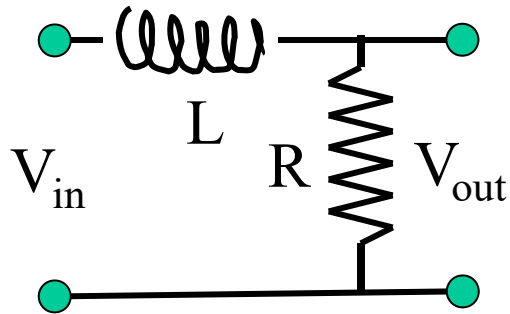


Filtri con induttori

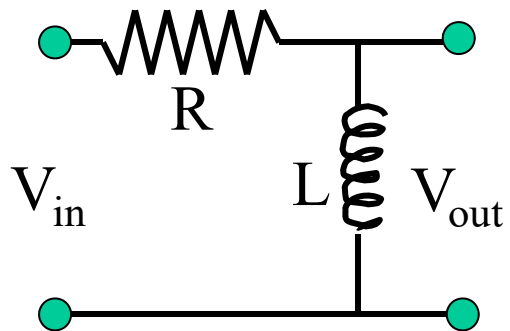
- Si possono realizzare filtri passa-basso e passa alto anche con resistori e induttori, invece che con resistori e condensatori.
- Sempre considerando i partitori di impedenze si ottiene facilmente la funzione di trasferimento $[V_{out}/V_{in}]$ in funzione di ω , o di f :



$$\frac{\vec{V}_{out}}{\vec{V}_{in}} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega(L/R)}$$

Passa-basso
con frequenza
di taglio

$$f_o = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{R}{2\pi L}$$



$$\frac{\vec{V}_{out}}{\vec{V}_{in}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega(L/R)}{1 + j\omega(L/R)}$$

Passa-alto con
frequenza di
taglio

$$f_o = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{R}{2\pi L}$$

Circuiti integratori e derivatori

- Sono circuiti che producono all' uscita un segnale di tensione proporzionale all' integrale (o alla derivata) del segnale in ingresso.
- Che si possano costruire e' evidente dalle relazioni

$$V = \frac{1}{C} \int_0^t I dt ; \quad V = L \frac{dI}{dt}$$

$$I = C \frac{dV}{dt} ; \quad I = \frac{1}{L} \int_0^t V dt$$

Circuiti integratori: RC

$$V_{in} = V_C + V_R \quad \text{se}$$

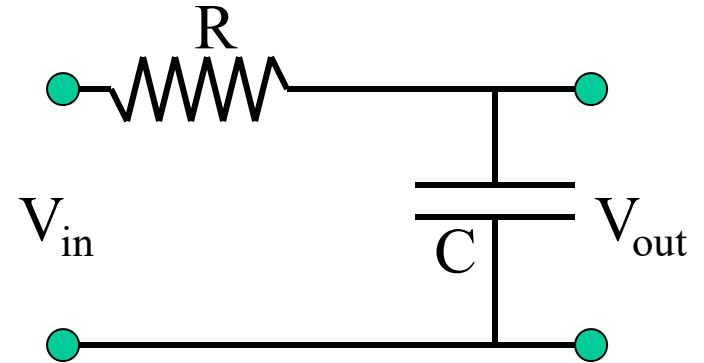
$$|V_C(t)| \ll |V_R(t)|$$

$$V_{in}(t) \approx V_R(t) = RI(t)$$

$$I(t) \cong \frac{1}{R} V_{in}(t)$$

$$V_{out}(t) = V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t \frac{1}{R} V_{in}(t') dt'$$

$$V_{out}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t V_{in}(t') dt'$$



Circuiti integratori:

$$V_{in} = V_L + V_R \quad \text{se}$$

$$|V_R(t)| \ll |V_L(t)|$$

$$V_{in}(t) \approx V_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

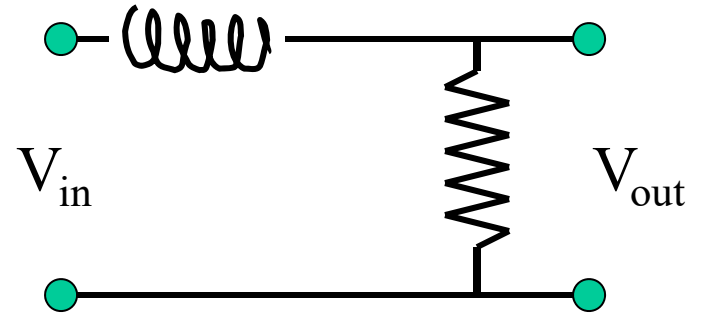
$$L di(t) \cong V_{in}(t) dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_o}^t V(t') dt' + i(t_o)$$

$$V_{out}(t) = V_R(t) = Ri(t) = \frac{R}{L} \int_{t_o}^t V(t') dt' + Ri(t_o)$$

$$V_{out}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_o}^t V(t') dt' + Ri(t_o)$$

LR



Circuiti derivatori: CR

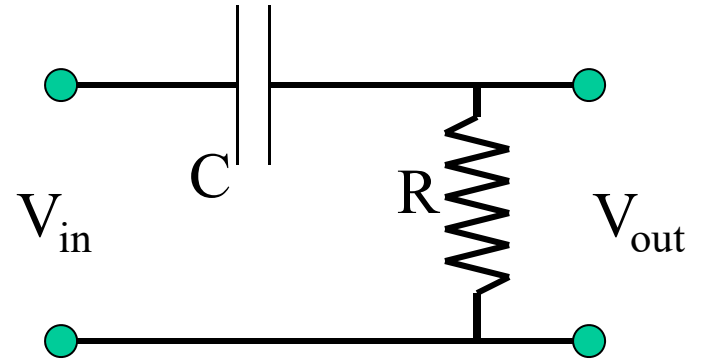
$$V_{in} = V_C + V_R$$

$$|V_R(t)| \ll |V_C(t)| \quad \text{se}$$

$$V_{in}(t) \approx V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt'$$

$$\frac{d}{dt} V_{in}(t) \approx \frac{d}{dt} V_C(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

$$V_{out}(t) = Ri(t) = RC \frac{d}{dt} V_{in}(t) = \tau \frac{d}{dt} V_{in}(t)$$



Circuiti derivatori

RL

$$V_{in} = V_L + V_R$$

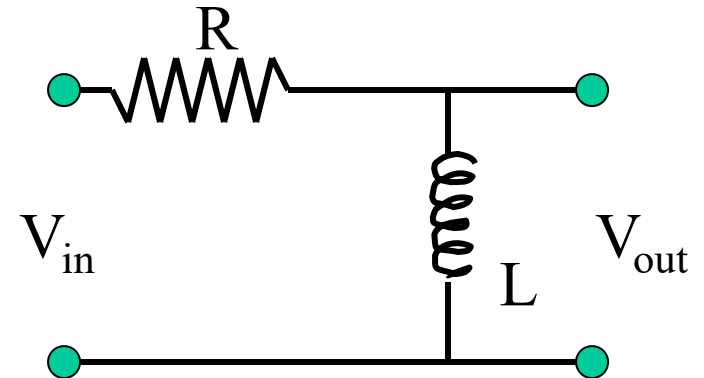
$$|V_L(t)| \ll |V_R(t)|$$

$$V_{in}(t) \approx V_R(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} V_{in}(t)$$

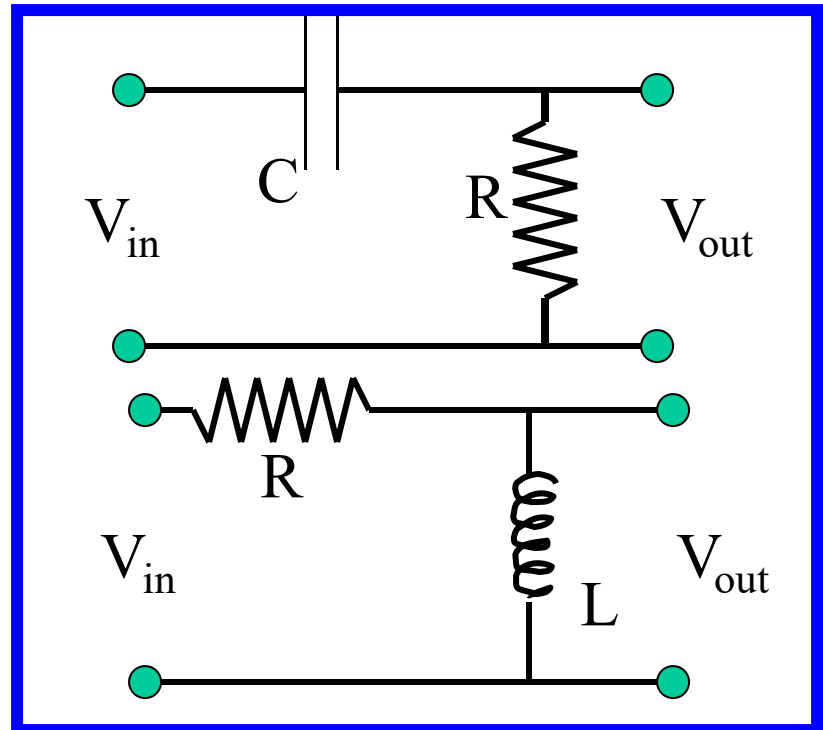
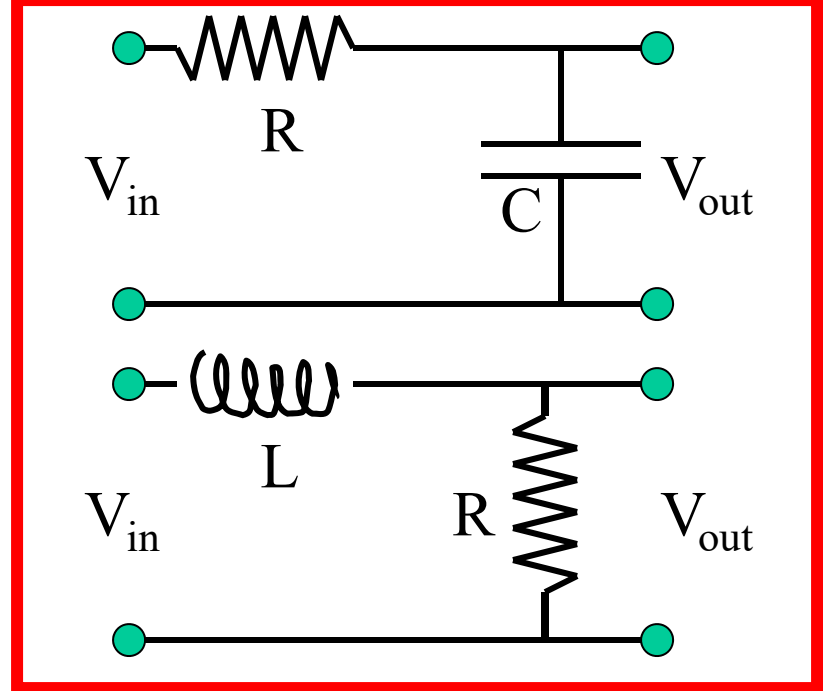
$$V_{out}(t) = L \frac{d}{dt} i(t) = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} V_{in}(t)$$

$$V_{out}(t) = \tau \frac{d}{dt} V_{in}(t)$$



Circuiti integratori e derivatori

- Abbiamo quindi delle “approssimazioni” di circuiti integratori e derivatori.
- I filtri “**passa basso**” RC e LR forniscono gli **integratori**;
- I filtri “**passa alto**” CR e RL forniscono i **derivatori**.



