onda A_1 è detta progressiva.
- La velocità (di fase) v è la velocità che deve avere un osservatore viaggiante lungo la linea per vedere sempre la stessa fase dell'onda (ad esempio viaggiando a cavalcioni di una cresta o in fondo a un ventre).
- La condizione di fase costante è

$$\omega t - \beta x + \varphi_1 = K \Rightarrow \frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \varphi_1) = 0$$

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow v = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{Velocità di fase positiva per } A_1$$

- La soluzione in regime sinusoidale è

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad \text{Onda progressiva} \\ + A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad \text{Onda regressiva}$$

- Le due onde si propagano nella linea con velocità di fase ($\beta = \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sqrt{Z_u Y_u})$)

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{Per l'onda progressiva}$$

$$v = -\frac{\omega}{\beta} \quad \text{Per l'onda regressiva}$$

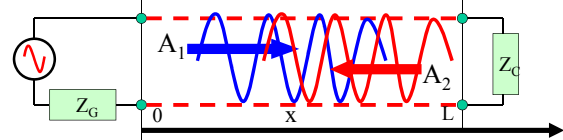
Caso non dissipativo:

- Nel limite di $R_u=0$ e $G_u=0$, si calcola facilmente

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\bar{Z}_u \bar{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} = \\ \Rightarrow \sqrt{(j\omega L_u)(j\omega C_u)} = j\omega \sqrt{L_u C_u}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}; \quad \tau = \sqrt{L_u C_u}$$

$$V(x, t) = A_1 \cos[\omega(t - x/v) + \varphi_1] + A_2 \cos[\omega(t + x/v) + \varphi_2]$$



Esempio: Cavo coassiale RG-58



Autoinduzione in un cavo coassiale

Coefficiente di autoinduzione L definito da: $\Phi = Li$

Dove Φ è il flusso di B : $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Nel caso di un cavo coassiale percorso da corrente i il campo all'interno del cavo è tangenziale, e la sua intensità a distanza r dall'asse si ricava dal teorema della circuitazione:

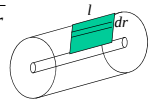
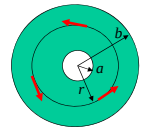
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu i \rightarrow B 2\pi r = \mu i \rightarrow B(r) = \frac{\mu i}{2\pi r}$$

Allora si può calcolare il flusso di B attraverso una superficie rettangolare interna al cavo, lunga l :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b B(r) l dr = l \frac{\mu i}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = l \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

E quindi l'induttanza per unità di lunghezza è

$$L_u = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{il} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



Capacità di un condensatore cilindrico

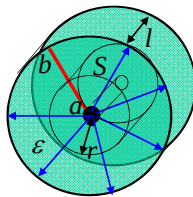
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q / \epsilon \rightarrow E 2\pi r l = Q / \epsilon$$

$$E(r) = Q / (2\pi r \epsilon l) = \rho / (2\pi r \epsilon)$$

$$\Delta V_{ab} = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{\rho}{2\pi r \epsilon} dr = \frac{\rho}{2\pi \epsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi \epsilon} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\rho l}{\Delta V} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

$$C_u = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$



Esempio: cavo coassiale RG-58

$$\begin{cases} C_u = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(b/a)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu / \epsilon} \ln(b/a) \end{cases}$$

- Numeri tipici per l' RG-58:

$$\square \epsilon_R = 2, v = c / \sqrt{2}$$

$$\square C_u = 100 \text{ pF/m}$$

$$\square R_o = 50 \Omega$$

$$\square v = 20 \text{ cm/ns}$$

$$\square \tau = 5 \text{ ns/m}$$

- Quindi un cavo di 100m introduce un ritardo di 500 ns.

