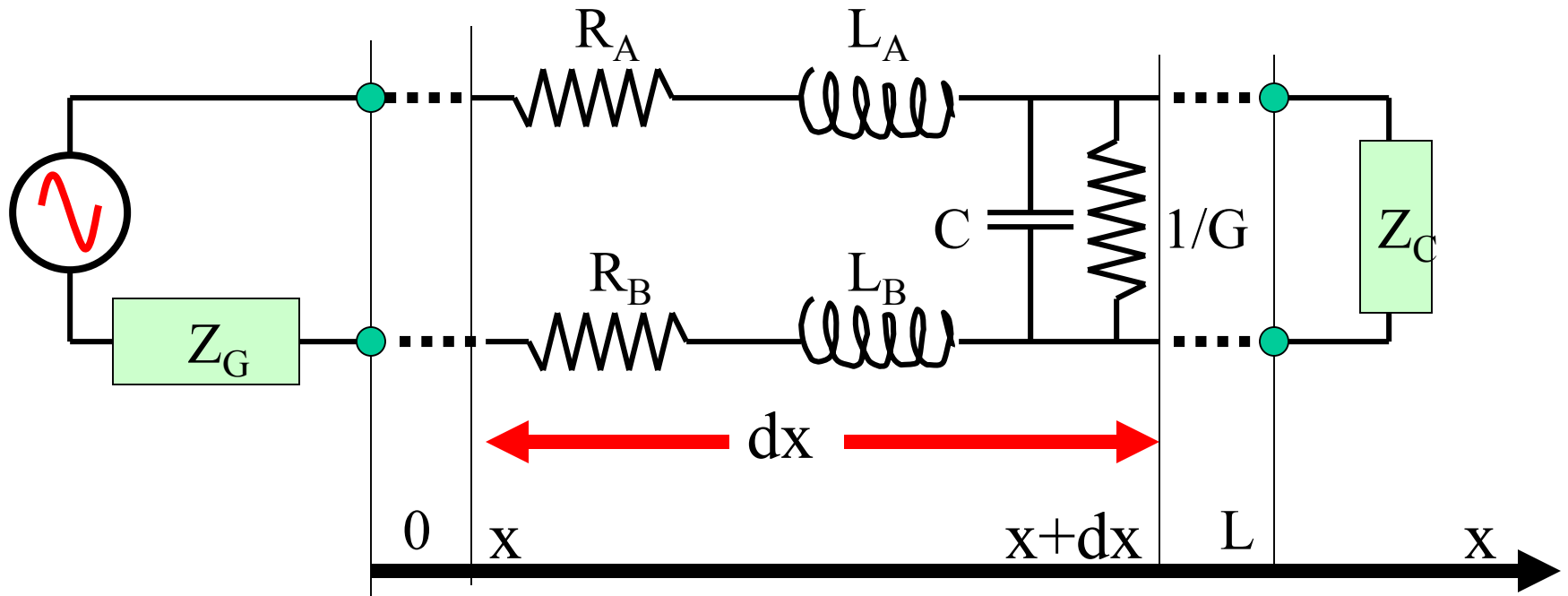


Linea di Trasmissione (riassunto)

- Schematizziamo la linea come due conduttori paralleli, con distanza e sezione costanti e fermi al passare del tempo (linee uniformi).
- Consideriamo un tratto dx della linea, e schematizziamolo col circuito equivalente visibile sotto:



(riassunto)

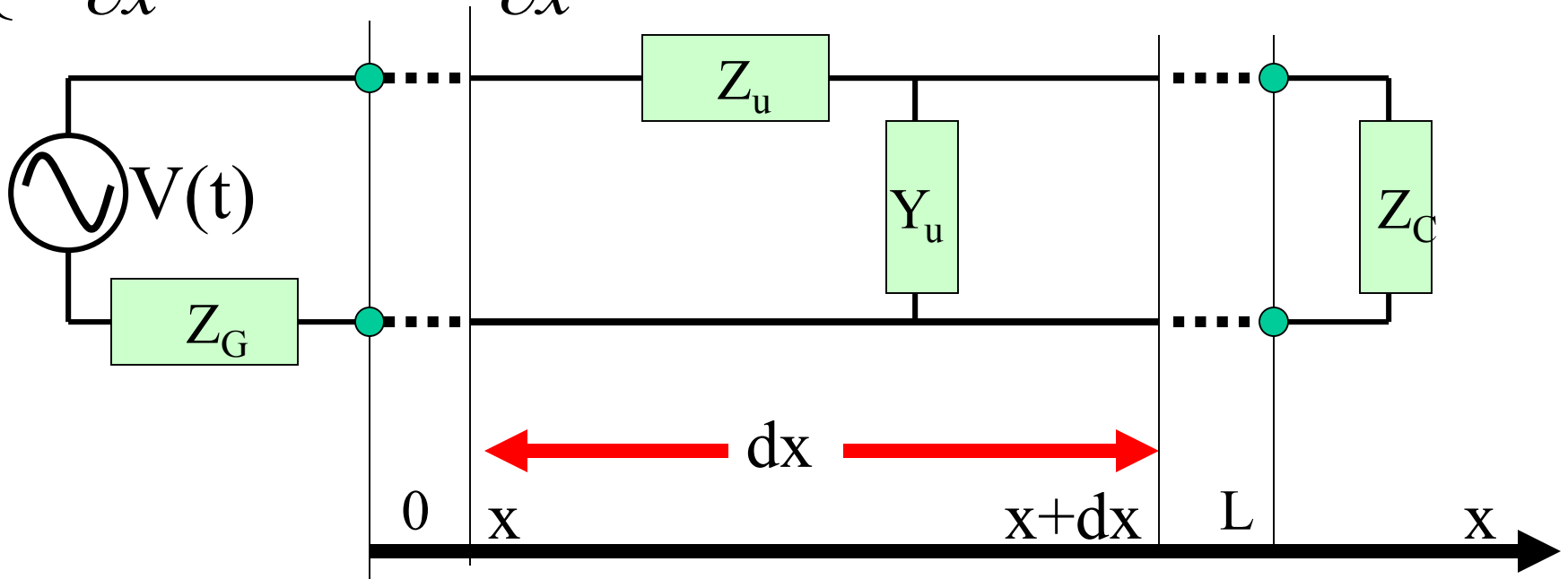
$$\begin{cases} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -[Z_u]I(x) \\ \frac{\partial I(x)}{\partial x} = -[Y_u]V(x) \end{cases}$$

dove

$$Z_u = \left[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t} \right]$$
$$Y_u = \left[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -[Z_u] \frac{\partial}{\partial x} I(x) = Z_u Y_u V(x) \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = -[Y_u] \frac{\partial}{\partial x} V(x) = Z_u Y_u I(x) \end{cases}$$

Equazioni dei
Telegrafisti



Soluzione per la tensione (riassunto)

- La soluzione in regime sinusoidale è

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \overset{\text{Onda progressiva}}{\cos(\omega t - \beta x + \varphi_1)} \\ + A_2 e^{+\alpha x} \underset{\text{Onda regressiva}}{\cos(\omega t + \beta x + \varphi_2)}$$

- Le due onde si propagano nella linea con velocità di fase
($\beta = \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sqrt{Z_u Y_u})$)

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

Per l'onda progressiva

$$v = -\frac{\omega}{\beta}$$

Per l'onda regressiva

Soluzione per la corrente

(sinusoidale)

- Dall' eq. dei telegrafisti

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= -[Z_u]I(x) \Rightarrow I(x) = -\frac{1}{Z_u} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{Z_u} \frac{\partial}{\partial x} [\vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{\gamma}{Z_u} [\vec{A}_1 e^{-\gamma x} - \vec{A}_2 e^{+\gamma x}] = \\ &= \frac{\sqrt{Z_u Y_u}}{Z_u} [\vec{A}_1 e^{-\gamma x} - \vec{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_u}{Y_u}}} [\vec{A}_1 e^{-\gamma x} - \vec{A}_2 e^{+\gamma x}] \\ &\sqrt{\frac{Z_u}{Y_u}} \text{ e' una impedenza } \vec{Z}_o = Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}}\end{aligned}$$

Soluzione

per la corrente

(sinusoidale)

$$I(x, t) = \operatorname{Re}\left\{\vec{I}(x)e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{Z_o e^{j\psi}} \left[\vec{A}_1 e^{-\gamma x} - \vec{A}_2 e^{+\gamma x}\right]\right\}$$

$$I(x, t) = \frac{A_1}{Z_o} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1 - \psi) +$$

Onda progressiva

$$- \frac{A_2}{Z_o} e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2 - \psi)$$

Onda regressiva

- Da confrontare con:

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) + A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2)$$

- Si vede che per ciascuna onda il rapporto tra tensione e corrente vale Z_o . Inoltre c'è uno sfasamento $-\psi$.

Usando la solita notazione:

$$\begin{aligned}\vec{Z}_o &= Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}} = \\&= \sqrt{\frac{(R_u + j\omega L_u)(G_u - j\omega C_u)}{(G_u + j\omega C_u)(G_u - j\omega C_u)}} = \\&= \sqrt{\frac{(R_u + j\omega L_u)(G_u - j\omega C_u)}{G_u^2 + \omega^2 C_u^2}} = \\&= \sqrt{\frac{(R_u G_u + \omega^2 L_u C_u) + j\omega(L_u G_u - R_u C_u)}{G_u^2 + \omega^2 C_u^2}}\end{aligned}$$

Soluzione per la corrente

(sinusoidale)

$$\psi = \arctg \left\{ \frac{\text{Im}(\vec{Z}_o)}{\text{Re}(\vec{Z}_o)} \right\} = \arctg \left\{ \frac{\omega(G_u L_u - R_u C_u)}{R_u G_u + \omega^2 L_u C_u} \right\}^{1/2}$$

- Lo sfasamento è nullo

- Per linea non distorcente $G_u L_u = R_u C_u$
- Per linea non dissipativa $R_u \rightarrow 0 \quad G_u \rightarrow 0 \quad \vec{Z}_o \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$
- Per alte frequenze
 $R_u \ll \omega L_u \quad G_u \ll \omega C_u$

- In tutti questi casi $\vec{Z}_o = Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}} \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$

$$\vec{Z}_o \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$$

- Cioè l' impedenza si riduce a una resistenza.

Segnali Impulsivi

- Per segnali non sinusoidali la trattazione si complica molto. Ma abbiamo visto che almeno nel caso non dissipativo le diverse componenti sinusoidali si propagano tutte allo stesso modo.
- Studiamo quindi questo caso in generale:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\left[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t} \right] I(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -\left[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t} \right] V(x,t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L_u \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C_u \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

- Derivando la prima rispetto a x e la seconda rispetto a t:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = -L_u \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} = -C_u \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - C_u L_u \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = 0}$$

Equazione delle onde

Segnali Impulsivi

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - C_u L_u \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

- La soluzione generale è del tipo

$$V(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad \text{con} \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}$$

- Analogamente si trova l'equazione per I , che ha soluzione

$$I(x,t) = g_1(x - vt) + g_2(x + vt)$$

- Sostituendo nella $\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L_u \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$ si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \\ I(x,t) = \frac{1}{R_o} (f_1(x - vt) - f_2(x + vt)) \end{array} \right. \text{dove} \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[f_1(x-vt) + f_2(x+vt)] = -L_u \frac{\partial}{\partial t}[g_1(x-vt) + g_2(x+vt)]$$

ma

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial(x+vt)} \frac{\partial(x+vt)}{\partial x} =$$

$$= -L_u \left[\frac{\partial g_1}{\partial(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial(x+vt)} \frac{\partial(x+vt)}{\partial t} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial(x-vt)} + \frac{\partial f_2}{\partial(x+vt)} = -L_u \frac{\partial g_1}{\partial(x-vt)} (-v) - L_u \frac{\partial g_2}{\partial(x+vt)} (v) \Rightarrow$$

$$\left\{ \frac{\partial f_1}{\partial(x-vt)} = L_u v \frac{\partial g_1}{\partial(x-vt)} \Rightarrow g_1 = \frac{f_1}{L_u v} \right.$$

$$\left\{ \frac{\partial f_2}{\partial(x+vt)} = -L_u v \frac{\partial g_2}{\partial(x+vt)} \Rightarrow g_2 = -\frac{f_2}{L_u v} \right.$$

$$I = \frac{f_1(x - vt)}{L_u v} - \frac{f_2(x + vt)}{L_u v}$$

ma

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$R_0 = \sqrt{L_u / C_u} \Rightarrow \frac{v}{R_0} = \frac{1}{L_u} \Rightarrow L_u v = R_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \\ I(x, t) = \frac{1}{R_o} (f_1(x - vt) - f_2(x + vt)) \end{array} \right. \text{dove} \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} \end{array} \right.$$

Segnali Impulsivi

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt) \\ I(x,t) = \frac{1}{R_o} (f_1(x-vt) - f_2(x+vt)) \end{array} \right. \text{dove} \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} \end{array} \right.$$

- Ci aspettiamo quindi le solite onde progressive e regressive
- Ad alte frequenze ci aspettiamo anche che siano attenuate durante la loro propagazione di $\exp(-\alpha x)$.
- Inoltre ci aspettiamo che l'impedenza della linea (rapporto tra V e I per ciascuna delle onde) sia R_o .

$$\left\{ \begin{array}{l} C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d) \end{array} \right. \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}}$$

Segnali Impulsivi

$$\left\{ \begin{array}{l} C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu / \epsilon} \ln(D/d) \end{array} \right.$$

- Numeri tipici per l' RG-58:

- ☐ $\epsilon_R=2, v=c/\text{sqrt}(2)$

- $C_u=100 \text{ pF/m}$

- $R_o=50\Omega$

- $v=20\text{cm/ns}$

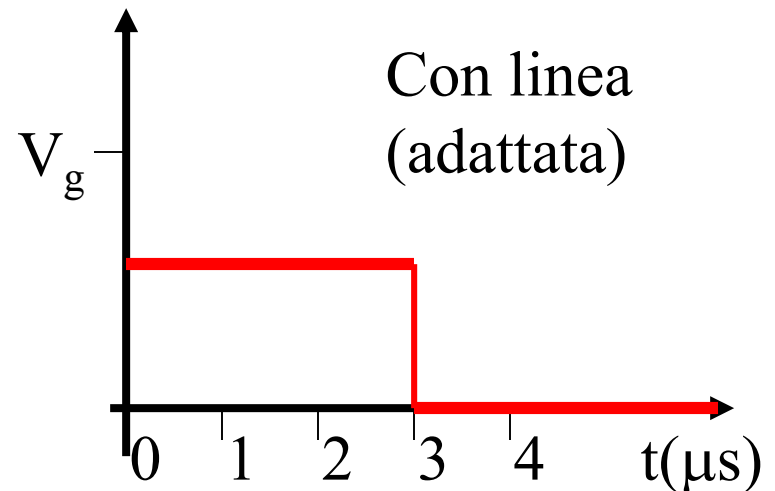
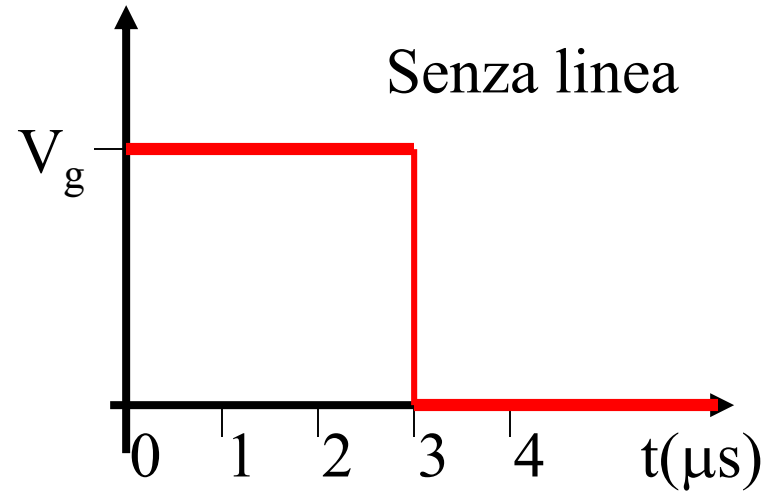
- ☐ $\tau=5\text{ns/m}$

- Quindi un cavo di 100m introduce un ritardo di 500 ns.