- Possiamo quindi graficare, in **Regime sinusoidale** funzione della frequenza del segnale d'ingresso, l'ampiezza del segnale in uscita, ed il suo sfasamento:

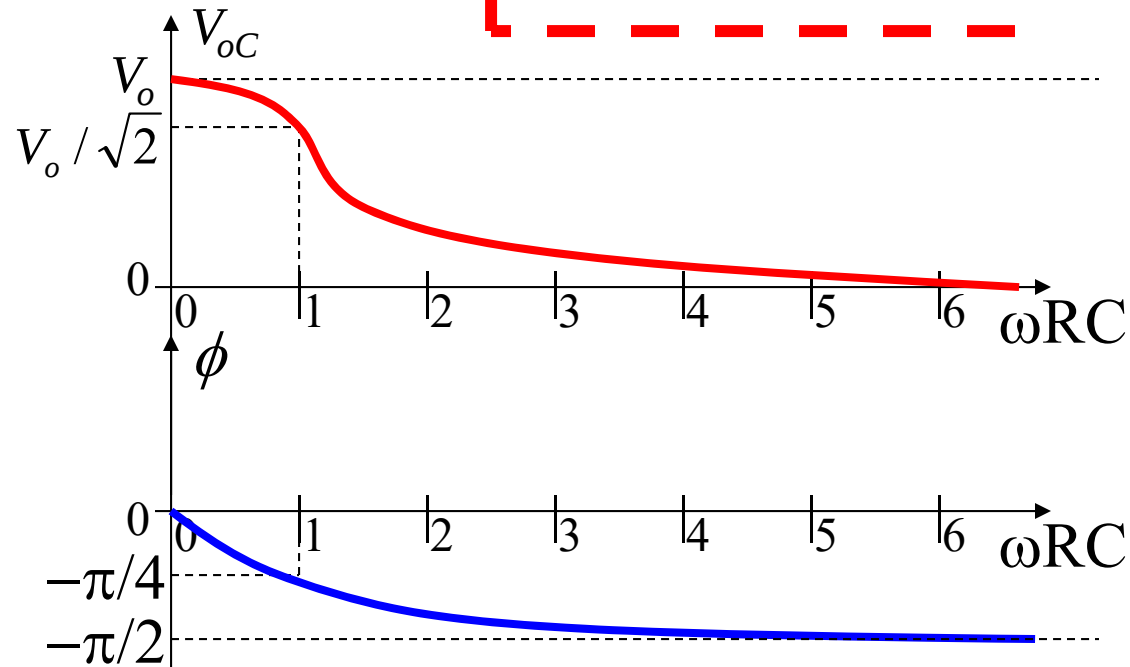
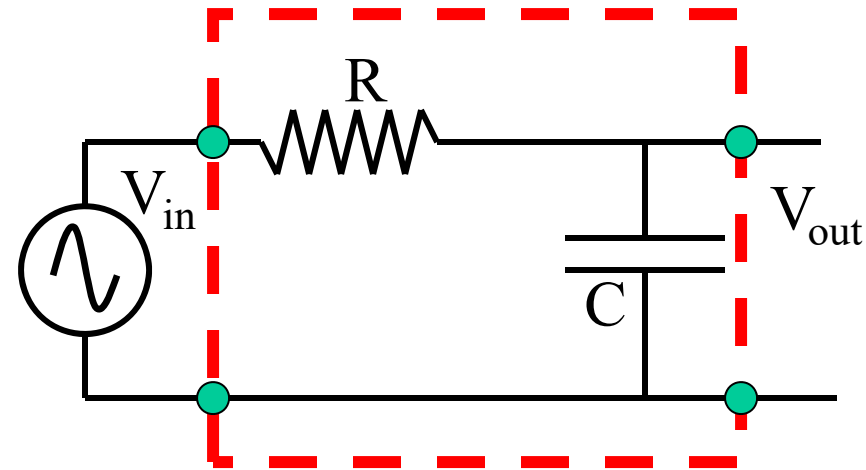
$$V_{in} = V_o e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$V_{out} = V_{oC} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

dove

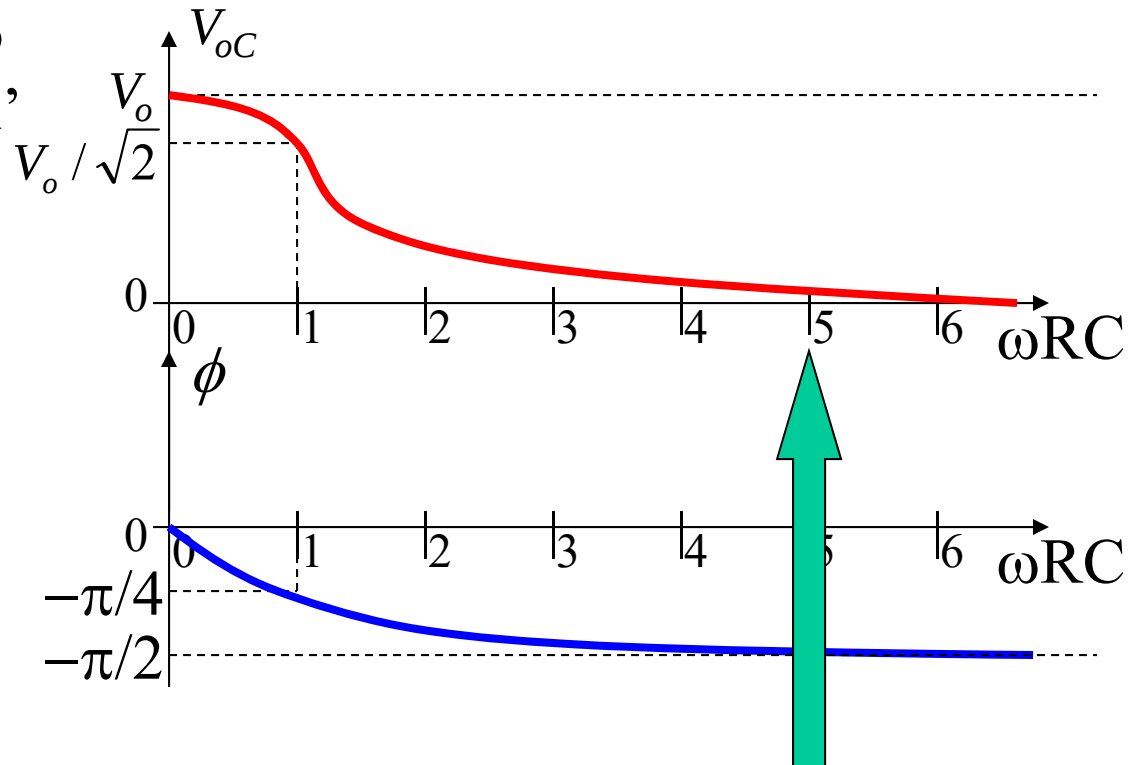
$$V_{oC} = \frac{V_o}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}$$

$$\varphi = \arctan(-\omega\tau)$$



Circuiti integratori e derivatori

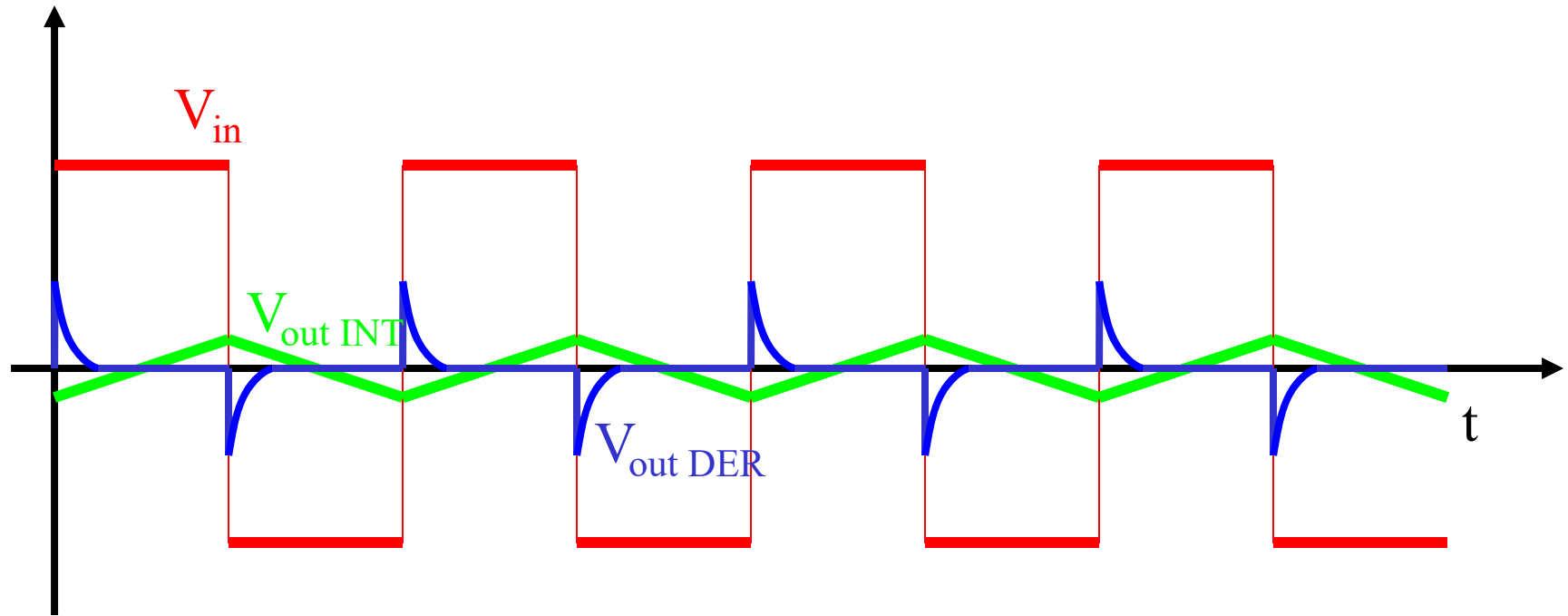
- Le approssimazioni sono tanto migliori quanto più il segnale in uscita è piccolo rispetto a quello in ingresso.
- Per i circuiti derivatori questa approssimazione è rispettata tanto meglio quanto più $f < f_o = 1/2\pi\tau$;
- Per i circuiti integratori questa approssimazione è rispettata tanto meglio quanto più $f > f_o = 1/2\pi\tau$;



A questa frequenza il passa basso è un buon integratore. Ma il segnale in uscita è ridotto di $1/\omega\tau$!