Caso dissipativo:

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{\tilde{Z}_u \tilde{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} \\ &= \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \frac{C_u R_u}{L_u C_u} + j\omega \frac{L_u G_u}{L_u C_u} - \omega^2 \frac{L_u C_u}{L_u C_u}} \\ &= \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \left(\frac{R_u}{L_u} + \frac{G_u}{C_u} \right) - \omega^2}\end{aligned}$$

Caso non distortente:

$$\gamma = \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \left(\frac{R_u}{L_u} + \frac{G_u}{C_u} \right) - \omega^2}$$

Quando $\frac{R_u}{L_u} = \frac{G_u}{C_u}$ cioè le due costanti di tempo sono uguali,

$$\gamma = \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\left(\frac{R_u}{L_u} \right)^2 + j\omega 2 \left(\frac{R_u}{L_u} \right) - \omega^2} = \sqrt{L_u C_u} \left[\frac{R_u}{L_u} + j\omega \right]$$

E quindi $\begin{cases} \alpha = \sqrt{L_u C_u} \frac{R_u}{L_u} = R_u \sqrt{\frac{C_u}{L_u}} \Rightarrow \text{L'attenuazione non dipende da } \omega \\ \beta = \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \end{cases}$ La solita, indipendente da ω

Tutte le onde componenti il segnale si propagano nello stesso modo: il segnale non viene distorto.

Caso di alte frequenze

per $G_u \rightarrow 0$ e $R_u \ll \omega L_u$ (e buon isolamento):

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} \approx \\ &\approx \sqrt{j\omega C_u j\omega L_u \left(1 + \frac{R_u}{j\omega L_u} \right)} = j\omega \sqrt{C_u L_u} \left(1 - j \frac{R_u}{\omega L_u} \right) = \\ &= j\omega \sqrt{C_u L_u} \sqrt{1 - j \frac{R_u}{\omega L_u}} \approx j\omega \sqrt{C_u L_u} \left(1 - j \frac{R_u}{2\omega L_u} \right) = \\ &= \frac{R_u}{2\sqrt{\frac{L_u}{C_u}}} + j\omega \sqrt{C_u L_u} \\ \beta &= \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ \alpha &= \frac{R_u}{2\sqrt{\frac{L_u}{C_u}}} = \frac{R_u}{2R_o}\end{aligned}$$

$R_o = \sqrt{\frac{L_u}{C_u}}$ Impedenza della Linea, ci serve dopo

Soluzione per la corrente

(sinusoidale)

• Dall'eq. dei telegrafisti

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= -[Z_u]I(x) \Rightarrow I(x) = -\frac{1}{Z_u} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{Z_u} \frac{\partial}{\partial x} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} + \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{\gamma}{Z_u} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{Z_u Y_u}{Y_u}}}{Z_u} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_u}{Y_u}}} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}]\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{Z_u}{Y_u}} \text{ e' una impedenza } \tilde{Z}_o = Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}}$$

Soluzione per la corrente

$$I(x, t) = \text{Re} \{ \tilde{I}(x) e^{j\omega t} \} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z_o e^{j\psi}} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] \right\} \quad (\text{sinusoidale})$$

$$I(x, t) = \frac{A_1}{Z_o} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_1 - \psi) + \frac{A_2}{Z_o} e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_2 - \psi)$$

Onda progressiva
Onda regressiva

• Da confrontare con:

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_1) + A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_2)$$

• Si vede che per ciascuna onda il rapporto tra tensione e corrente vale Z_o . Inoltre c'è uno sfasamento $-\psi$.

Usando la notazione solita:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_o &= Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}} = \\ &= \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u} (G_u - j\omega C_u) / (G_u - j\omega C_u)} = \\ &= \sqrt{\frac{(R_u + j\omega L_u)(G_u - j\omega C_u)}{G_u^2 - \omega^2 C_u^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(R_u G_u + \omega^2 L_u C_u) + j\omega(L_u G_u - R_u C_u)}{G_u^2 - \omega^2 C_u^2}}\end{aligned}$$

Soluzione per la corrente

(sinusoidale)

$$\psi = \arctg \left\{ \frac{\text{Im}(\bar{Z}_o)}{\text{Re}(\bar{Z}_o)} \right\} = \arctg \left\{ \frac{\omega(G_u L_u - R_u C_u)}{R_u G_u + \omega^2 L_u C_u} \right\}^{1/2}$$

- Lo sfasamento è nullo

- Per linea non distorcente $G_u L_u = R_u C_u$
- Per linea non dissipativa $R_u \rightarrow 0 \quad G_u \rightarrow 0 \quad \bar{Z}_o \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$
- Per alte frequenze $R_u \ll \omega L_u \quad G_u \ll \omega C_u$

- In tutti questi casi $\bar{Z}_o = Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}} \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$

$$\bar{Z}_o \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$$

- Cioè l' impedenza si riduce a una resistenza.