Segnali Impulsivi

- Supponiamo di collegare la linea ad un generatore con R interna pari a R_g , e che genera un impulso ampio V_g per un tempo T .
- Il generatore “vede” un carico di impedenza R_o , almeno finché non arriva l’onda regressiva dall’altra estremità’.
- Quindi nel punto $x=0$ a $t=0$ e per un tempo $2t_\ell=2\ell/v$ si ha

$$\begin{cases} V(x=0, t) = V_{in} = V_g \frac{R_o}{R_o + R_g} \\ I(x=0, t) = I_{in} = V_g \frac{1}{R_o + R_g} \end{cases}$$



Linea Adattata

- Al tempo $t = t_\ell = \ell/v$ il segnale arriva all' estremità opposta della linea, attenuato di $\exp(-\alpha \ell)$:

$$\begin{cases} V(x = \ell, t) = V_{out} = V_{in} e^{-\alpha \ell} \\ I(x = \ell, t) = \frac{V_{out}}{R_o} \end{cases}$$

- La seconda eq. deriva dal fatto che c'è solo l' onda progressiva.
- Quello che avviene successivamente dipende da come è **terminata** la linea. Supponiamo che sia chiusa su una resistenza R_c . Nell' attimo in cui il segnale arriva all' estremità trova la resistenza R_c che chiude la linea.
- Se $R_c = R_o$ non c'è cambiamento, perchè $V(x,t)/I(x,t) = R_o$ come era nella linea. La resistenza R_o assorbe completamente ed esattamente le tensioni e correnti arrivate in quel punto, e quindi non parte l' onda regressiva – non c'è riflessione. Si dice che la linea è **adattata**.

Linea Aperta

- Se la linea è **aperta** ($R_c = \text{infinito}$) in $x = \ell$ ci deve essere sempre $I(x = \ell) = 0$. Possiamo garantire che questo avvenga sovrapponendo all'onda progressiva che è arrivata fin lì una onda regressiva (riflessa) tale che le correnti generate dalle due onde si annullino perfettamente. Avremo quindi

$$0 = I(x = \ell, t) = I_{out} + I_{rifl} \quad \Rightarrow \quad I_{rifl} = -I_{out}$$

e anche $V_{rifl} = V_{out}$

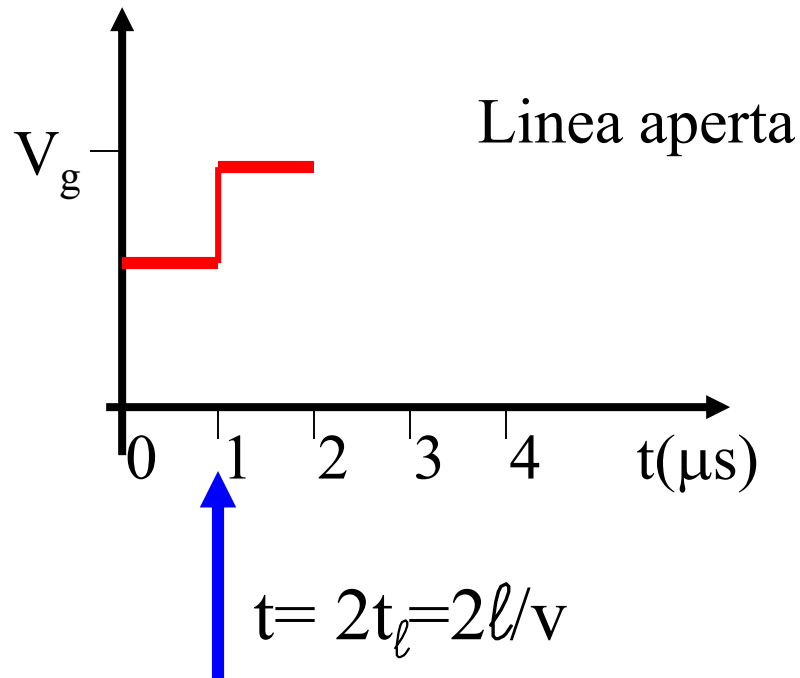
definendo il coefficiente di riflessione $\Gamma = \frac{V_{rifl}}{V_{out}}$

si ha in questo caso $\Gamma = 1$. Quindi sommando le due onde :

$$V(x = \ell, t = t_\ell) = V_{rifl} + V_{out} = 2V_{in} e^{-\alpha \ell}$$

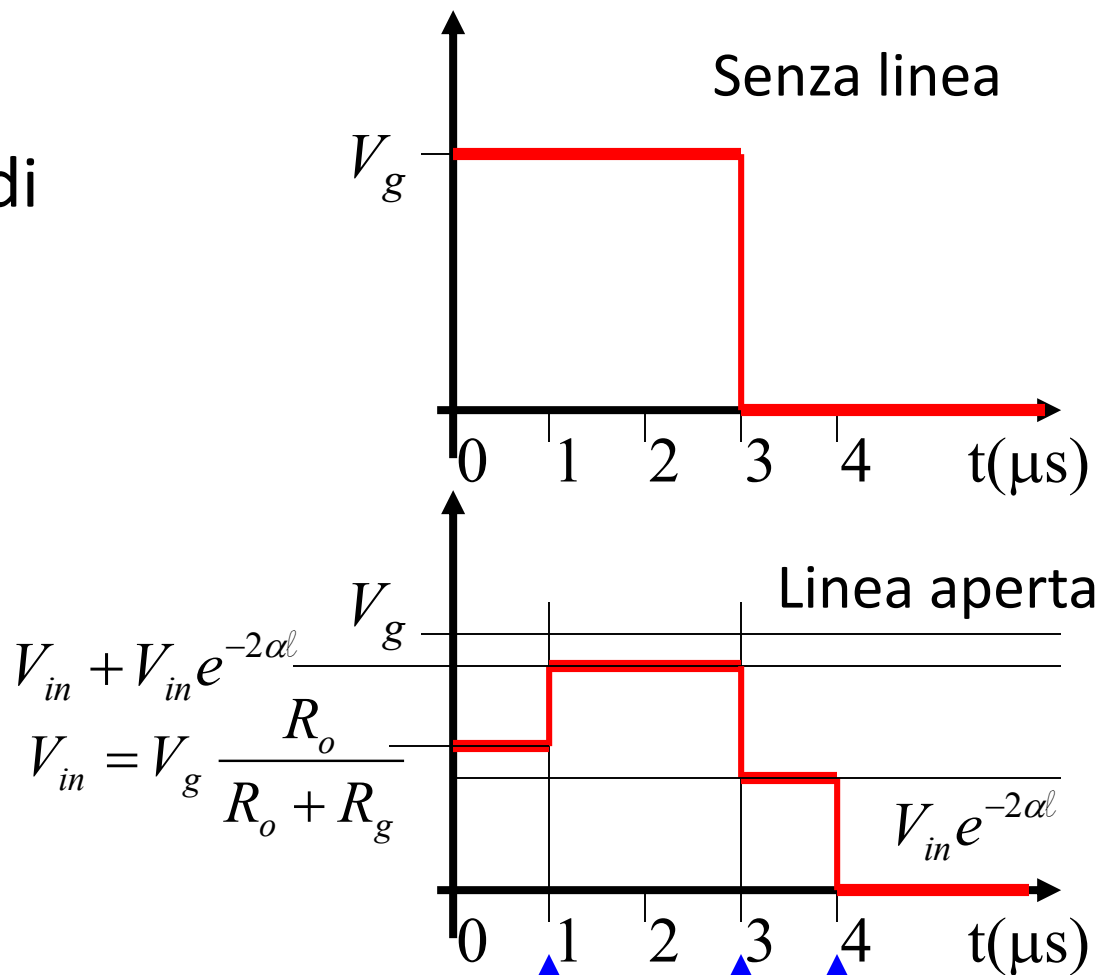
Linea Aperta

- Quest' onda riflessa comincia a viaggiare indietro lungo la linea, e al tempo $t = 2t_\ell = 2\ell/v$ arriva all' ingresso della linea, attenuata di un ulteriore fattore $\exp(-\alpha\ell)$.
- A $t = 2t_\ell$ la tensione in ingresso sale quindi a $V_{in} + V_{in}e^{-2\alpha\ell}$



Linea Aperta

- Quindi all'ingresso vedremo un'onda di questo genere:



$$t = 2t_\ell = 2\ell/v$$

Arriva l' "eco" dell' impulso

Finisce l' Impulso originale

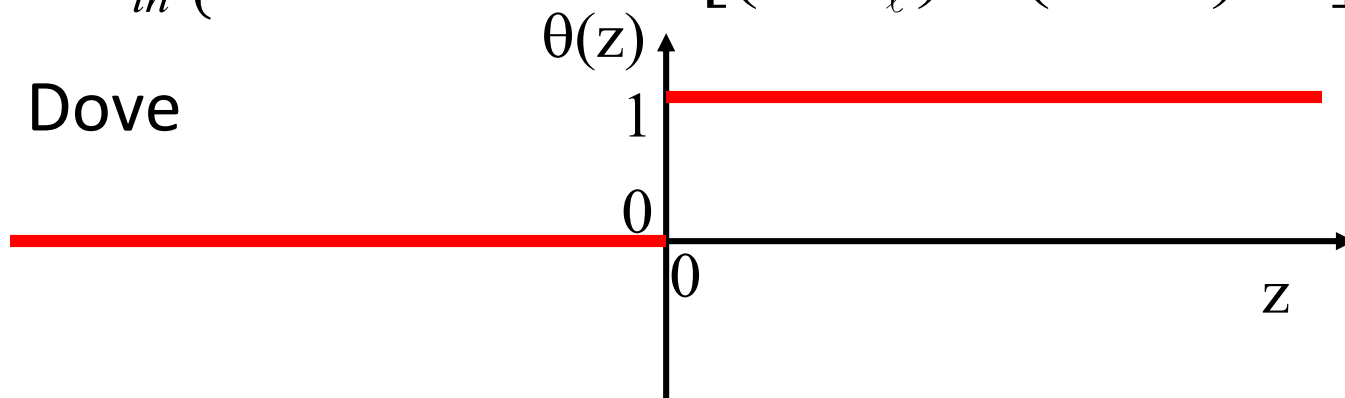
Finisce l' "eco" dell' impulso

Linea Aperta

- Consideriamo adesso un punto diverso, a distanza x da quello iniziale: in ogni punto della linea avremo la sovrapposizione di onda progressiva e onda regressiva: per $t_\ell < t < 2t_\ell$

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_{in} e^{-\alpha \ell} + V_{out} e^{-\alpha(\ell-x)} \theta[(t - t_\ell) - (\ell - x)/v] = \\ &= V_{in} e^{-\alpha \ell} + V_{in} e^{-\alpha \ell} e^{-\alpha(\ell-x)} \theta[(t - t_\ell) - (\ell - x)/v] = \\ &= V_{in} \left\{ e^{-\alpha \ell} + e^{-\alpha(2\ell-x)} \theta[(t - t_\ell) - (\ell - x)/v] \right\} \end{aligned}$$

- Dove



Linea in corto

- Se la linea è **in corto** ($R_c=0$) in $x=\ell$ ci deve essere sempre $V(x=\ell)=0$. Possiamo garantire che questo avvenga sovrapponendo all' onda progressiva che è arrivata fin lì una onda regressiva (riflessa) tale che le tensioni generate dalle due onde si annullino perfettamente. Avremo quindi

$$0 = V(x = \ell, t) = V_{out} + V_{rifl} \quad \Rightarrow \quad V_{rifl} = -V_{out}$$

$$\text{e quindi } \Gamma = \frac{V_{rifl}}{V_{out}} = -1$$

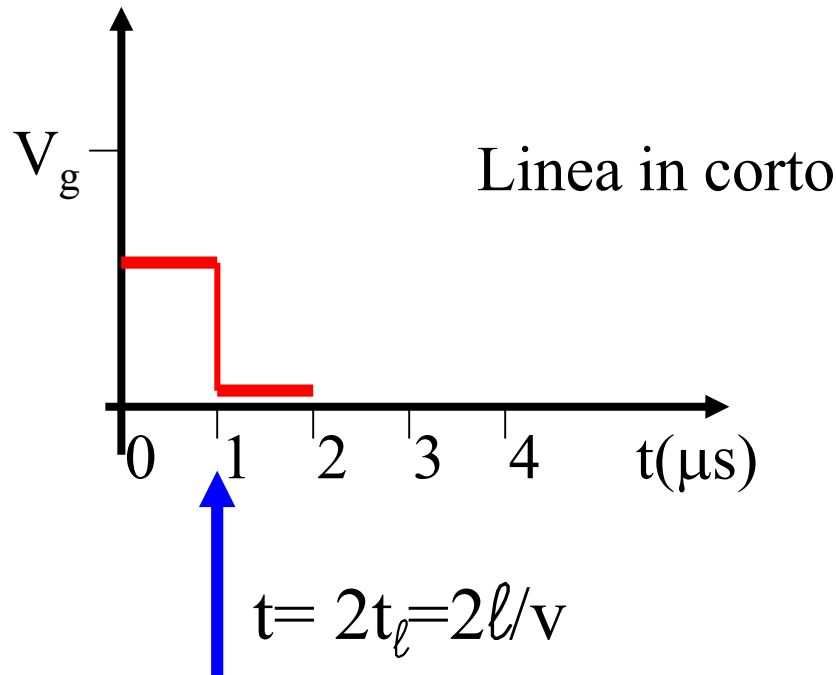
Quindi sommando le due onde :

$$V(x = \ell, t = t_1) = V_{rifl} + V_{out} = 0$$

$$I(x = \ell, t = t_1) = \frac{1}{R_o} (V_{out} - V_{rifl}) = 2 \frac{V_{out}}{R_o}$$

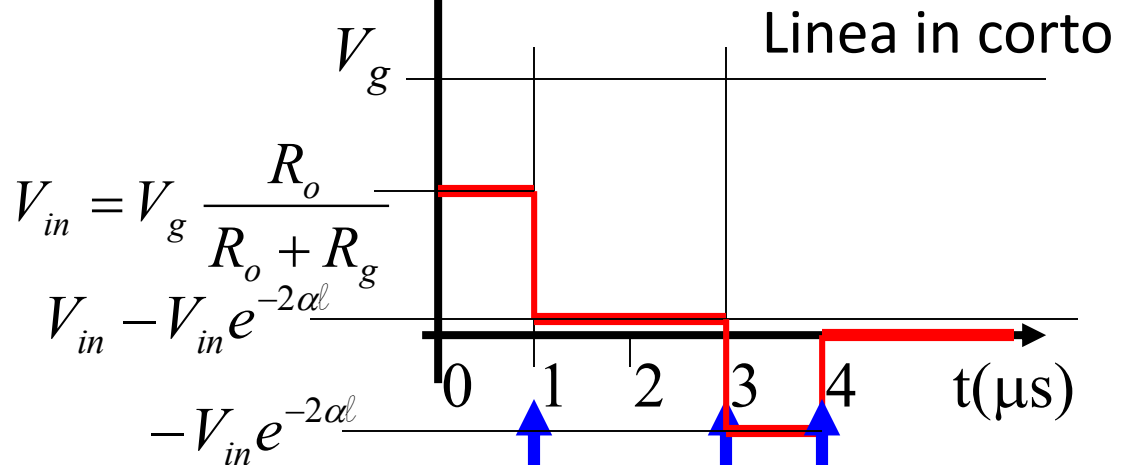
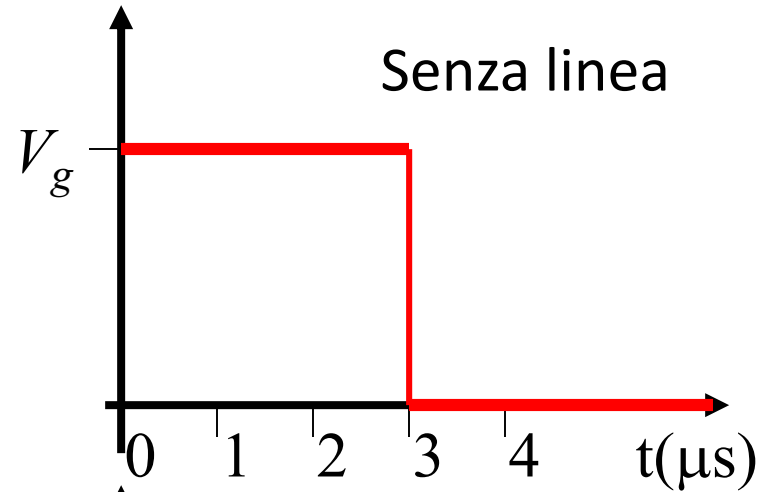
Linea in corto

- Quest' onda riflessa comincia a viaggiare indietro lungo la linea, e al tempo $t = 2t_\ell = 2\ell/v$ arriva all' ingresso della linea: Se non fosse attenuata annullerebbe perfettamente la tensione del generatore. Ma è attenuata un fattore $\exp(-2\alpha\ell)$: $V_{in} - V_{in}e^{-2\alpha\ell}$



Linea in corto

- Quindi all'ingresso vedremo un'onda di questo genere:



$$t = 2t_\ell = 2\ell/v$$

Arriva l' "eco" dell' impulso

Finisce l' Impulso originale

Finisce l' "eco" dell' impulso

In generale

- Per R_c qualsiasi ricaviamo il coefficiente di riflessione imponendo la legge di Ohm per R_c :

$$\frac{V(x = \ell, t = t_\ell)}{I(x = \ell, t = t_\ell)} = R_c$$

$$\frac{\frac{V_{in}e^{-\alpha\ell} + \Gamma V_{in}e^{-\alpha\ell}}{R_o} - \frac{\Gamma V_{in}e^{-\alpha\ell}}{R_o}}{R_o} = R_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{R_c}{R_o}}$$

- Si verifica facilmente che Γ vale 0 per $R_c = R_o$, vale 1 per R_c infinita e vale -1 per $R_c = 0$.
- In ingresso

$$\boxed{V(x = 0, t = 2t_\ell) = V_{in} (1 + \Gamma e^{-2\alpha\ell})}$$

- Tutto questo verrà verificato sperimentalmente nell'ultima esperienza del corso (10/6/2015).