Risposta Impulsiva

- Supponiamo di applicare ad un circuito integratore o ad un derivatore un segnale ad onda quadra:



- Alla fine della terza esperienza potrete provare ad ottenere queste forme d'onda sperimentalmente. La difficoltà sta nel fatto che sono tanto più ideali (quindi simili alla derivata o all'integrale di V_{in}) quanto più la loro ampiezza è piccola.

Metodo dell' ellisse

- Si applicano i segnali ai due assi ortogonali.

$$X = V_X \cos \omega t$$

$$Y = V_Y \cos(\omega t + \varphi)$$

- Eliminando t viene una eq. $Y(X)$ di una ellisse.

Perché in modalità XY si vede un'ellisse ?

- I due segnali che inviamo agli ingressi x e y (e quindi le conseguenti deflessioni del puntino luminoso sugli assi x e y del monitor) sono:

$$\begin{cases} x = X \sin(\omega t) \\ y = Y \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

- Al passare del tempo il puntino luminoso percorrerà tutti i punti descritti dalle due equazioni sopra, che rappresentano quindi l'equazione parametrica della curva percorsa. Si può eliminare il parametro (t) e ricavare quindi l'equazione della traiettoria come segue. Si riscrivono le due equazioni in modo che una dia il seno di ωt e l'altra dia il coseno:

$$\frac{x}{X} = \sin \omega t$$

$$\frac{y}{Y} = \frac{x}{X} \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \rightarrow \frac{1}{\sin \varphi} \left[\frac{y}{Y} - \frac{x}{X} \cos \varphi \right] = \cos \omega t$$

- Quadrando le due equazioni e sommando membro a membro si elimina t , ottenendo

$$\left(\frac{x}{X} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[\frac{y}{Y} - \frac{x}{X} \cos \varphi \right]^2 = 1$$

- da cui

$$\sin^2 \varphi \left(\frac{x}{X} \right)^2 + \left(\frac{y}{Y} \right)^2 - 2 \left(\frac{y}{Y} \right) \left(\frac{x}{X} \right) \cos \varphi + \left(\frac{x}{X} \right)^2 \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$$

- ovvero

$$\left(\frac{x}{X} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{X} \right) \left(\frac{y}{Y} \right) \cos \varphi + \left(\frac{y}{Y} \right)^2 = \sin^2 \varphi$$

Equazione di una
ellisse ruotata
rispetto agli assi xy

Perché in modalità XY si vede un'ellisse ?

$$\left(\frac{x}{X}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{X}\right)\left(\frac{y}{Y}\right)\cos\varphi + \left(\frac{y}{Y}\right)^2 = \sin^2\varphi$$

- è l'equazione di una ellisse il cui semiasse maggiore forma un angolo θ rispetto all'asse x, con

$$\operatorname{tg}(2\vartheta) = \frac{2XY}{X^2 - Y^2} \cos\varphi$$

- Infatti, sostituendo il legame tra coordinate ruotate di un angolo θ (coordinate x' e y') e coordinate non ruotate (coordinate x e y)

$$x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta$$

$$y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta$$

nell'equazione sopra, si ha

$$\left(\frac{x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta}{X}\right)^2 - 2 \frac{[x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta][x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta]}{XY} \cos \varphi + \left[\frac{x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta}{Y}\right]^2 = \sin^2 \varphi$$

- Da cui, (d'ora in poi scriveremo x e y invece che x' e y' , per brevità):

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 \cos^2 \vartheta + y^2 \sin^2 \vartheta - 2xy \sin \vartheta \cos \vartheta}{X^2} - \frac{2(x^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + xy \cos^2 \vartheta - yx \sin^2 \vartheta - y^2 \sin \vartheta \cos \vartheta)}{XY} \cos \varphi + \\ & + \frac{x^2 \sin^2 \vartheta + y^2 \cos^2 \vartheta + 2xy \sin \vartheta \cos \vartheta}{Y^2} = \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

Perché in modalità XY si vede un'ellisse ?

- Moltiplicando tutto per $(XY)^2$ e svolgendo i calcoli si ottiene (d'ora in poi scriveremo x e y invece che x' e y' , per brevità):

$$Y^2(x^2 \cos^2 \vartheta + y^2 \sin^2 \vartheta - 2xy \sin \vartheta \cos \vartheta) - 2XY(x^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + xy \cos^2 \vartheta - yx \sin^2 \vartheta - y^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \cos \varphi + X^2(x^2 \sin^2 \vartheta + y^2 \cos^2 \vartheta - 2xy \sin \vartheta \cos \vartheta) = X^2 Y^2 \sin^2 \varphi$$

- Ovvero, raccogliendo i termini in x^2 , y^2 , xy :

$$x^2[Y^2 \cos^2 \vartheta - 2XY \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi + X^2 \sin^2 \vartheta] + y^2[Y^2 \sin^2 \vartheta + 2XY \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi + X^2 \cos^2 \vartheta] - 2xy[Y^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + XY(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \cos \varphi - X^2 \sin \vartheta \cos \vartheta] = X^2 Y^2 \sin \varphi$$

- Questa è l'equazione di una ellisse con semiassi paralleli agli assi xy se può essere ridotta alla forma $Ax^2 + By^2 = 1$, ovvero se

$$Y^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + XY(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \cos \varphi - X^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \rightarrow \dots + XY(1 - 2\sin^2 \vartheta) \cos \varphi - \dots = 0 \rightarrow$$

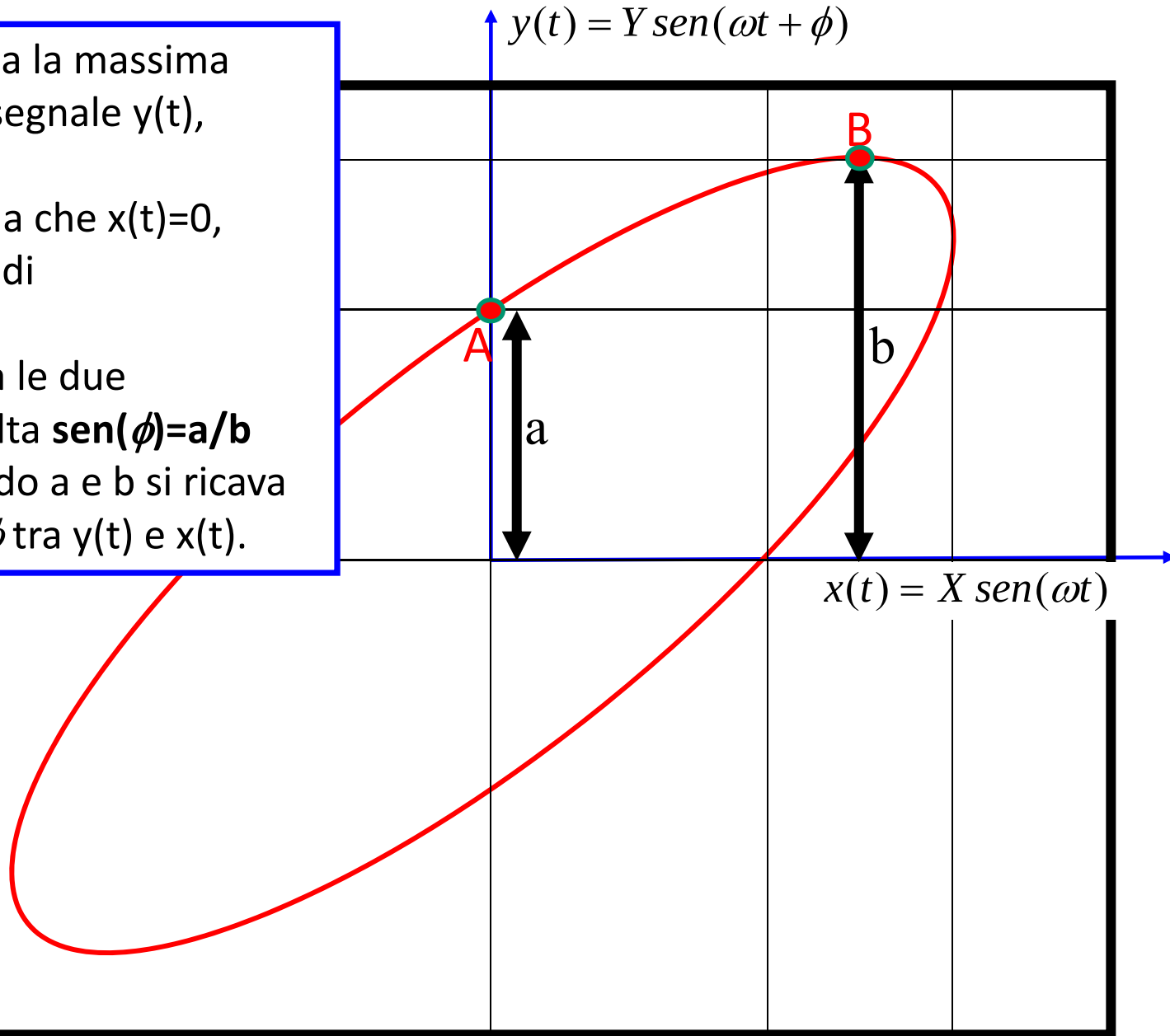
$$\rightarrow -X^2 + Y^2 + XY \left[\frac{1 - 2\sin^2 \vartheta}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \right] \cos \varphi = 0 \rightarrow -X^2 + Y^2 + XY \left[\frac{\cos 2\vartheta}{(\sin 2\vartheta)/2} \right] \cos \varphi = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -X^2 + Y^2 + 2XY \frac{\cos 2\vartheta}{\sin 2\vartheta} \cos \varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2XY}{X^2 - Y^2} \cos \varphi}$$

- CVD

Come si ricava lo sfasamento dall'ellisse ?

- Nel punto **B** si ha la massima escursione del segnale $y(t)$, quindi **$b=Y$**
- Nel punto **A** si ha che $x(t)=0$, quindi $t=0$, quindi **$a=y(0)=Y\sin(\phi)$** .
- Dal rapporto tra le due espressioni risulta **$\sin(\phi)=a/b$**
- Quindi misurando a e b si ricava lo sfasamento ϕ tra $y(t)$ e $x(t)$.