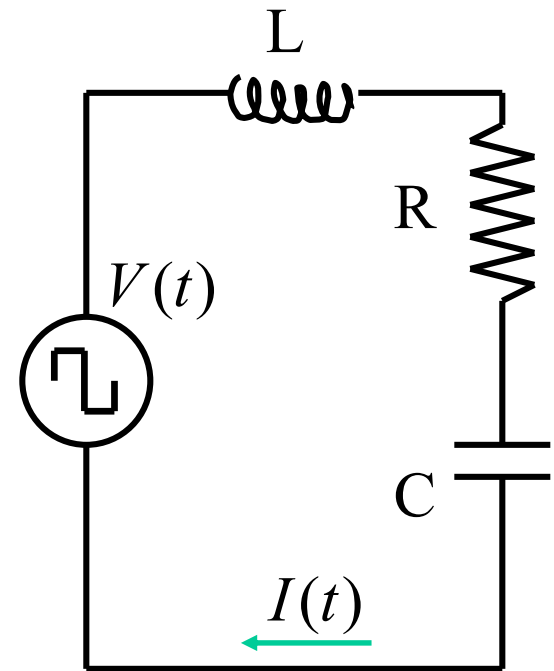
$$\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{R_c}{R_o}$$

$$V(x = 0, t = 2t_\ell) = V_{in} \left(1 + \Gamma e^{-2\alpha\ell} \right)$$

Esperienza del 20/5/2015

Circuito RLC con segnali impulsivi

- Lo scopo dell'esperienza è verificare il comportamento *sottosmorzato*, *criticamente smorzato*, e *sovrasmorzato* dei circuiti RLC serie quando il segnale in ingresso è un impulso ad **onda quadra**.
- Un breve richiamo di quanto abbiamo già dimostrato :
- siccome l'eccitazione non è sinusoidale, non si possono usare le impedenze per risolvere il circuito.
- si scrive l'equazione della maglia, tenendo conto delle relazioni tra corrente e tensione per i diversi componenti (R, L, C):
- derivando rispetto a t si ottiene:
- equazione differenziale lineare del secondo ordine, valida per qualsiasi $V(t)$.



$$V(t) = L \frac{dI}{dt}(t) + RI(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

- L'equazione è non omogenea. La soluzione è la somma dell' integrale generale dell' omogenea più un integrale particolare della disomogenea.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Omogenea associata}$$

- Fisicamente la soluzione dell' omogenea corrisponde al comportamento transitorio iniziale; a regime vale l' integrale particolare.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

- La soluzione dell' **omogenea** è del tipo

$$I(t) = I_1 e^{k_1 t} + I_2 e^{k_2 t}$$

- Con I_1 e I_2 costanti da determinare dalle condizioni iniziali e k_1 e k_2 soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$Lk^2 + Rk + \frac{1}{C} = 0$$

- quindi

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

- ponendo $a = \frac{R}{2L}$ $b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$

- e definendo $\gamma = \frac{R}{L}$ $\frac{1}{LC} = \omega_o^2$

- si trova la soluzione $I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$

- La quantità b può essere reale, nulla, o immaginaria, a seconda che sia:

Soluzione complessiva per $Q(0)=q_o$, $I(0)=0$

$$\begin{cases} \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \\ \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \\ \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \end{cases}$$

b reale e positivo,
caso sovrasmorzato

$$I(t) = -\frac{q_o \omega_o^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\}$$

b nullo, caso
criticamente
smorzato

$$I(t) = -q_o \omega_o^2 t e^{-at}$$

b immaginario,
caso
sottosmorzato,

dove $\alpha = \frac{R}{2L}$ $\beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} e^{-\alpha t} \text{sen}(\beta t)$$

- Nell'esperienza osserveremo con l'oscilloscopio la tensione ai capi del resistore, variando il valore di R per ottenere i tre comportamenti. Infatti per avere ad esempio il caso sovrasmorzato dovremo avere

$$\frac{R_{tot}^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \rightarrow R_{tot} > \frac{2L}{\sqrt{LC}} \rightarrow R_{tot} > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- dove R_{tot} rappresenta la resistenza totale presente nel circuito RLC serie, e quindi

$$R_{tot} = R_G^s + R_L + R$$

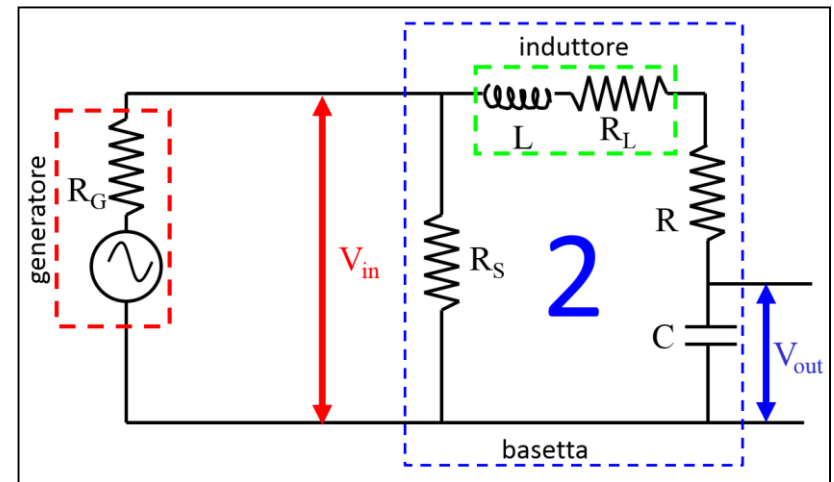
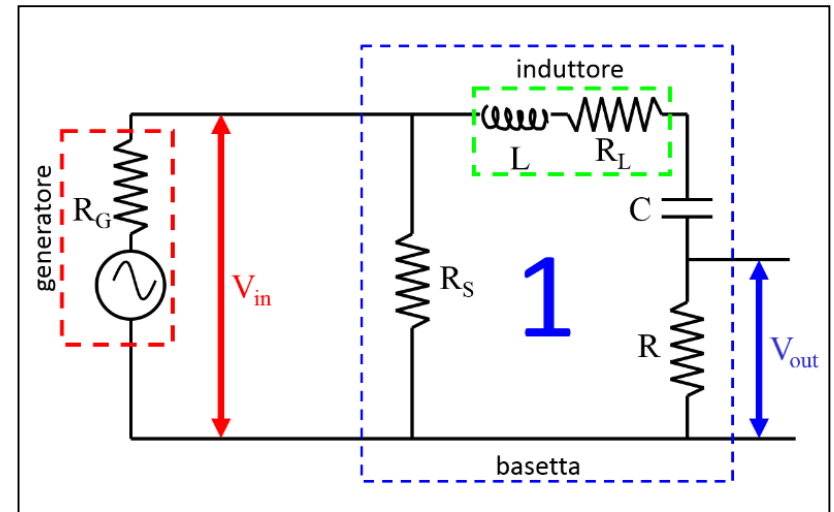
- Noi lasceremo R_G^s e R_L costanti, e varieremo R , la resistenza ai capi della quale misureremo la tensione. Otterremo quindi nei tre casi:

$$\begin{cases} R > 2\sqrt{L/C} & \rightarrow V(t) = RI(t) = -R \frac{q_o \omega_o^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\} \\ R = 2\sqrt{L/C} & \rightarrow V(t) = RI(t) = -R q_o \omega_o^2 t e^{-at} \\ R < 2\sqrt{L/C} & \rightarrow V(t) = RI(t) = R \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \end{cases}$$

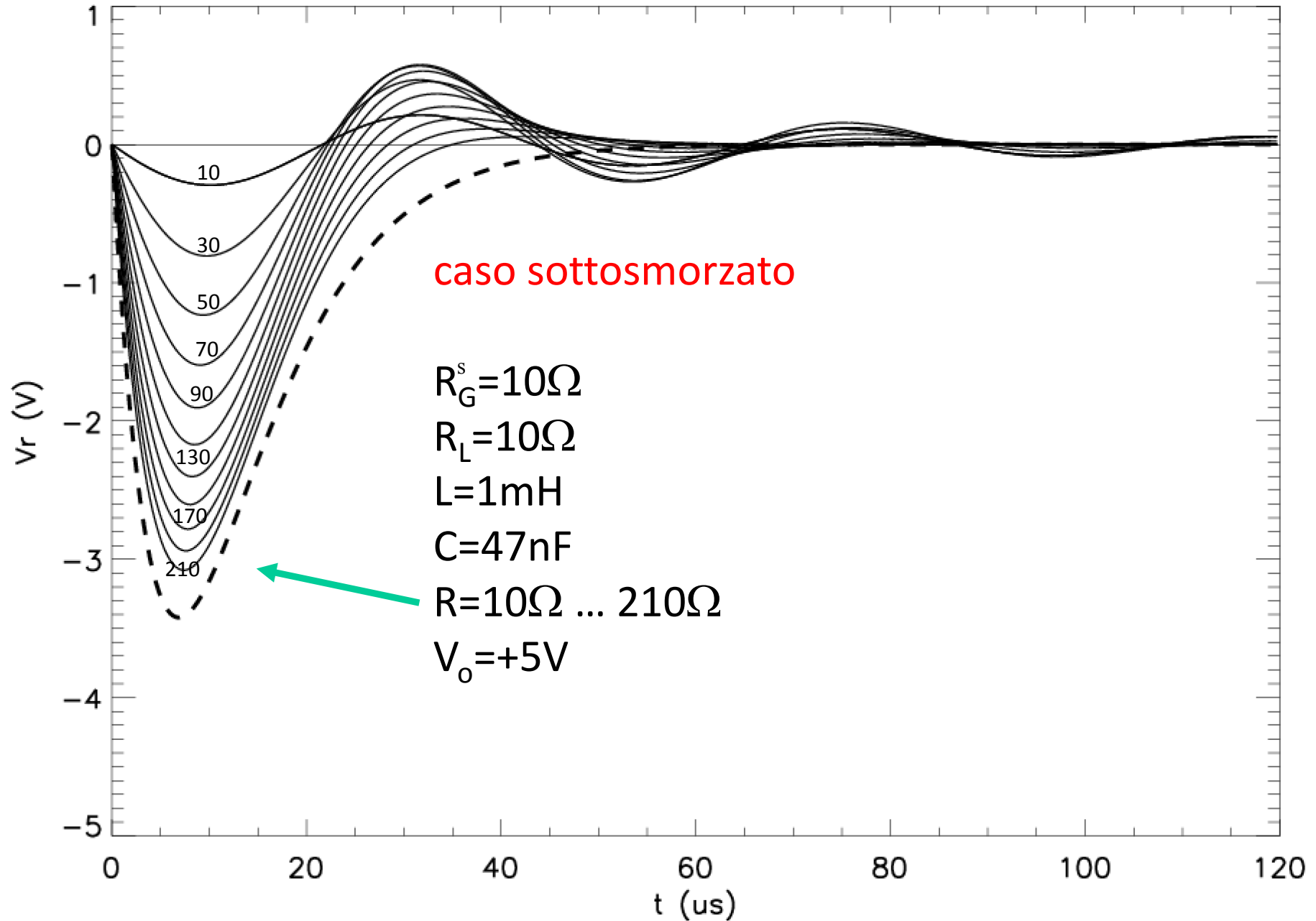
Esperienza del 20/5/2015

Circuito RLC con segnali impulsivi

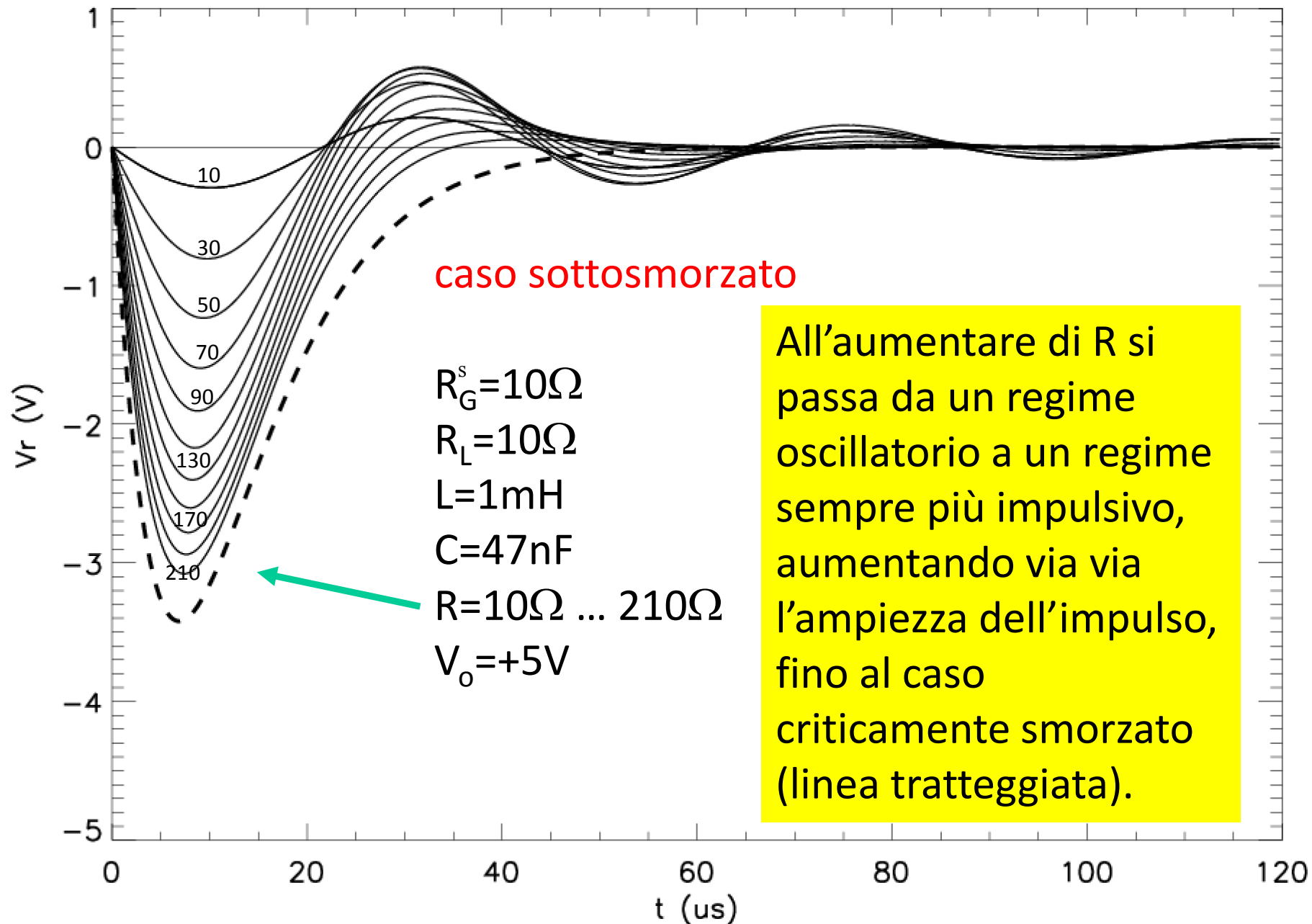
- Lo scopo dell'esperienza è verificare il comportamento sottosmorzato, criticamente smorzato e sovrasmorzato dei circuiti RLC serie visibili a fianco, quando il segnale in ingresso è un impulso ad onda quadra.
- All'inizio dell'esperienza (circuito 1, uscita ai capi della resistenza) si sostituirà la resistenza R con un potenziometro (resistenza variabile) e si osserverà sull'oscilloscopio, all'aumentare del valore di R , il passaggio dal regime oscillatorio sottosmorzato a quello impulsivo sovrasmorzato.
- Le forme d'onda che si osserveranno sono le seguenti.



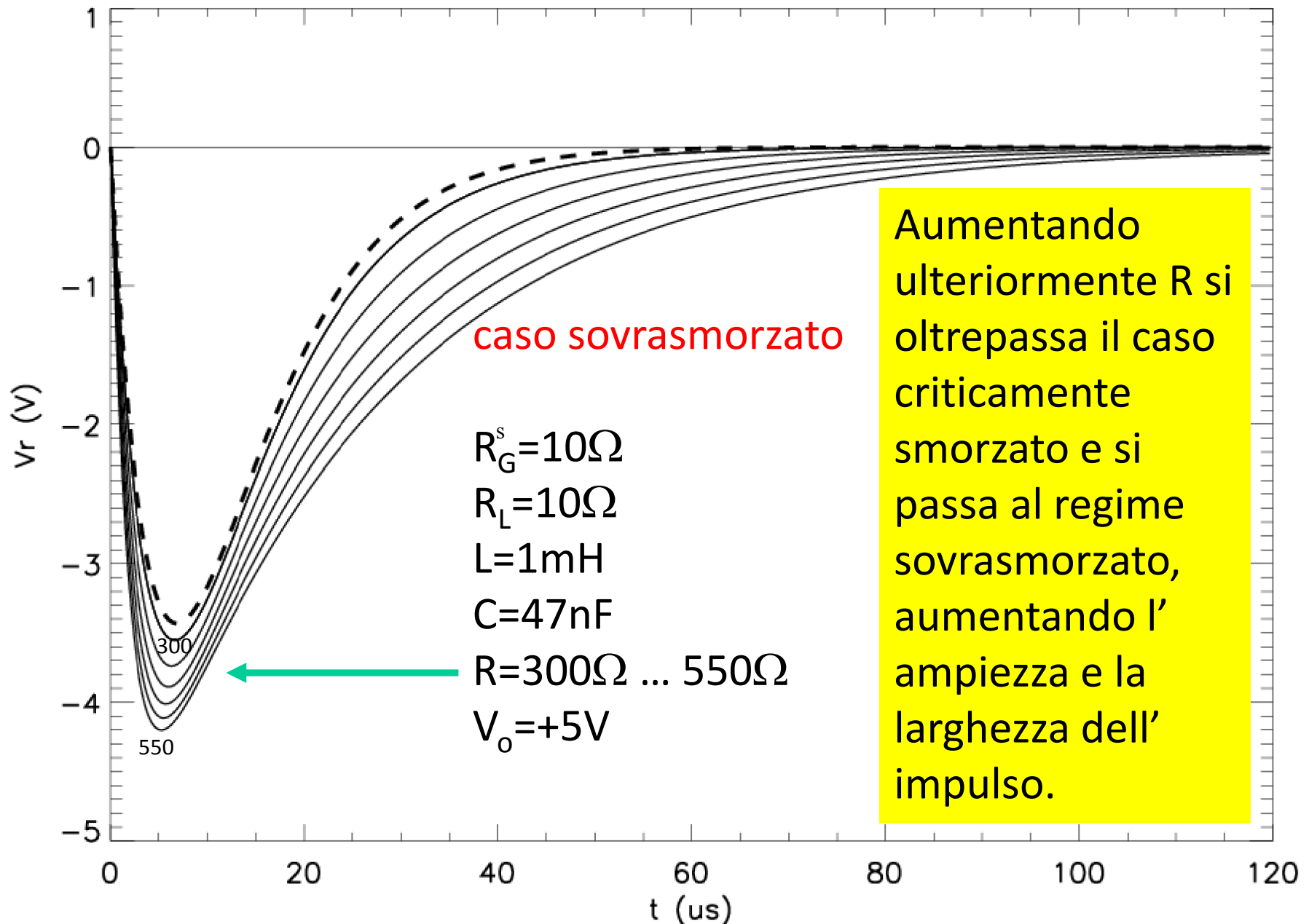
1 - Uscita ai capi del resistore R



1 - Uscita ai capi del resistore R



1 - Uscita ai capi del resistore R



Esperienza del 20/5/2015

Circuito RLC con segnali impulsivi

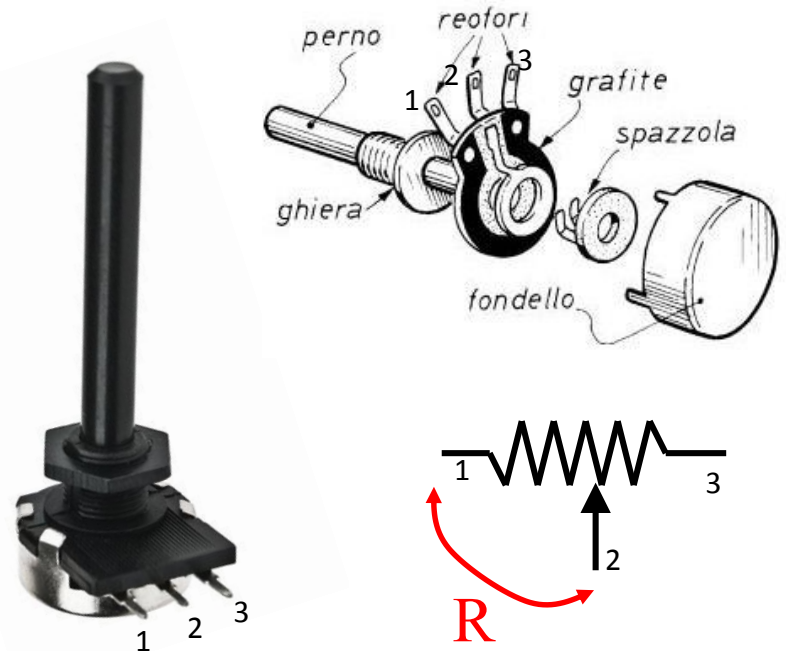
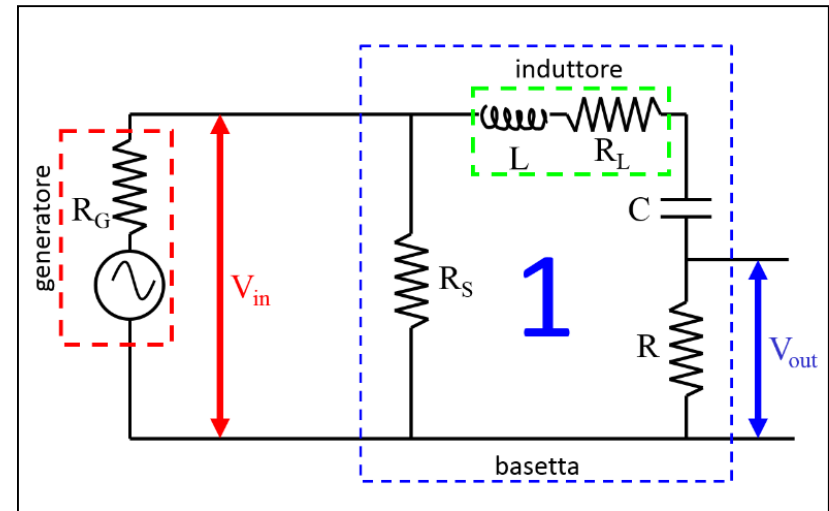
- Il caso criticamente smorzato si ottiene quando le due soluzioni dell'equazione caratteristica sono coincidenti, cioè quando

$$\frac{R_{tot}}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow R_{tot} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- E quindi

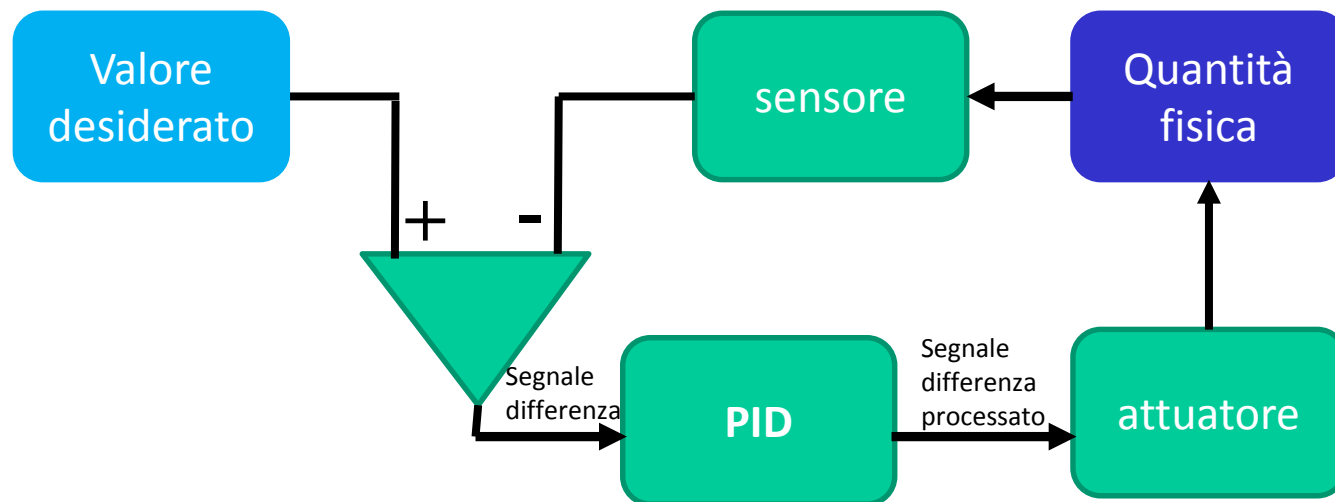
$$R = R_{tot} - R_G^s - R_L = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - R_G^s - R_L$$

- Si ruota l'asse del potenziometro finché non si visualizza sull'oscilloscopio un impulso di minima durata e senza ulteriori oscillazioni: questa sarà la condizione di smorzamento critico. Senza muovere l'asse, si scollega il potenziometro dal circuito e se ne misura la resistenza R, controllando che coincida entro gli errori con quello dato dalla formula sopra. Conviene rifare più volte la procedura, per stimare l'incertezza su R.



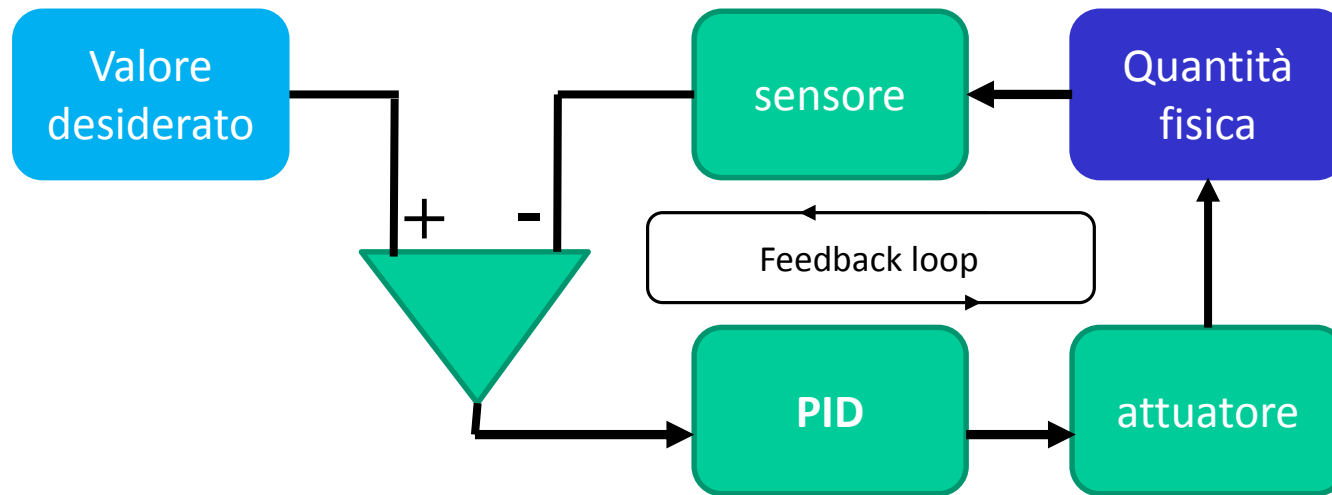
Nota : Importanza del caso criticamente smorzato

- La risposta criticamente smorzata è quella che arriva al valore di regime più rapidamente, senza però introdurre oscillazioni.
- E' importante ottenerla nei **sistemi di controllo**, nei quali uno o più sensori misurano una quantità fisica, ed il loro segnale viene utilizzato, processandolo opportunamente, per regolarla in tempo reale.
- Il segnale del sensore viene confrontato con il segnale desiderato, e la differenza tra i due viene processata introducendo una componente **Proporzionale** (amplificazione), una **Integrale**, una **Differenziale** (PID). Il segnale differenza, processato PID, viene utilizzato per azionare un attuatore, che regola la quantità fisica di interesse finchè il suo valore non è pari a quello desiderato (a quel punto la differenza si annulla e l'attuatore si ferma).



Nota : Importanza del caso criticamente smorzato

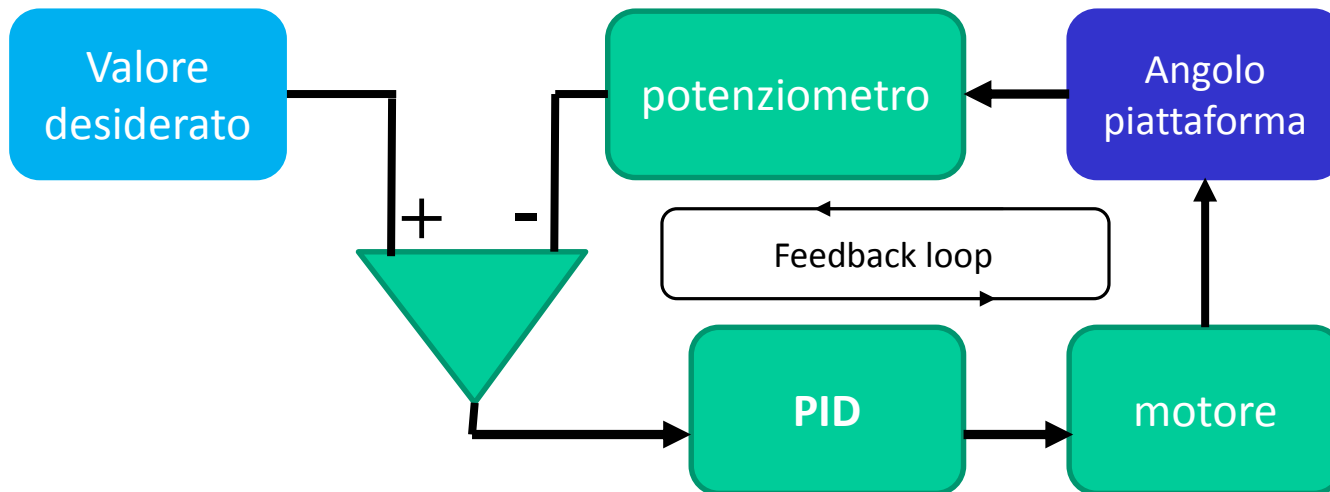
- Questo sistema di controllo è un tipo di **feedback loop** (anello di retroazione), perché la quantità che si vuole regolare, che è una uscita del sistema, viene riutilizzata, misurata dal sensore, per la regolazione della stessa. Viene rimandata indietro, in pasto al regolatore (feedback). La retroazione viene usata comunemente in moltissimi circuiti e sistemi, come si vedrà dopo.