Funzione di trasferimento

- Dato un circuito con un ingresso ed una uscita (dispositivo a due porte), **lineare** (cioè formato da componenti lineari), la funzione di trasferimento è definita come il rapporto tra il segnale (di solito una tensione) in uscita ed il segnale in ingresso.



$$T = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

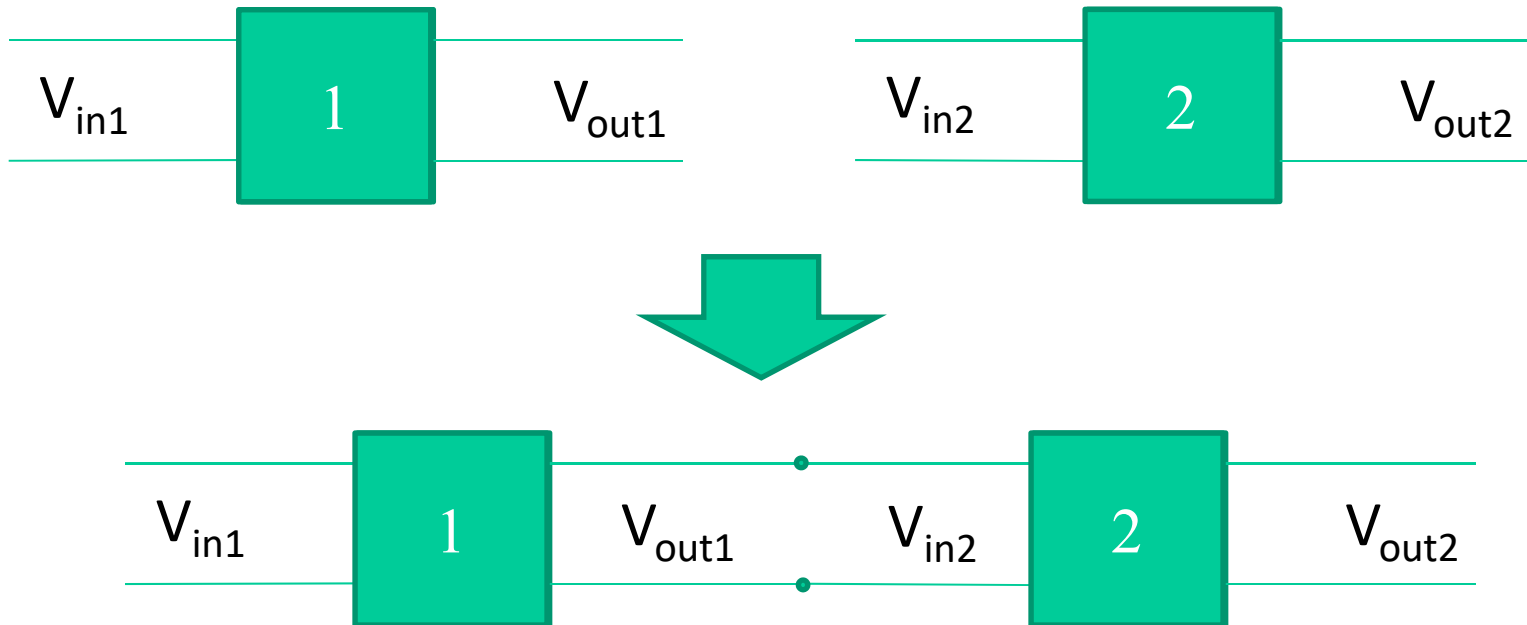
- In generale la funzione di trasferimento dipenderà dalla frequenza del segnale.
- Per esprimere gli effetti del circuito sia sull'ampiezza che sulla fase del segnale che viene trasferito all'uscita, la funzione di trasferimento è una funzione a valori complessi:

$$\vec{T}(\omega) = \frac{\vec{V}_{out}(\omega)}{\vec{V}_{in}(\omega)} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} |\vec{T}(\omega)| = \frac{|\vec{V}_{out}(\omega)|}{|\vec{V}_{in}(\omega)|} \\ \varphi(\omega) = \varphi_{out}(\omega) - \varphi_{in}(\omega) \end{cases}$$

- Qui V_{in} e V_{out} sono i fasori che descrivono segnale in ingresso e in uscita.
- Nella terza esperienza misurerete la funzione di trasferimento dei circuiti RC e CR.

Circuiti in cascata

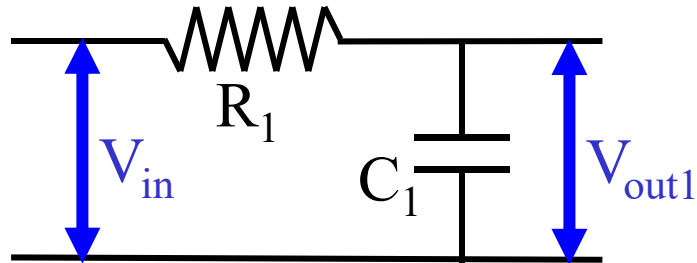
- Supponiamo di avere due circuiti a due porte e di collegarli in cascata, cioè di connettere l'uscita del primo all'ingresso del secondo:



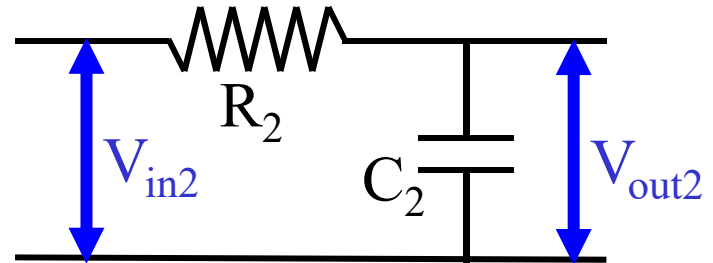
- Ci si chiede quale sia la funzione di trasferimento complessiva V_{out2}/V_{in1} .
- Faremo prima un esempio concreto, poi generalizzeremo.
- Consideriamo come esempio di dispositivi a due porte due filtri RC passa-basso.

Due RC in cascata

Consideriamo due filtri passa basso RC :

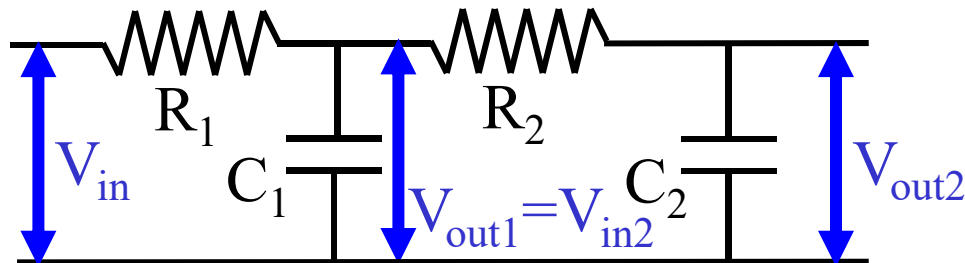


$$\frac{V_{out1}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1}$$



$$\frac{V_{out2}}{V_{in2}} = \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

Possiamo sperare di ottenere un filtro più ripido collegandoli in cascata:

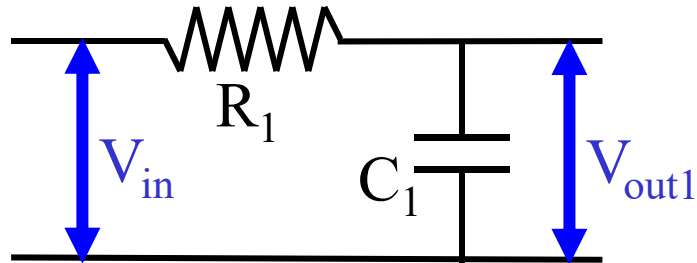


Siccome l'uscita del primo coincide con l'ingresso del secondo, viene voglia di scrivere:

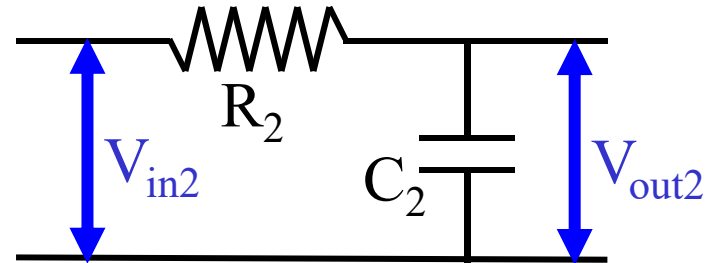
$$\frac{V_{out2}}{V_{in}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{V_{in2}}{V_{in}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{V_{out1}}{V_{in}} = \left[\frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2} \right] \left[\frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1} \right]$$

Due RC in cascata

Consideriamo due filtri passa basso RC :

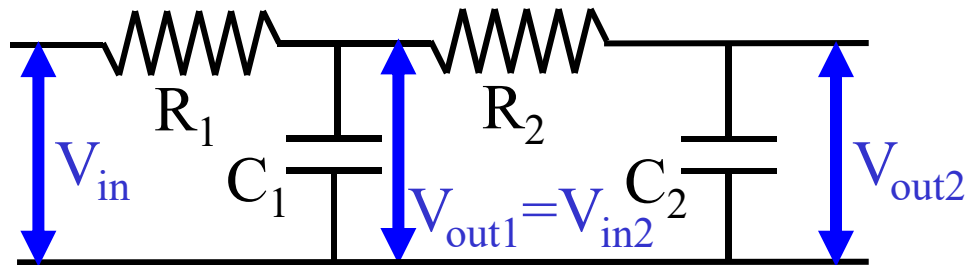


$$* \quad \frac{V_{out1}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1}$$



$$** \quad \frac{V_{out2}}{V_{in2}} = \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

Possiamo sperare di ottenere un filtro più ripido mettendoli in cascata:



Siccome l'uscita del primo coincide con l'ingresso del secondo, viene

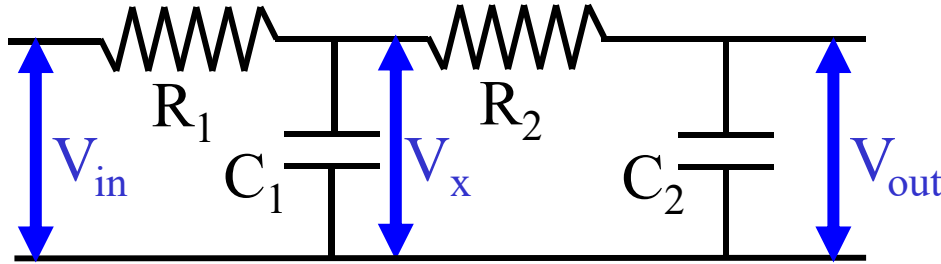
$$\frac{V_{out2}}{V_{in}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{V_{in2}}{V_{in}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{V_{out1}}{V_{in}} = \left[\frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2} \right] \left[\frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1} \right]$$

SBAGLIATO !

Le formule * e **
valgono solo se i due
circuiti sono isolati.

La presenza del
secondo circuito
modifica la risposta
del primo.
Vediamo come.