- In questo ed in moltissimi altri casi è importante che **la risposta del segnale del sensore processato sia più veloce possibile, ma senza oscillazioni**. Si deve quindi ottenere un segnale di ingresso all'attuatore processato in modo da realizzare la condizione di **smorzamento critico**.

Nota : Importanza del caso criticamente smorzato

- Ad esempio: un potenziometro (sensore) viene ruotato dal movimento di una piattaforma girevole, quindi la sua resistenza misura l'angolo di rotazione della piattaforma (osservabile). Il segnale proveniente dal potenziometro viene confrontato con quello desiderato. Il segnale differenza viene processato PID ed utilizzato per comandare il motore (attuatore) che fa ruotare la piattaforma, variandone l'angolo in modo da arrivare all'angolo di rotazione voluto, e in modo da reagire ad eventuali perturbazioni esterne che lo farebbero variare.



- Il segnale processato PID deve avere **smorzamento critico** in modo da arrivare all'angolo desiderato il più velocemente possibile, evitando però oscillazioni della piattaforma.

Nota : Importanza del caso criticamente smorzato

- Altro esempio: la lancetta del tester analogico, con la sua molla di richiamo, è un oscillatore meccanico smorzato, che deve essere utilizzato in regime di **smorzamento critico** per raggiungere la posizione di equilibrio nel più breve tempo possibile, senza oscillarci intorno, per leggere il risultato della misura nel più breve tempo possibile.



Esperienza del 20/5/2015 : Circuito RLC con segnali impulsivi

- Nella seconda parte dell'esperienza si studia la tensione ai capi del condensatore, in regime sottosmorzato.
- Se consideriamo l'equazione omogenea per la carica (lezione 9):

$$0 = L \frac{dI}{dt}(t) + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} \rightarrow 0 = L \frac{d^2 Q}{dt^2}(t) + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q(t)}{C}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 Q}{dt^2} + \gamma \frac{dQ}{dt} + \omega_o^2 Q = 0$$

- L'equazione caratteristica e le sue soluzioni sono

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_o^2 = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}$$

- E quindi, nel caso sottosmorzato

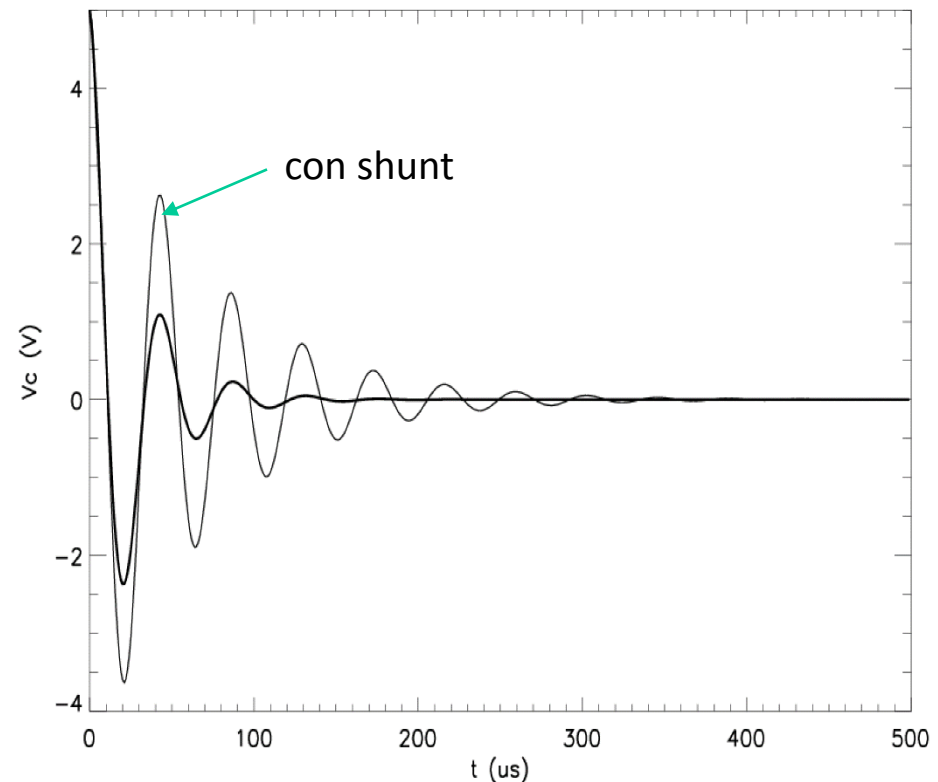
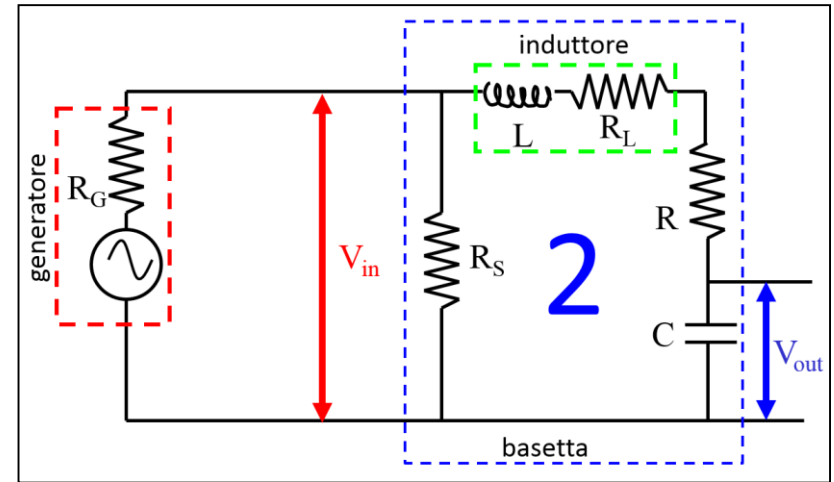
$$Q = Q_o e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t \rightarrow V_C(t) = \frac{Q_o}{C} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$$