Due RC in cascata



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out}}{V_x} \frac{V_x}{V_{in}}$$

$$\frac{V_x}{V_{in}} = \frac{Z_{//}}{R_1 + Z_{//}} \quad \text{Dove il // è tra } C_1 \text{ e la serie di } R_2 \text{ e } C_2.$$

$$\frac{V_{out}}{V_x} = \frac{1/j\omega C_2}{R_2 + 1/j\omega C_2} = \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

$$Z_{//} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right)}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{\frac{j\omega R_2 C_2 + 1}{j\omega C_1 j\omega C_2}}{\frac{j\omega C_1 + j\omega C_2 - \omega^2 C_1 C_2 R_2}{j\omega C_1 j\omega C_2}} = \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{-\omega^2 C_1 C_2 R_2 + j\omega(C_1 + C_2)}$$

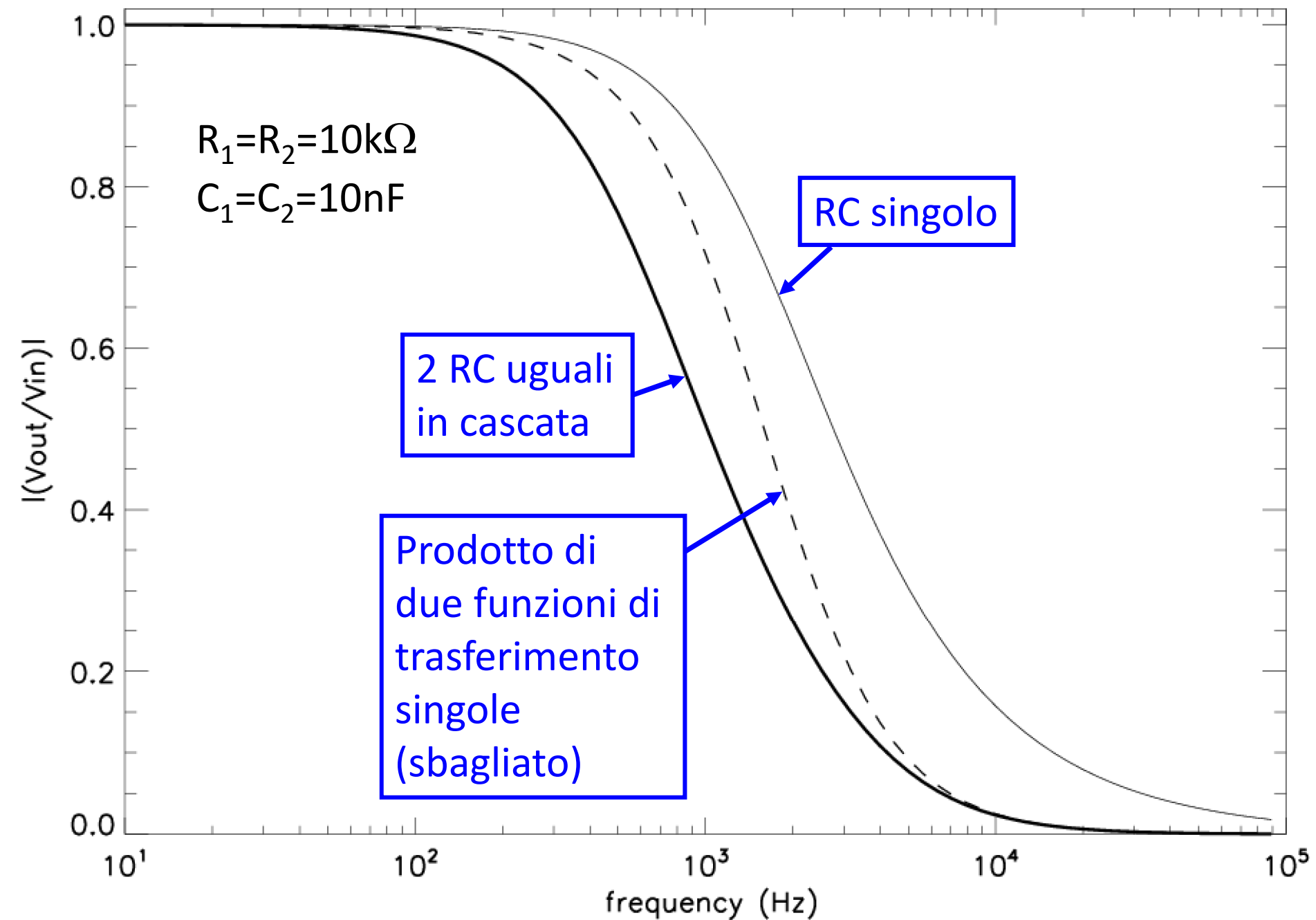
$$\frac{V_x}{V_{in}} = \frac{Z_{//}}{R_1 + Z_{//}} = \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{R_1 [-\omega^2 C_1 C_2 R_2 + j\omega(C_1 + C_2)] + 1 + j\omega R_2 C_2} = \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_2 R_1 + j\omega[R_2 C_2 + (C_1 + C_2)R_1]}$$

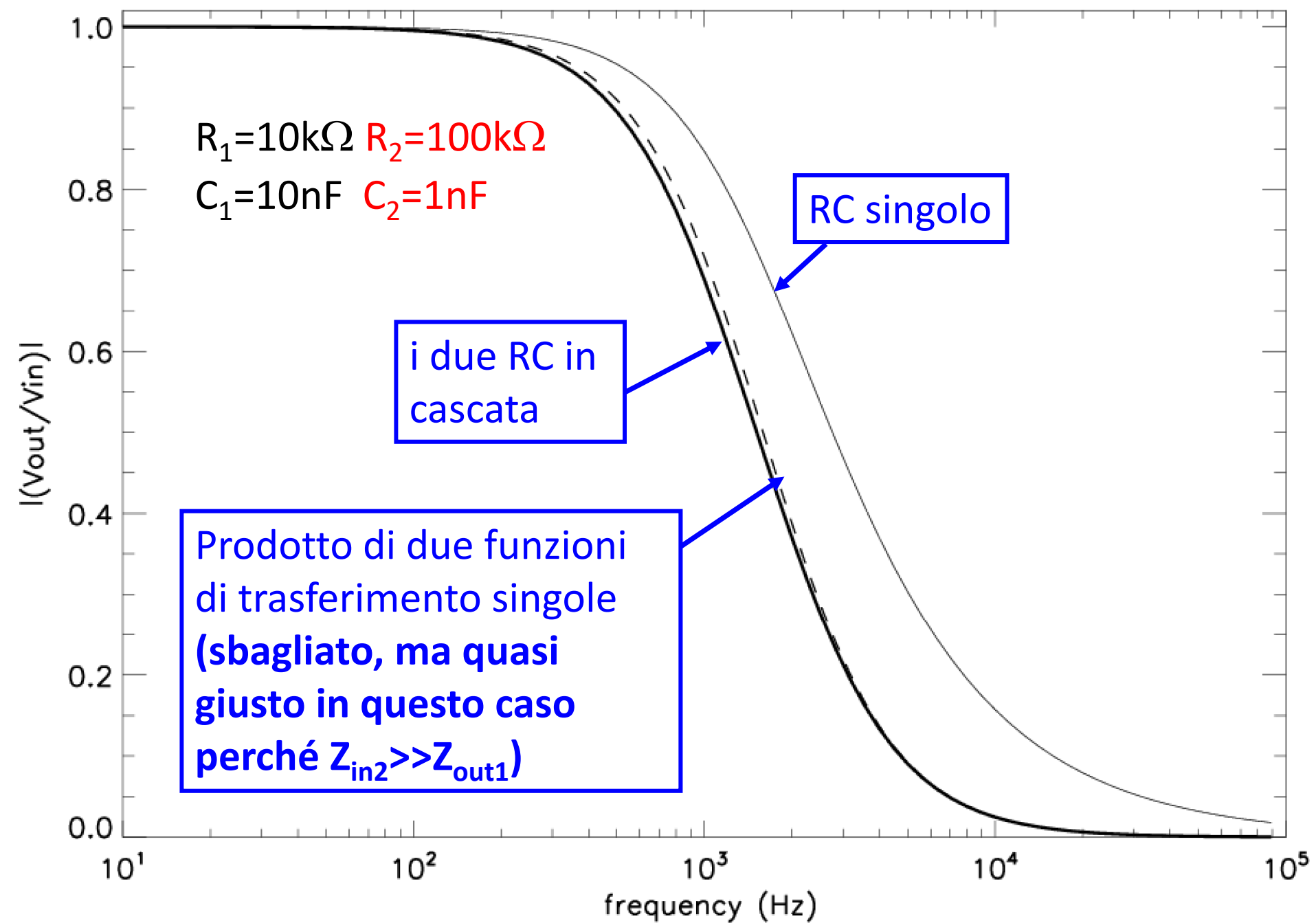
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_{out}}{V_x} \frac{V_x}{V_{in}} = \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_2} \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{1 - \omega^2 C_1 C_2 R_2 R_1 + j\omega[R_2 C_2 + (C_1 + C_2)R_1]}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{(1 - \omega^2 C_1 C_2 R_2 R_1) + j\omega[R_2 C_2 + (C_1 + C_2)R_1]} = \frac{1}{A(\omega) + j\omega B} = \frac{A(\omega) - j\omega B}{A^2(\omega) + \omega^2 B^2}$$

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{A^2(\omega) + \omega^2 B^2}}$$

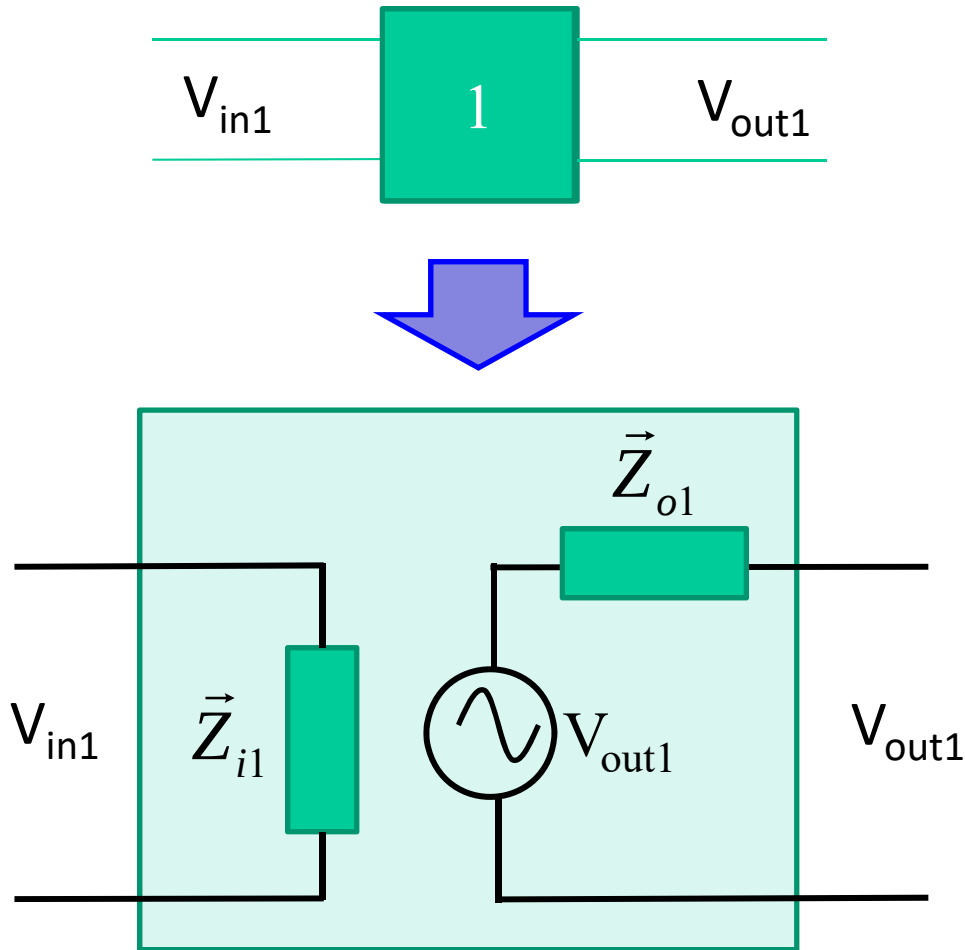
$$\tan \varphi = -\frac{\omega B}{A(\omega)}$$





Circuiti in cascata - generalizzazione

- Ciascun dispositivo a due porte sarà schematizzabile per i nostri scopi con una impedenza d'ingresso, un generatore ed una impedenza d'uscita.