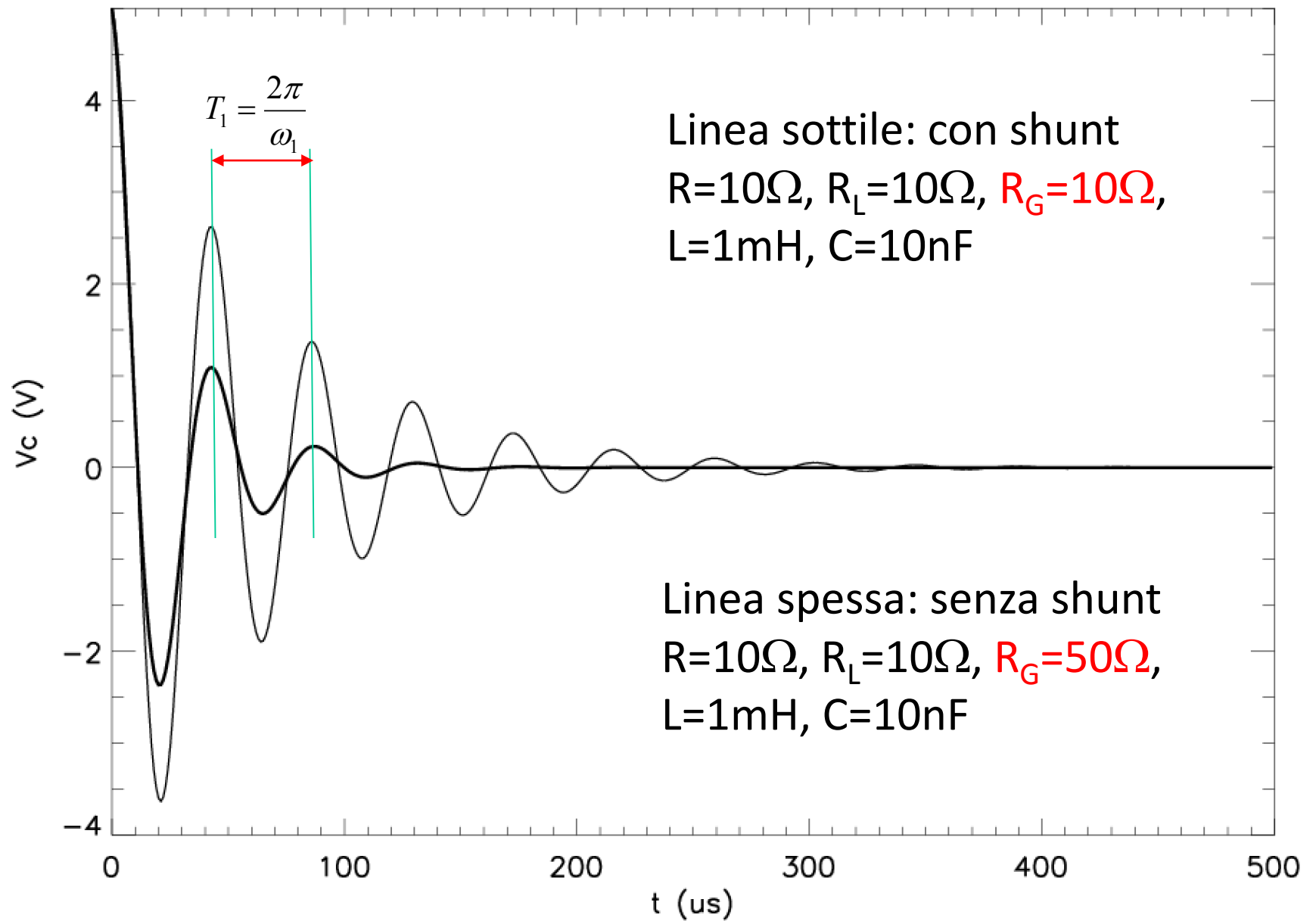
smorzamento
pseudoperiodo

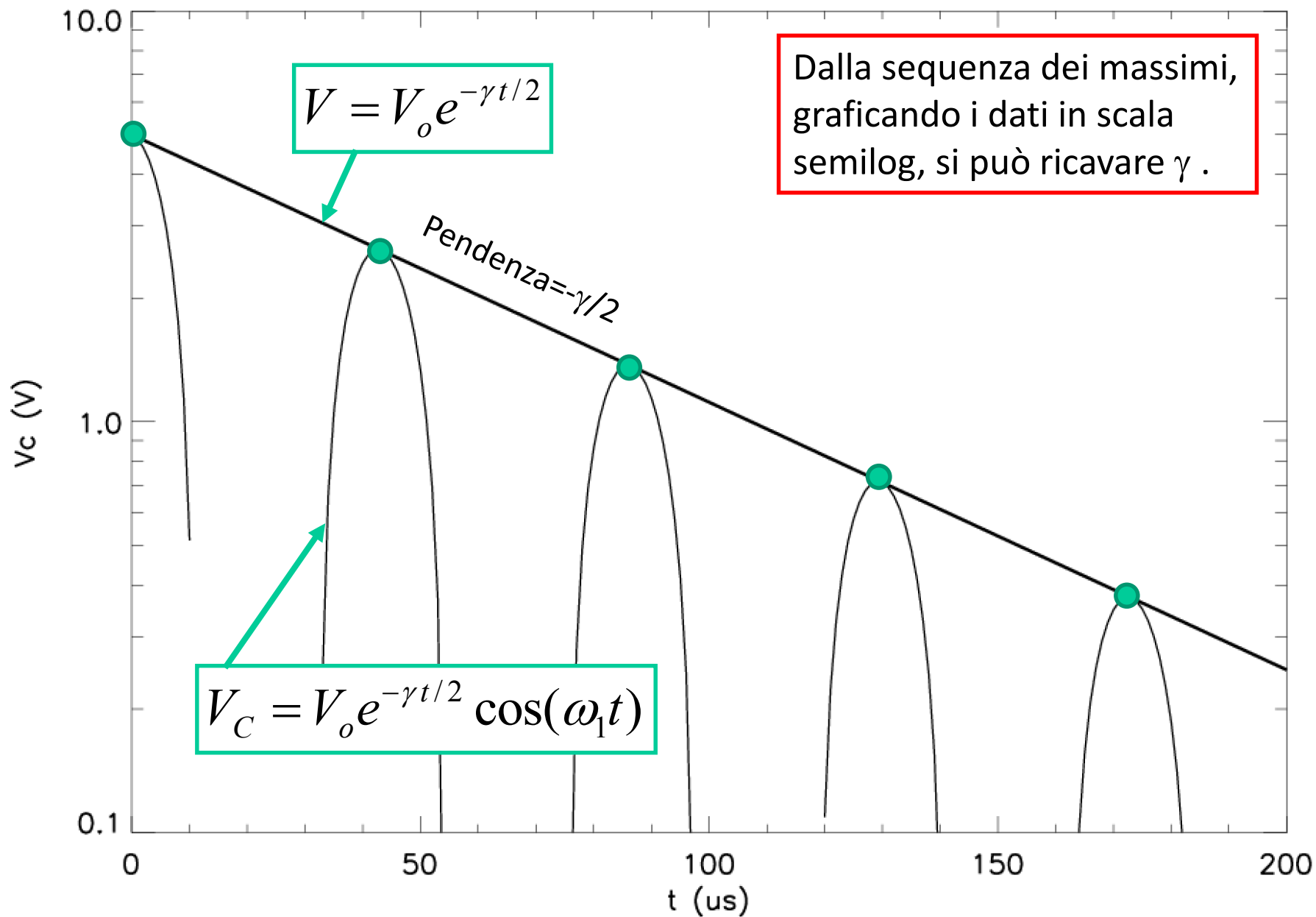
Esperienza del 20/5/2015

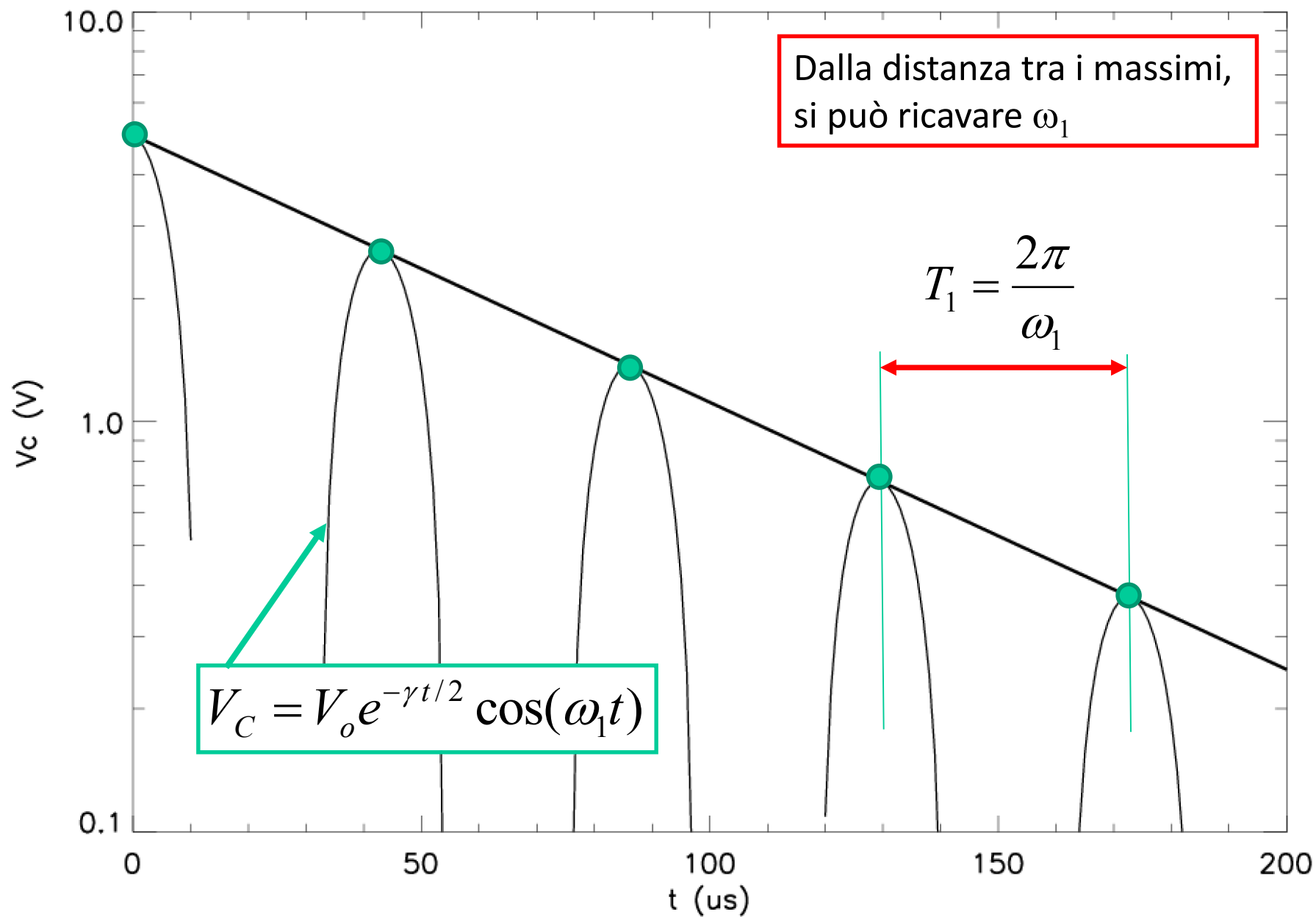
Circuito RLC con segnali impulsivi

- Nella seconda parte dell'esperienza (circuito 2, con uscita ai capi del condensatore, che si ottiene dal precedente scambiando condensatore e resistore) si lavorerà in regime sottosmorzato, inserendo al posto del potenziometro R una resistenza fissa da 10Ω .
- Scopo di questa parte è la misura dello smorzamento e dello pseudo-periodo.
- Si visualizzerà l'oscillazione smorzata, ottimizzando le impostazioni dell'oscilloscopio per riempire il più possibile lo schermo.
- Si prenderanno poi tempi e ampiezze dei massimi successivi dell'oscillazione.





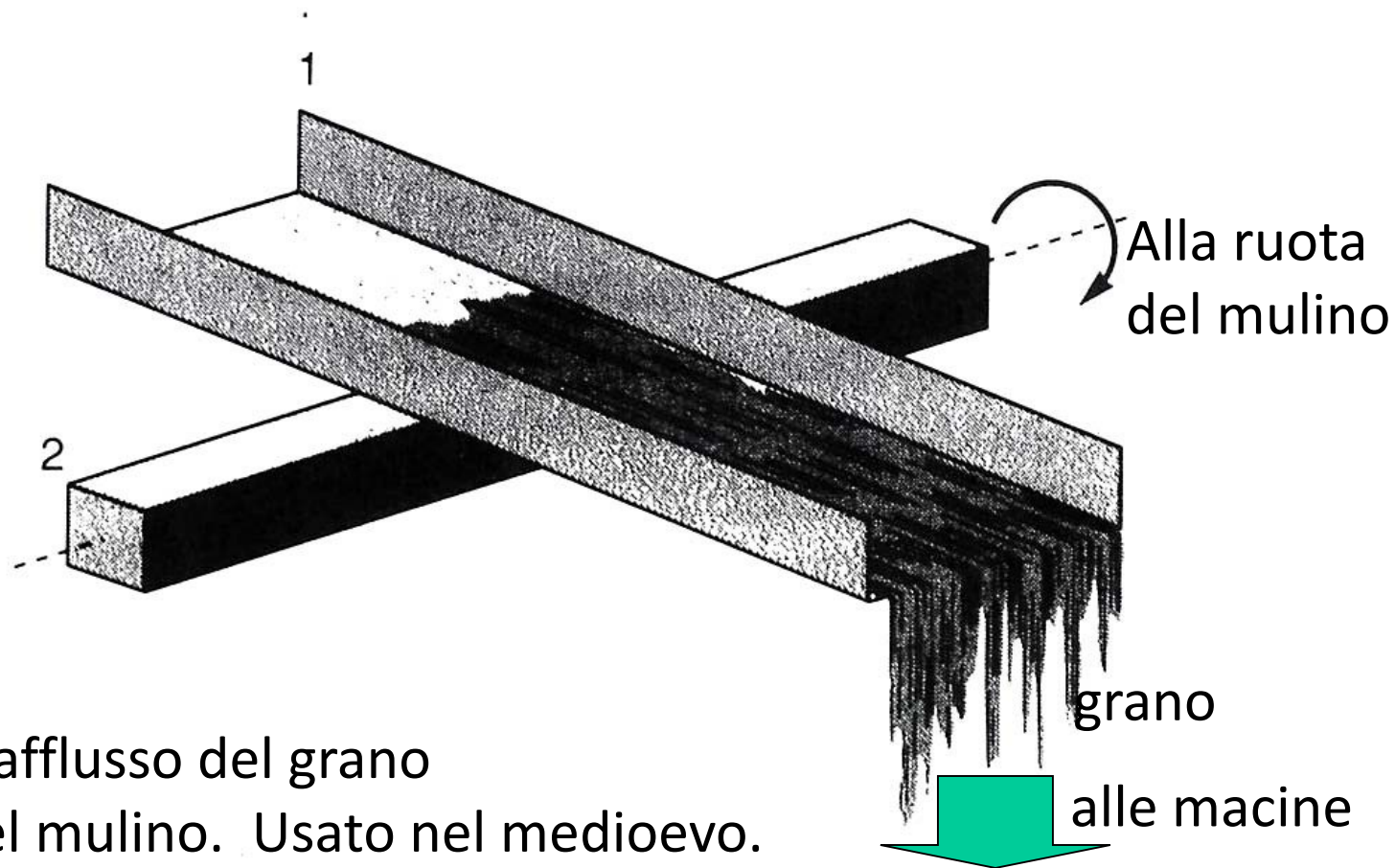




Il feedback (= retroazione, = controreazione in certi casi)

- In un sistema si ha retroazione tutte le volte che la variabile di uscita influenza in qualche modo la variabile d'ingresso.
- Viene utilizzata dal nostro cervello in tutte le nostre attività, è una procedura innata (quando si vuole prendere qualcosa non si danno alla mano le coordinate dell'oggetto: si muove la mano controllando via via con gli occhi dove si trova e muovendola in modo da minimizzare la differenza tra posizione della mano e posizione dell'oggetto).
- La retroazione è stata utilizzata fin dall'inizio della civiltà tecnologica. Esempi:

1

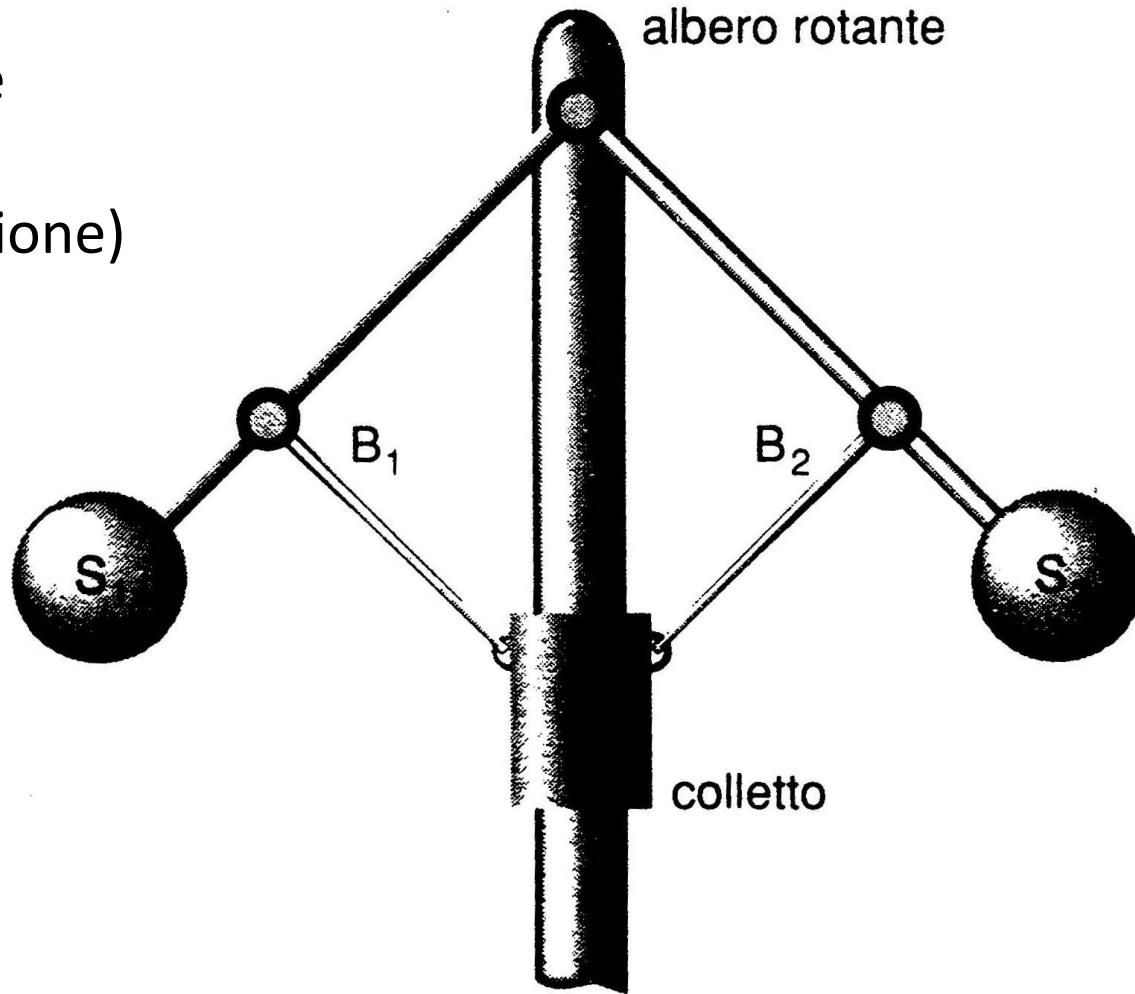


Regolatore di afflusso del grano alle macine del mulino. Usato nel medioevo.

Il grano cade nelle macine grazie ai balzelli dovuti alla rotazione del travicello a sezione quadrata 2.

Se la ruota del mulino, e quindi le macine, ruotano più velocemente, aumenta il numero di balzelli del canale 1 e quindi l'afflusso di grano alle macine. Così viene **stabilizzata** la qualità del macinato in uscita, e ottimizzata la quantità prodotta.

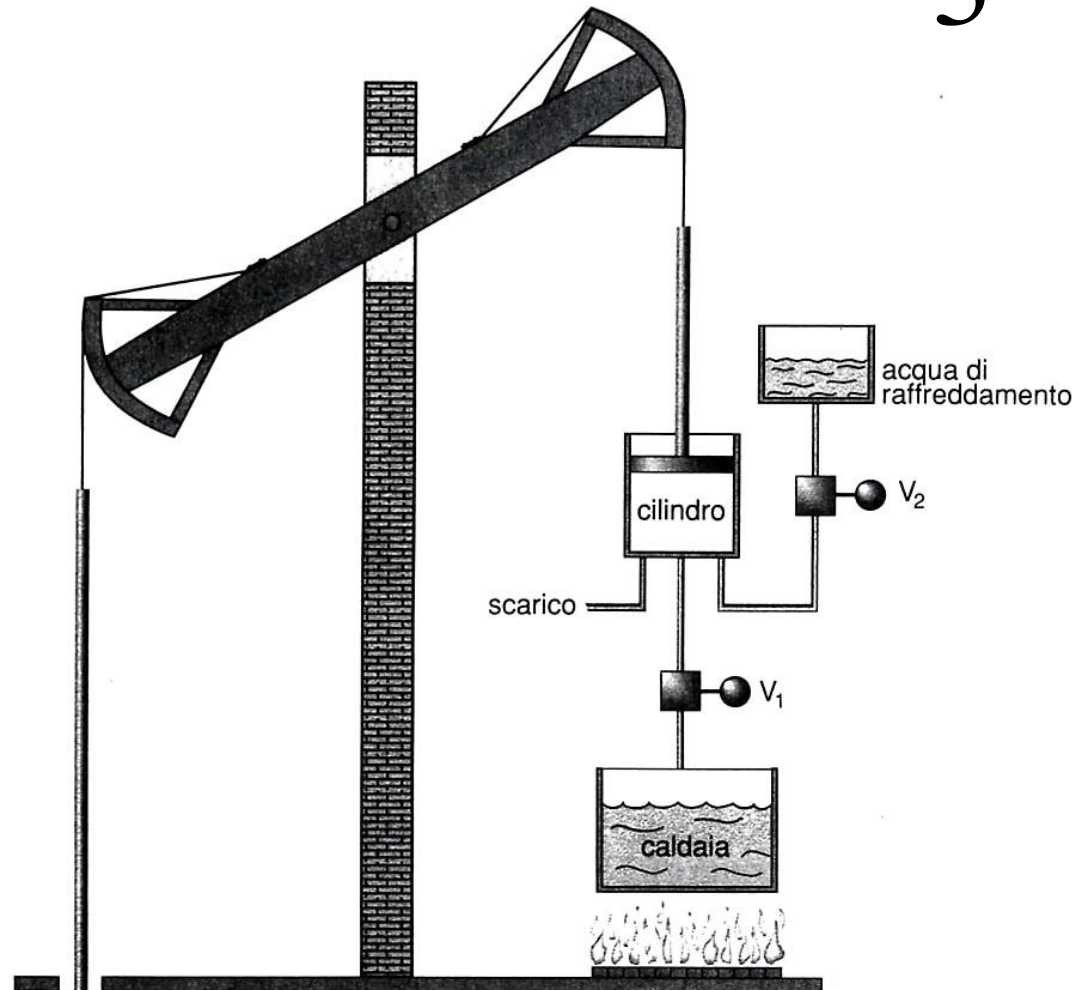
Retroazione
Negativa
(controreazione)



- Regolatore di velocità impiegato da Watt (1787) per le macchine a vapore. Se la velocità aumenta la forza centrifuga aumenta e alza le due sfere pesanti. Il colletto alzandosi agisce sulle valvole del motore diminuendo l' afflusso di vapore e quindi la velocità.

- La macchina a vapore di Newcomen (1705).
- Quando V_1 è aperta il pistone si solleva. V_2 invece raffredda il vapore e quindi il pistone si riabbassa.