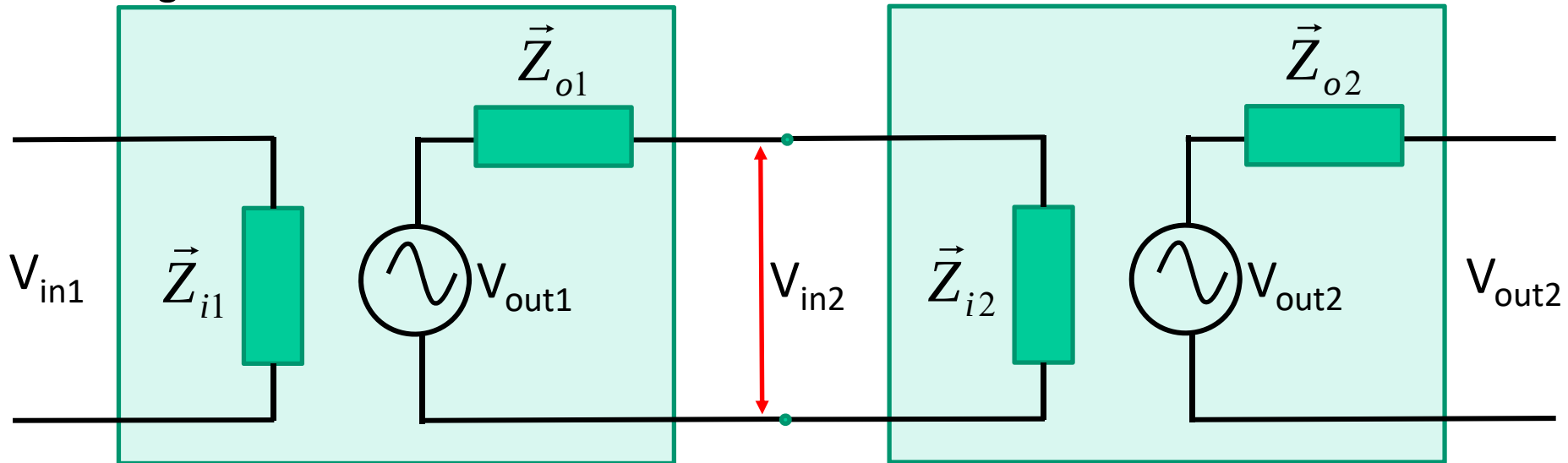


$$T_1 = \frac{V_{out1}}{V_{in1}}$$

- E' la funzione di trasferimento intrinseca del circuito 1, valida quando non c'è carico applicato all'uscita.

Circuiti in cascata - generalizzazione

- Quando si collegano due circuiti in cascata si ottiene la seguente configurazione:

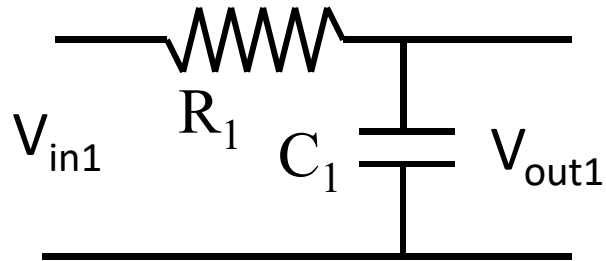
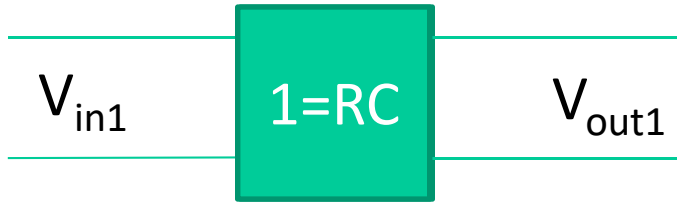


- Quindi la tensione che si otterrà all'uscita del primo – che è la stessa presente all'ingresso del secondo - si troverà dalla formula del partitore:

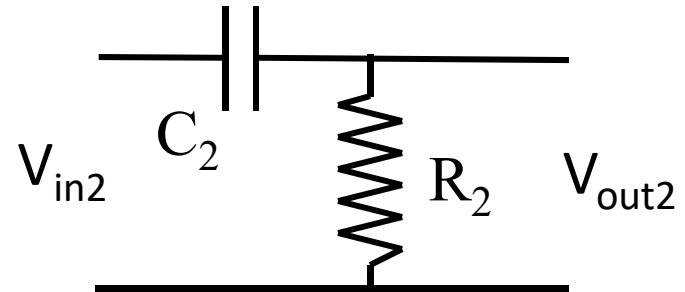
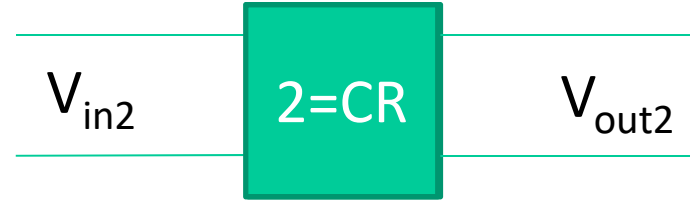
$$V_{in2} = \frac{\vec{Z}_{i2}}{\vec{Z}_{i2} + \vec{Z}_{o1}} V_{out1} \quad \rightarrow \quad T = \frac{V_{out2}}{V_{in1}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{V_{in2}}{V_{in1}} = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} \frac{\vec{Z}_{i2}}{\vec{Z}_{i2} + \vec{Z}_{o1}} \frac{V_{out1}}{V_{in1}} = T_2 \frac{\vec{Z}_{i2}}{\vec{Z}_{i2} + \vec{Z}_{o1}} T_1$$

- Appena i due circuiti vengono connessi insieme, la presenza del secondo circuito modifica il segnale in uscita dal primo, che era V_{out1} , **riducendolo**.
- Solo se $Z_{in2} \gg Z_{out1}$ l'inserimento del secondo circuito non modifica apprezzabilmente l'uscita del primo. Solo in tal caso la funzione di trasferimento complessiva è pari al prodotto delle singole f. di trasferimento.

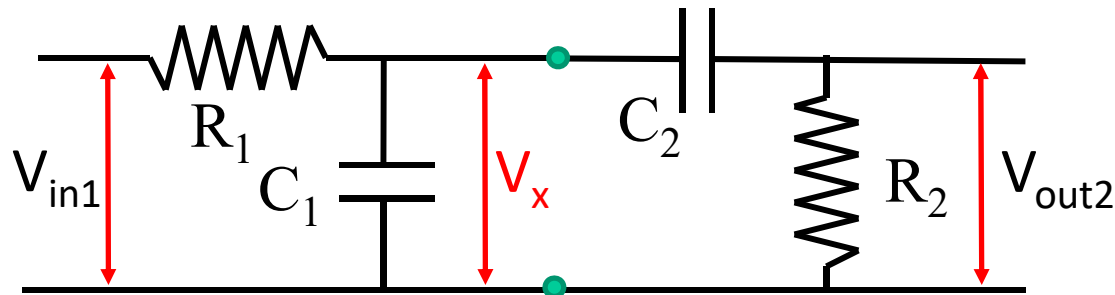
Circuiti in cascata: secondo esempio - RC seguito da CR



$$T_1 = \frac{V_{out1}}{V_{in1}} = \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

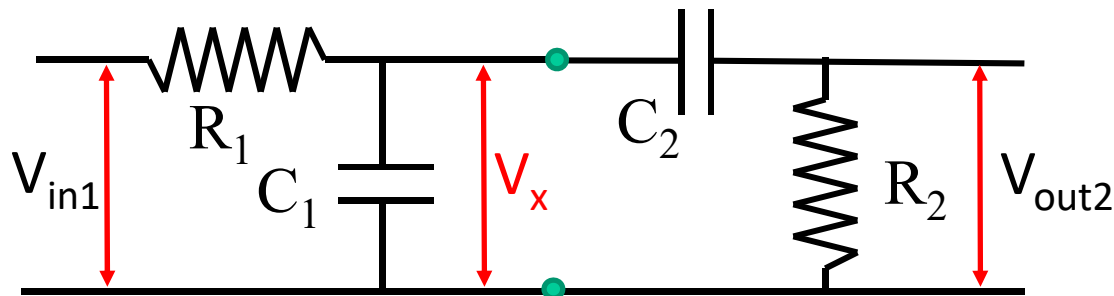


$$T_2 = \frac{V_{out2}}{V_{in2}} = \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 R_2}$$



$$T = \frac{V_{out2}}{V_{in1}} \neq T_1 T_2$$

Circuiti in cascata: secondo esempio - RC seguito da CR



$$V_x = \frac{Z_{//}}{R_1 + Z_{//}} V_{in1} = \frac{1}{1 + R_1 / Z_{//}} V_{in1} \quad \text{dove } Z_{//} \text{ è l'impedenza del parallelo tra } C_1 \text{ e la serie } C_2 R_2$$

ma per $Z_{//}$ vale la relazione $\frac{1}{Z_{//}} = j\omega C_1 + \frac{1}{R_2 + 1/j\omega C_2}$ e quindi sostituendo nell'eq. sopra