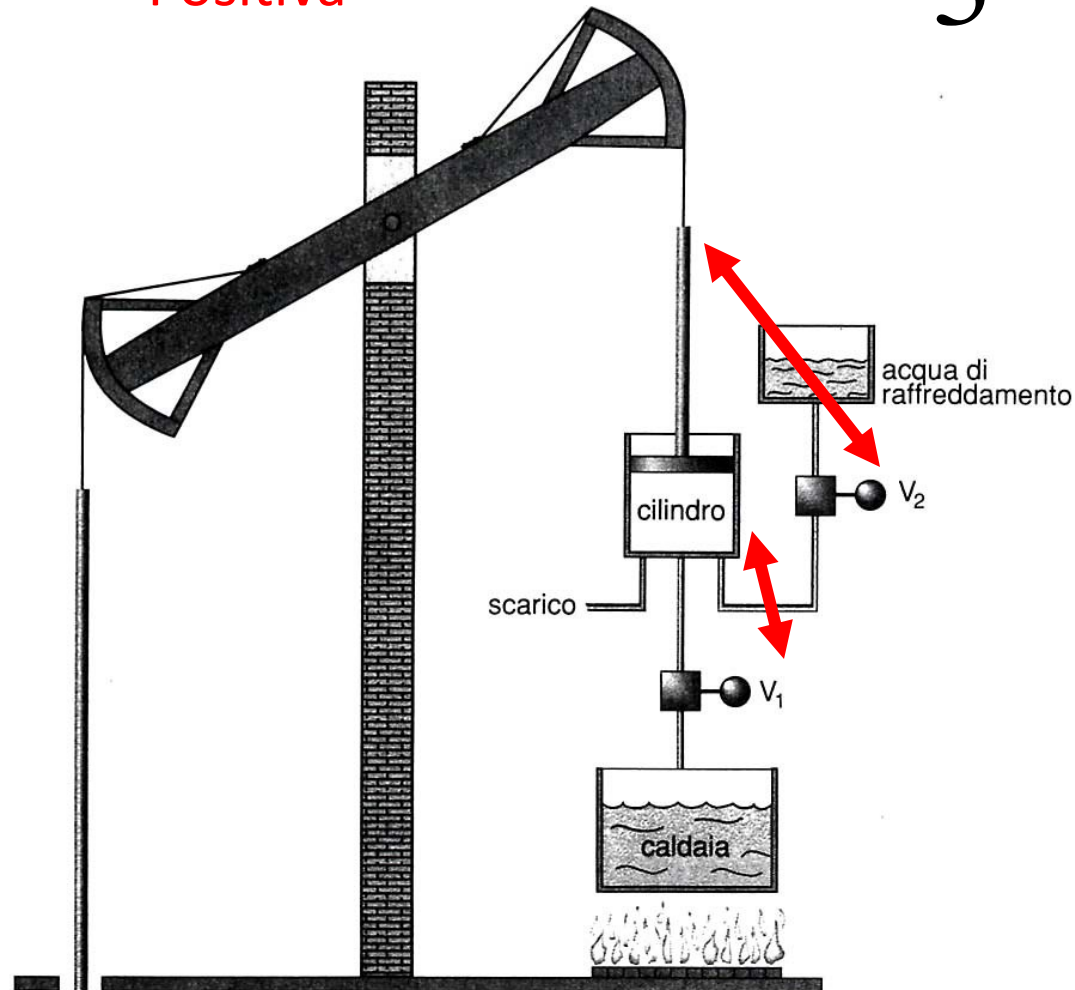
3



- La macchina a vapore di Newcomen (1705).
- Quando V_1 è aperta il pistone si solleva. V_2 invece raffredda il vapore e quindi il pistone si riabbassa.
- Nel 1713 Humphrey Potter modificò la macchina facendo comandare l'apertura e chiusura delle valvole direttamente dallo stantuffo.

Retroazione Positiva

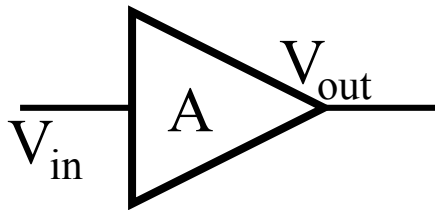
3



In questo caso la retroazione porta ad un movimento **oscillatorio**.

Controreazione in elettronica

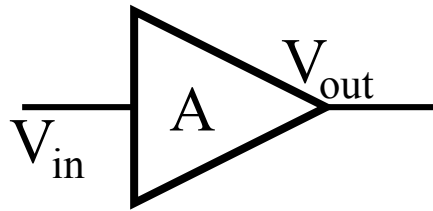
- Un **amplificatore** è un circuito elettronico capace di produrre in uscita una tensione (o una corrente) proporzionale alla tensione (o corrente) in ingresso.
- Non studieremo qui il suo funzionamento (esula dagli scopi di questo corso) ma lo considereremo semplicemente come un blocco circuitale con un ingresso e un'uscita, un po' come i filtri di cui ci siamo già occupati.
- Consideriamo un amplificatore di tensione con guadagno A molto alto (chiameremo A guadagno ad anello aperto). A è il rapporto tra tensione in uscita e tensione in ingresso.



$$V_{out} = AV_{in}$$

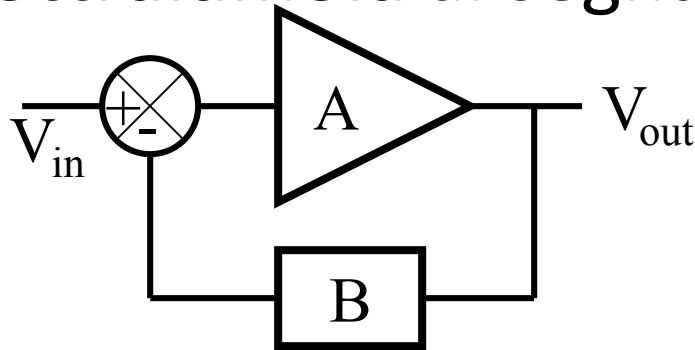
Controreazione in elettronica

- Consideriamo un amplificatore con guadagno A molto alto (chiameremo A guadagno ad anello aperto).



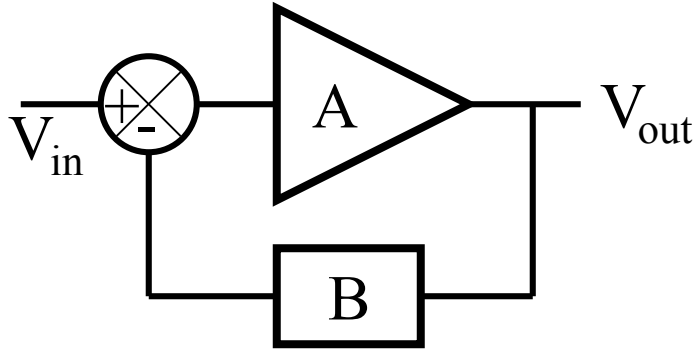
$$V_{out} = AV_{in}$$

- Prendiamo una frazione B del segnale in uscita e **sottraiamola** al segnale d'ingresso.



Controreazione in elettronica

- Prendiamo una frazione B del segnale in uscita, e **sottraiamola** al segnale d'ingresso. Avremo:



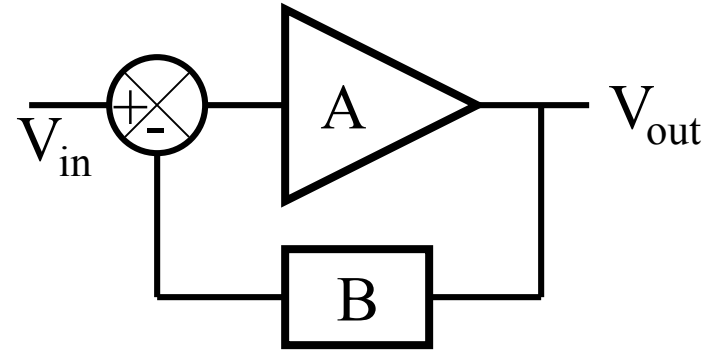
$$V_{out} = A(V_{in} - BV_{out})$$

$$V_{out} = \frac{A}{1 + AB} V_{in}$$

- Abbiamo quindi un nuovo guadagno: $G_C = \frac{A}{1 + AB}$
- Il nuovo guadagno G_C (detto guadagno ad anello chiuso) è inferiore a quello ad anello aperto A di un fattore $1 + AB$, detto fattore di desensibilizzazione.

Controreazione in elettronica

$$G_C = \frac{A}{1 + AB}$$



Se A e' molto grande

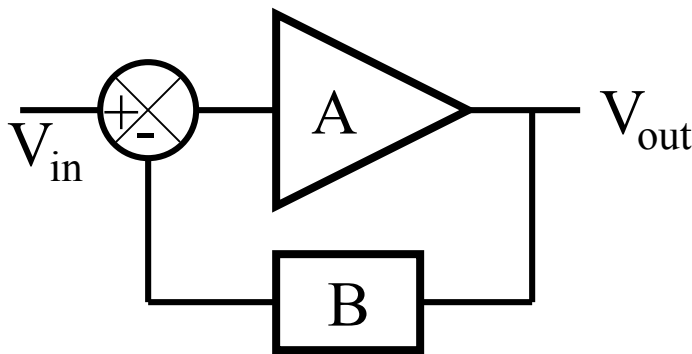
$$G_C \approx \frac{1}{B}$$

$$\text{es. } A = 10^3, B = 0.1 \Rightarrow G_C = \frac{A}{1 + AB} = \frac{1}{1/A + B}$$

$$\approx \frac{1}{B} \frac{1}{1 + \frac{1}{AB}} \approx \frac{1}{B} \left[1 - \frac{1}{AB} \right] = \frac{1}{0.1} \left[1 - \frac{1}{100} \right] = 9.9$$

Controreazione in elettronica

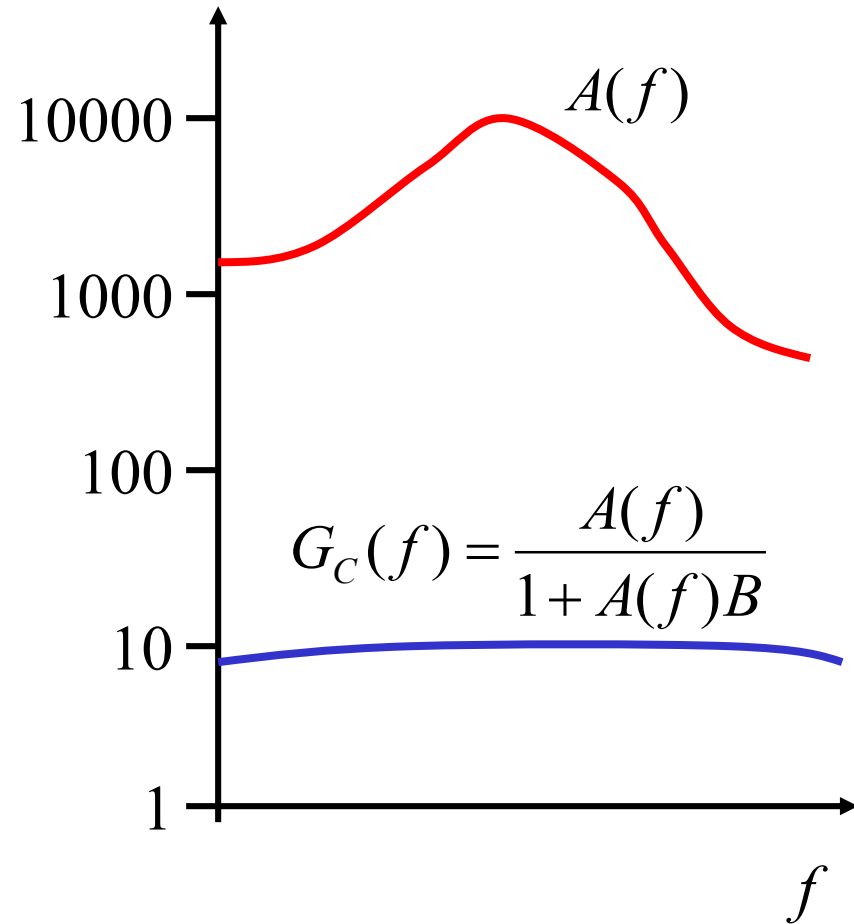
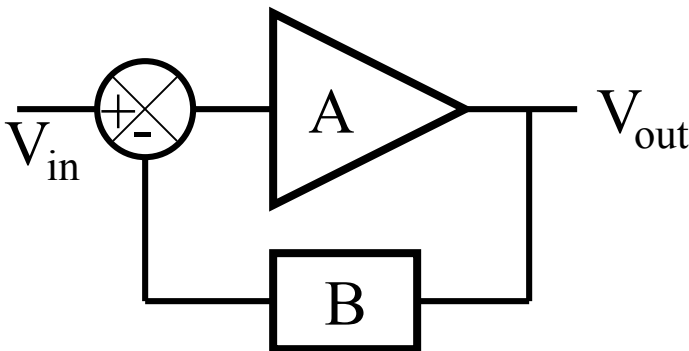
- Siamo partiti da un circuito con guadagno ad anello aperto di 1000, e siamo arrivati ad un nuovo circuito, più complesso, con guadagno 10.
- Dov'è il vantaggio ?
- Il vantaggio è che anche se A non è stabile, G_C lo è !



$$G_C = \frac{A}{1 + AB}$$

Controreazione in elettronica

- Un esempio tipico è un amplificatore con guadagno ad anello aperto $A(f)$ molto alto, ma dipendente dalla frequenza.
- Con controreazione $B=0.1$, il guadagno si riduce a circa 10, ma è praticamente lo stesso a tutte le frequenze (**equalizzazione del guadagno**).



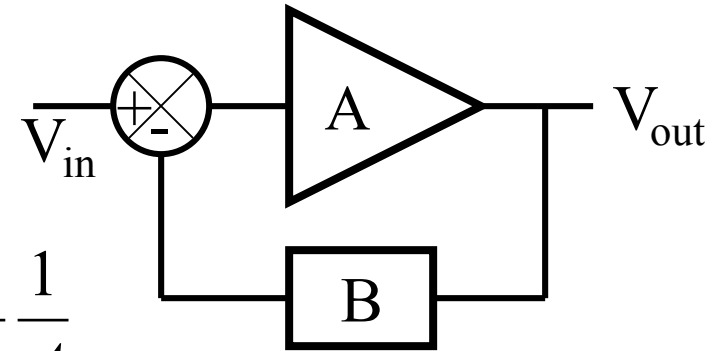
Controreazione in elettronica

- Se A dipende dalla Temperatura o da altri parametri, anche variazioni notevoli di A non modificano molto il guadagno ad anello chiuso, a condizione che sia $AB \gg 1$:

$$G = \frac{A}{1 + AB}$$

$$\frac{dG}{dA} = \frac{(1 + AB) - BA}{(1 + AB)^2} = \frac{A}{(1 + AB)^2} \frac{1}{A}$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{1}{1 + AB} \frac{\Delta A}{A}$$



$1 + AB$ = fattore di
desensibilizzazione

- Le non-linearità di un amplificatore (cioè variazioni del guadagno a seconda del livello del segnale d'ingresso) possono essere curate esattamente nello stesso modo.

Controreazione in elettronica

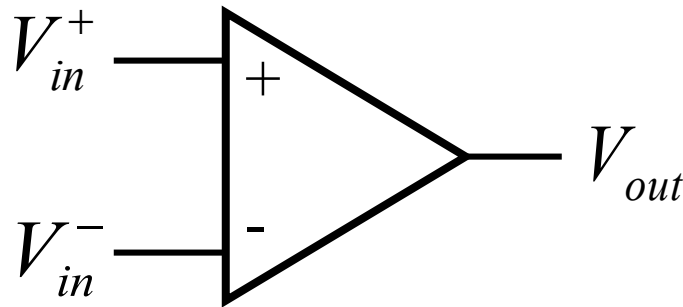
- Si può riottenere un guadagno alto (e stabile) mettendo 4 stadi controreazionati in serie. In tal caso $G_{tot} = (1/B)^4$, e comunque

$$\frac{\Delta G_{tot}}{G_{tot}} = 4 \frac{\Delta G}{G} = \frac{4}{1 + AB} \frac{\Delta A}{A} \ll \frac{\Delta A}{A}$$

- Quando (1928) Harold S. Black tentò di ottenere il brevetto per questa sua idea, (e di applicarla agli amplificatori per le linee telefoniche) fu trattato alla stregua di uno che proponesse il moto perpetuo.
- Oggi il feedback negativo (controreazione) è utilizzato ovunque in elettronica analogica.

Controreazione e amplificatori operazionali.