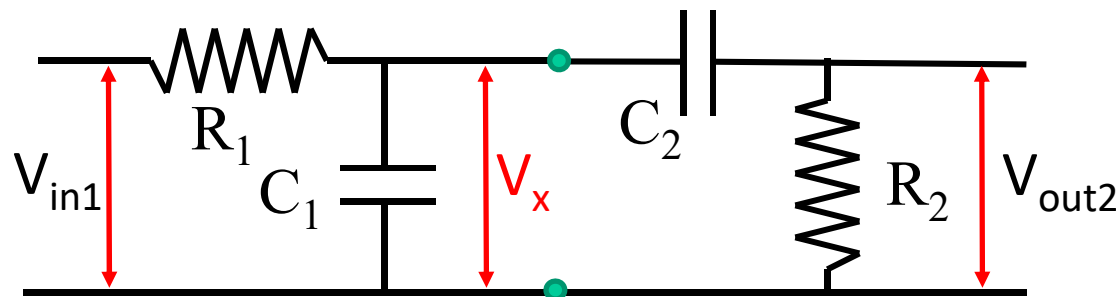
$$V_x = \frac{1}{1 + R_1 / Z_{//}} V_{in1} = \frac{V_{in1}}{1 + R_1 j\omega C_1 + \frac{R_1}{R_2 + 1/(j\omega C_2)}} = \frac{V_{in1}}{1 + R_1 j\omega C_1 + (j\omega C_2 R_1)/(1 + j\omega C_2 R_2)}$$

D'altra parte $V_{out2} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} V_x = \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} V_x$ e usando l'espressione sopra per V_x si ottiene

$$V_{out2} = \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} \cdot \frac{V_{in1}}{1 + R_1 j\omega C_1 + (j\omega C_2 R_1)/(1 + j\omega C_2 R_2)} = \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} \cdot \frac{\cancel{1 + j\omega C_2 R_2}}{(1 + j\omega C_1 R_1)(1 + j\omega C_2 R_2) + j\omega C_2 R_1} V_{in1}$$

$$T = \frac{V_{out2}}{V_{in1}} = \frac{j\omega C_2 R_2}{(1 + j\omega C_2 R_2)(1 + j\omega C_1 R_1) + j\omega C_2 R_1} = \frac{1}{[(1 + j\omega C_2 R_2)/j\omega C_2 R_2](1 + j\omega C_1 R_1) + R_1/R_2}$$

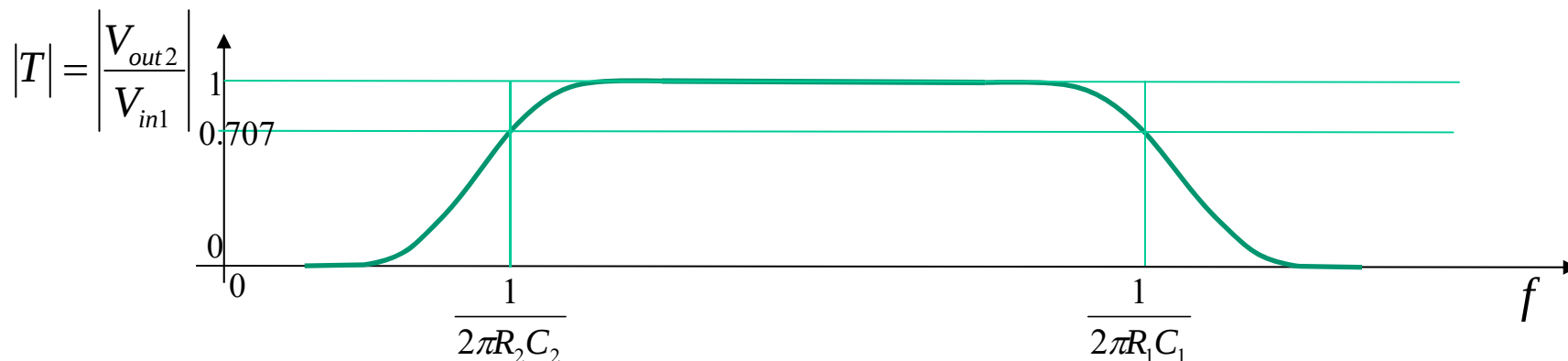
Circuiti in cascata: secondo esempio - RC seguito da CR



$$T = \frac{V_{out2}}{V_{in1}} = \frac{j\omega C_2 R_2}{(1 + j\omega C_2 R_2)(1 + j\omega C_1 R_1) + j\omega C_2 R_1} = \frac{1}{[(1 + j\omega C_2 R_2) / j\omega C_2 R_2](1 + j\omega C_1 R_1) + R_1 / R_2}$$

Se $R_2 \gg R_1$ (cioè l'impedenza di ingresso del secondo circuito è molto maggiore dell'impedenza di uscita del primo) si ha che la funzione di trasferimento complessiva si riduce al prodotto delle due singole:

$$T = \frac{V_{out2}}{V_{in1}} = \frac{1}{[(1 + j\omega C_2 R_2) / j\omega C_2 R_2](1 + j\omega C_1 R_1) + \cancel{R_1 / R_2}} \approx \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega C_1 R_1)} = T_2 T_1$$



Misure con il *picoscope*

- Ovvero: l' oscilloscopio digitale in azione
- Il picoscope è un oscilloscopio digitale completo di generatore di funzioni, che lavora in simbiosi con un PC (al quale sono demandate le funzioni di visualizzazione e impostazione delle misure)
- Permette di eseguire misure complesse in modo semplice.



Uscita del generatore di funzioni

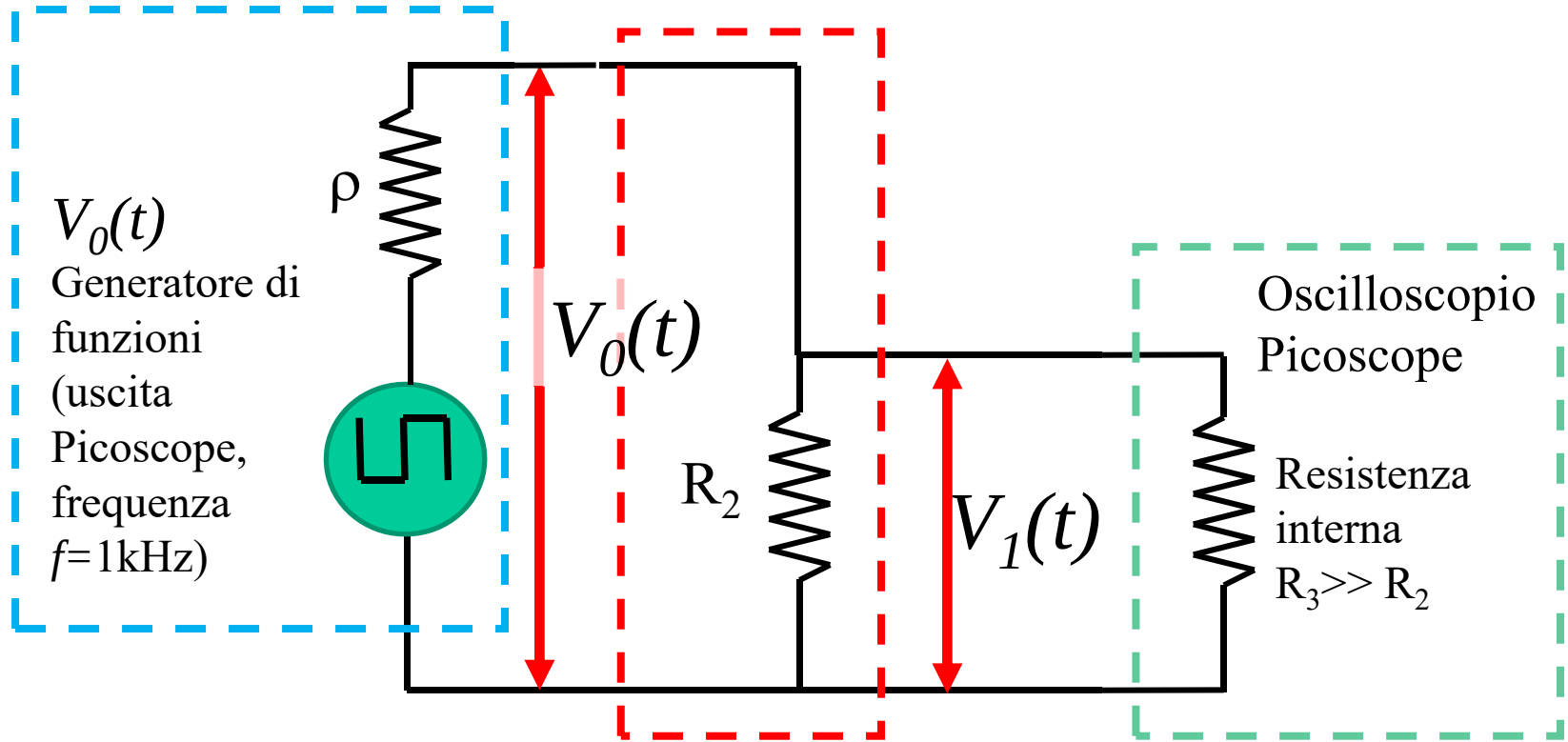
Ingresso per trigger esterno

Due ingressi analogici (8 bit, 1Gs/s)

Uso del Picoscope per verificare il comportamento di circuiti RC, con onde quadre e sinusoidali in ingresso

- 1) Misura resistenza interna del generatore integrato nel picoscope
- 2) Circuito RC con onda quadra in ingresso: misura costante di tempo dalla salita e dalla discesa dell'onda in uscita
- 3) Circuito RC come integratore
- 4) Circuito RC con onda sinusoidale in ingresso: misura frequenza di taglio del circuito

1) Misura della resistenza interna del generatore di funzioni del picoscopo



Si genera un segnale quadro $V_0(t)$ impostandone l'ampiezza a 1V e si legge il valore dell'ampiezza A_0 senza carico. Si inserisce poi una resistenza di carico R_2 e si misura $V_1(t)$ stimandone l'ampiezza A_1 . Dal rapporto tra A_0 e A_1 e dal valore di R_2 si ricava ρ con la formula del partitore.