- L' amplificatore operazionale è un amplificatore **differenziale** (cioè amplifica la differenza tra due tensioni) con **altissimo guadagno**.
- E' un blocco costruttivo di sistemi elettronici importantissimo.
Simbolo dell' amplificatore operazionale:



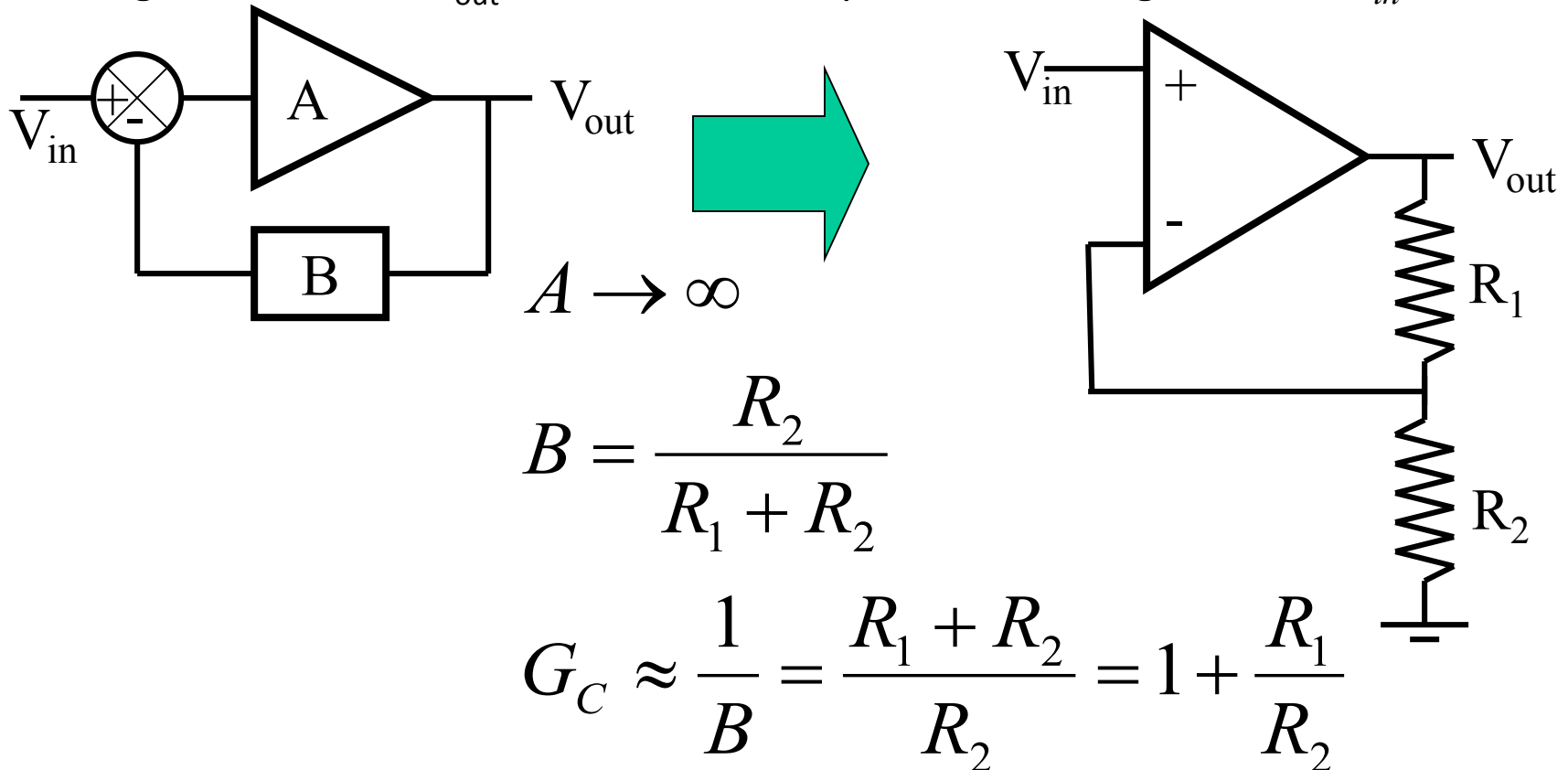
- Funzione:

$$V_{out} = A (V_{in}^{+} - V_{in}^{-})$$

- Dove A (guadagno ad anello aperto) è elevatissimo, $A \gg 10^6$
- Tanto che spesso si assume $A \rightarrow \infty$

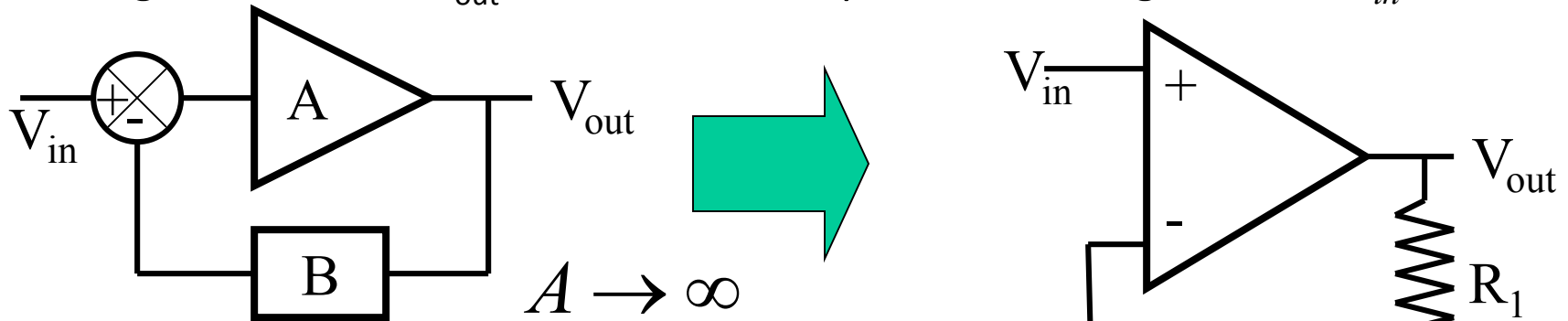
Controreazione e amplificatori operazionali

- L' amplificatore operazionale non viene mai utilizzato ad anello aperto.
- Si applica sempre un feedback per stabilizzarne le prestazioni.
- Data la natura differenziale dell' amplificatore operazionale, è molto facile realizzare in pratica il circuito di feedback.
- Esempio: **amplificatore non invertente**: Si sottrae al segnale V_{in} una frazione del segnale in uscita V_{out} ottenuta con un partitore, collegandola a V_{in}^- .



Controreazione e amplificatori operazionali

- L' amplificatore operazionale non viene mai utilizzato ad anello aperto.
- Si applica sempre un feedback per stabilizzarne le prestazioni.
- Data la natura differenziale dell' amplificatore operazionale, è molto facile realizzare in pratica il circuito di feedback.
- Esempio: **amplificatore non invertente**: Si sottrae al segnale V_{in} una frazione del segnale in uscita V_{out} ottenuta con un partitore, collegandola a V_{in}^- .



L' amplificazione G_c di questo circuito dipende **solo** dal rapporto tra le due resistenze che formano il partitore.

$$B = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$G_c \approx \frac{1}{B} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

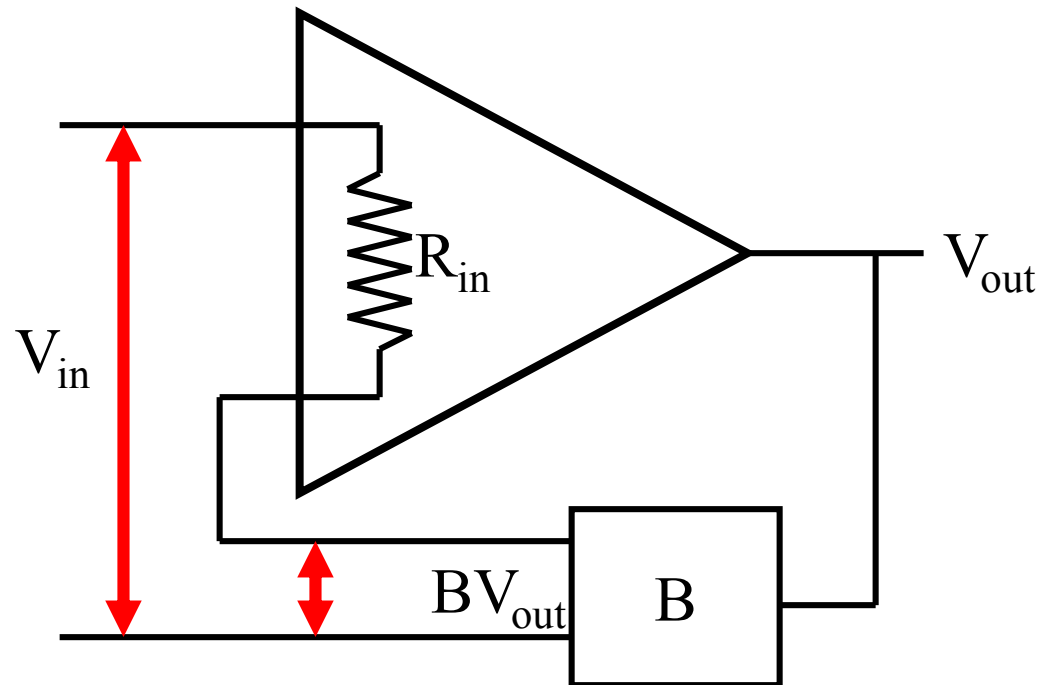
Impedenza d' ingresso

$$V_{in} = R_{in} I_{in} + B V_{out}$$

$$I_{in} = \frac{V_{in} - B V_{out}}{R_{in}} = \frac{V_{in} \left(1 - B \frac{A}{1 + AB} \right)}{R_{in}} =$$

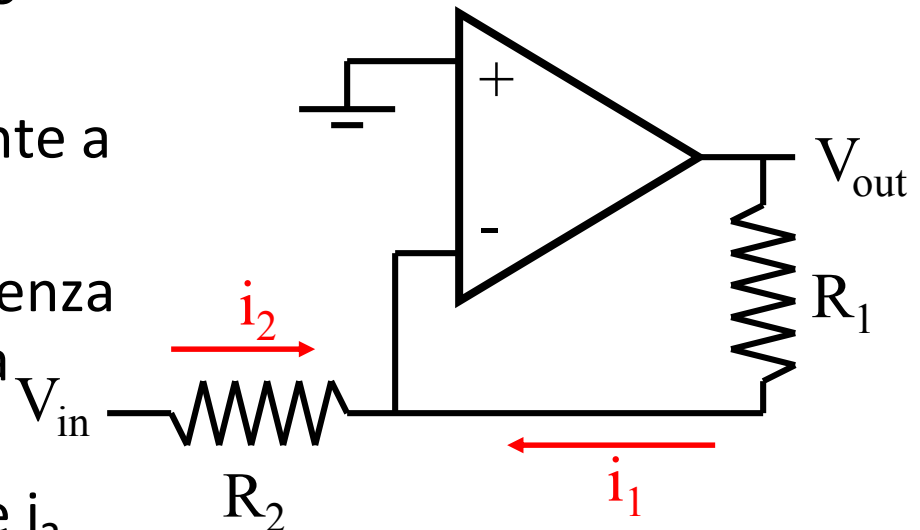
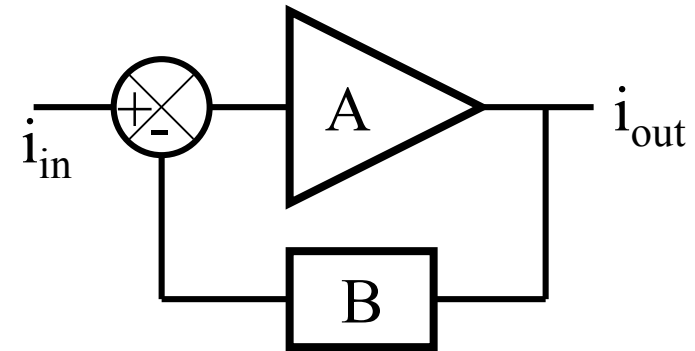
$$= \frac{V_{in}}{R_{in}} \frac{1}{1 + AB} = \frac{V_{in}}{R_{eff}}$$

$$R_{eff} = R_{in} (1 + AB)$$



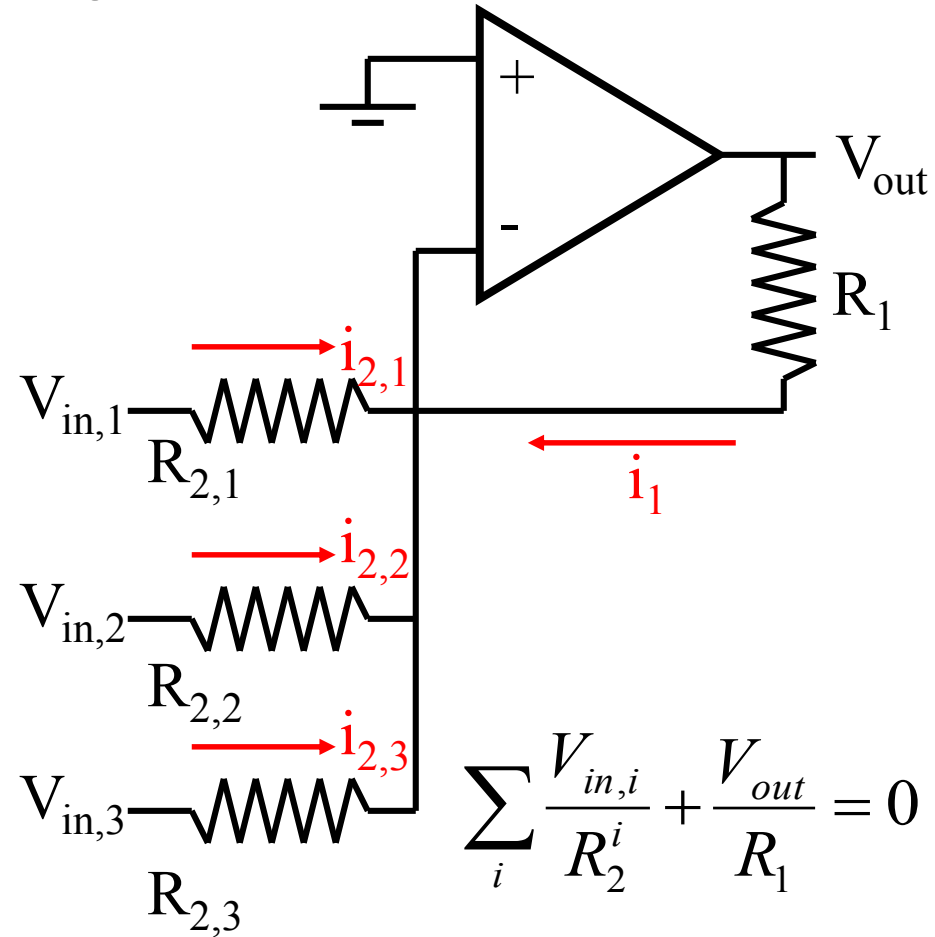
Controreazione e amplificatori operazionali.

- Amplificatore **invertente**. Si ottiene applicando il feedback in corrente.
- Siccome l' amplificazione ad anello aperto è così alta, gli ingressi + e - dell' operazionale devono essere sempre praticamente allo stesso potenziale.
- Quindi l' ingresso - è virtualmente a massa, a potenziale 0.
- Inoltre l' ingresso ha una impedenza alta e praticamente non vi entra corrente.
- La somma delle due correnti i_1 e i_2 deve essere 0
- Ne segue subito $V_{out} = -\left[\frac{R_1}{R_2}\right] V_{in}$



Controreazione e amplificatori operazionali.

- Una utile generalizzazione dell' amplificatore invertente è il sommatore (mixer).
- E' chiaro che la somma di tutte le correnti che arrivano al nodo dell' ingresso negativo deve annullarsi.
- Il circuito esegue quindi la somma di tutte le tensioni in ingresso, pesando ciascuna con l' inverso della relativa resistenza.



$$\sum_i \frac{V_{in,i}}{R_{2,i}} + \frac{V_{out}}{R_1} = 0$$

$$V_{out} = -R_1 \sum_i \frac{V_{in,i}}{R_{2,i}}$$