Immagine schermo con segnale generatore (picoSCOPE) onda quadra $V_0(t)$ con ampiezza $A_0=1.00\text{ V}$, frequenza 1 KHz

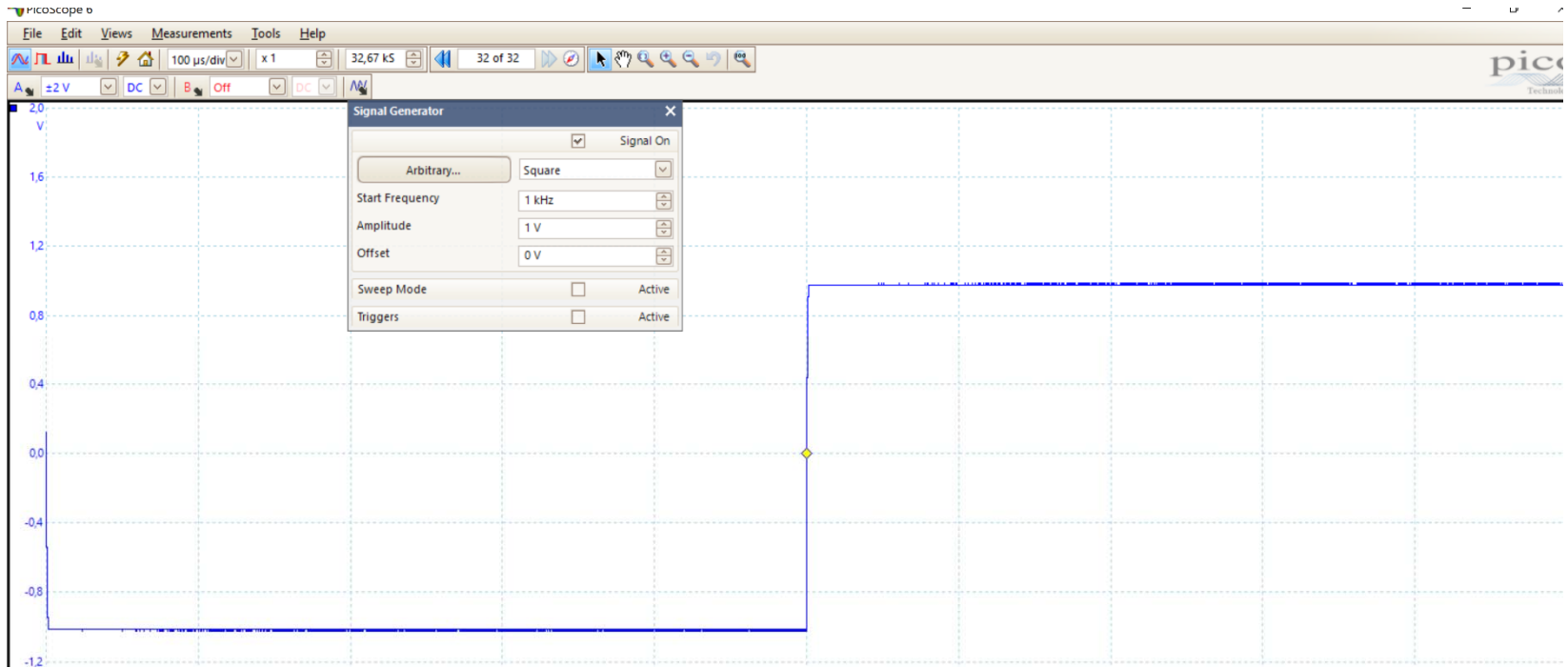
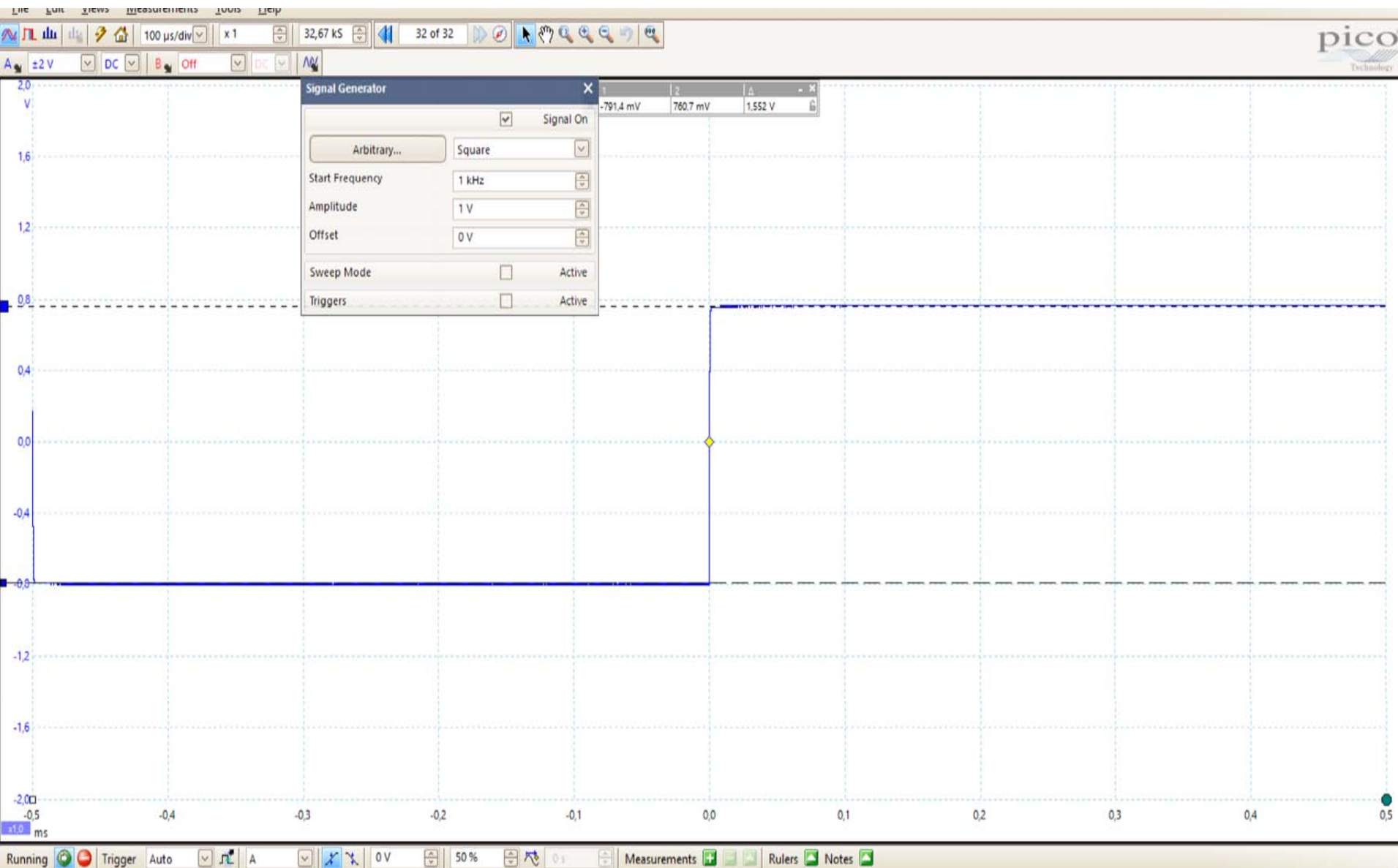


Immagine schermo con segnale ai capi di R_2 : onda quadra $V_1(t)$ con ampiezza $A_1 = (1.552 / 2)$ V , frequenza 1 kHz



Stima resistenza interna ρ dal confronto delle due misure (formula del partitore di tensione):

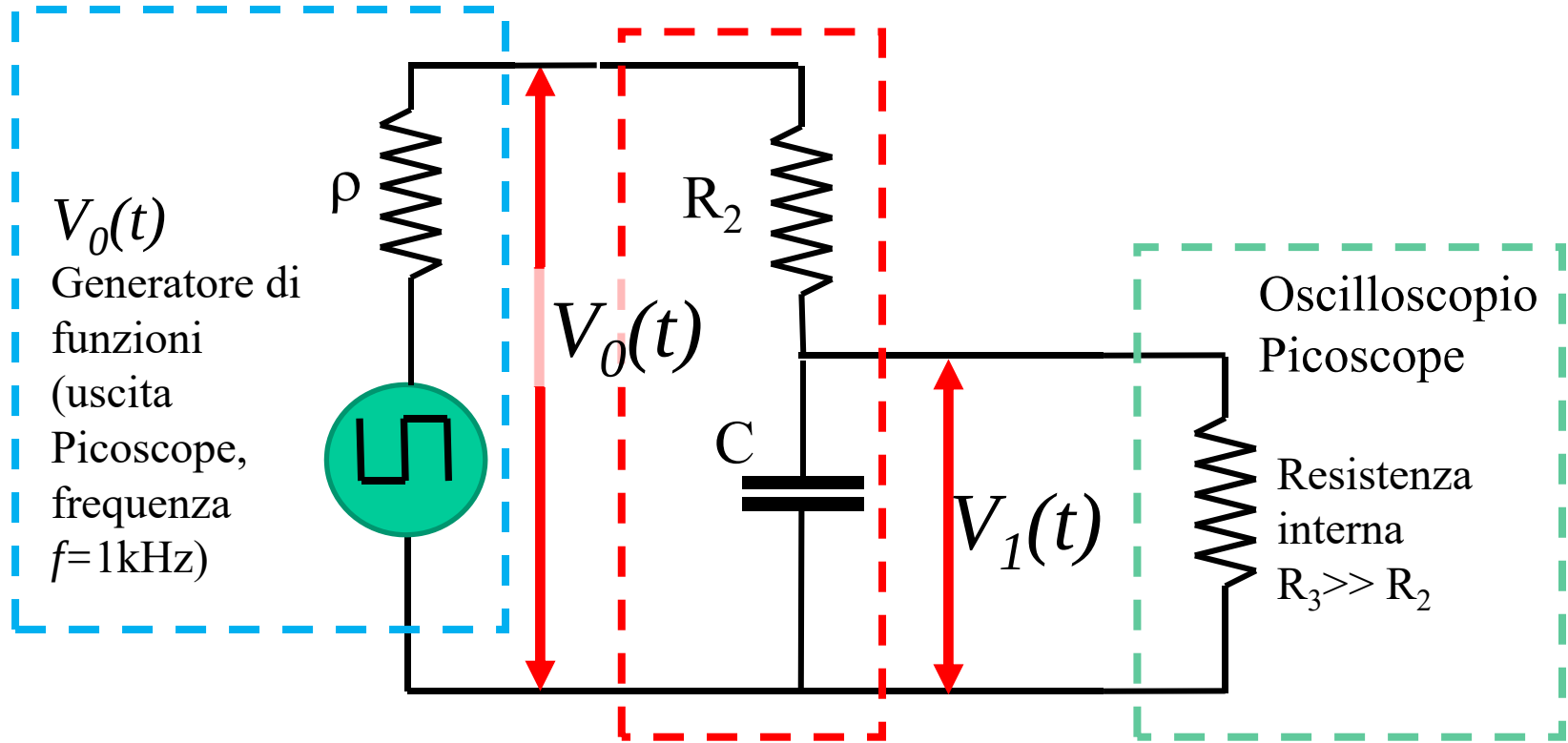
$$R_2 = 2.19 k\Omega$$

$$A_0 = 1.000 V$$

$$A_1 = 0.797 V$$

$$\rho = R_2 \left(\frac{A_0 - A_1}{A_1} \right) \approx 612 \Omega$$

2) RC eccitato con onda quadra



Si provano due circuiti che hanno nominalmente la stessa costante di tempo:

$R_2=2.2\text{k}\Omega$ e $C=150\text{nF}$ oppure $R_2=22\text{k}\Omega$ e $C=15\text{nF}$

Nei due casi

$$\rho = R_2 \left(\frac{A_0 - A_1}{A_1} \right) \approx 612 \, \Omega$$

- 1) $R_2 = 22 \text{ k}\Omega$ e $C = 15 \text{ nF}$

oppure:

- 2) $R_2 = 2.2 \text{ k}\Omega$ e $C = 150 \text{ nF}$

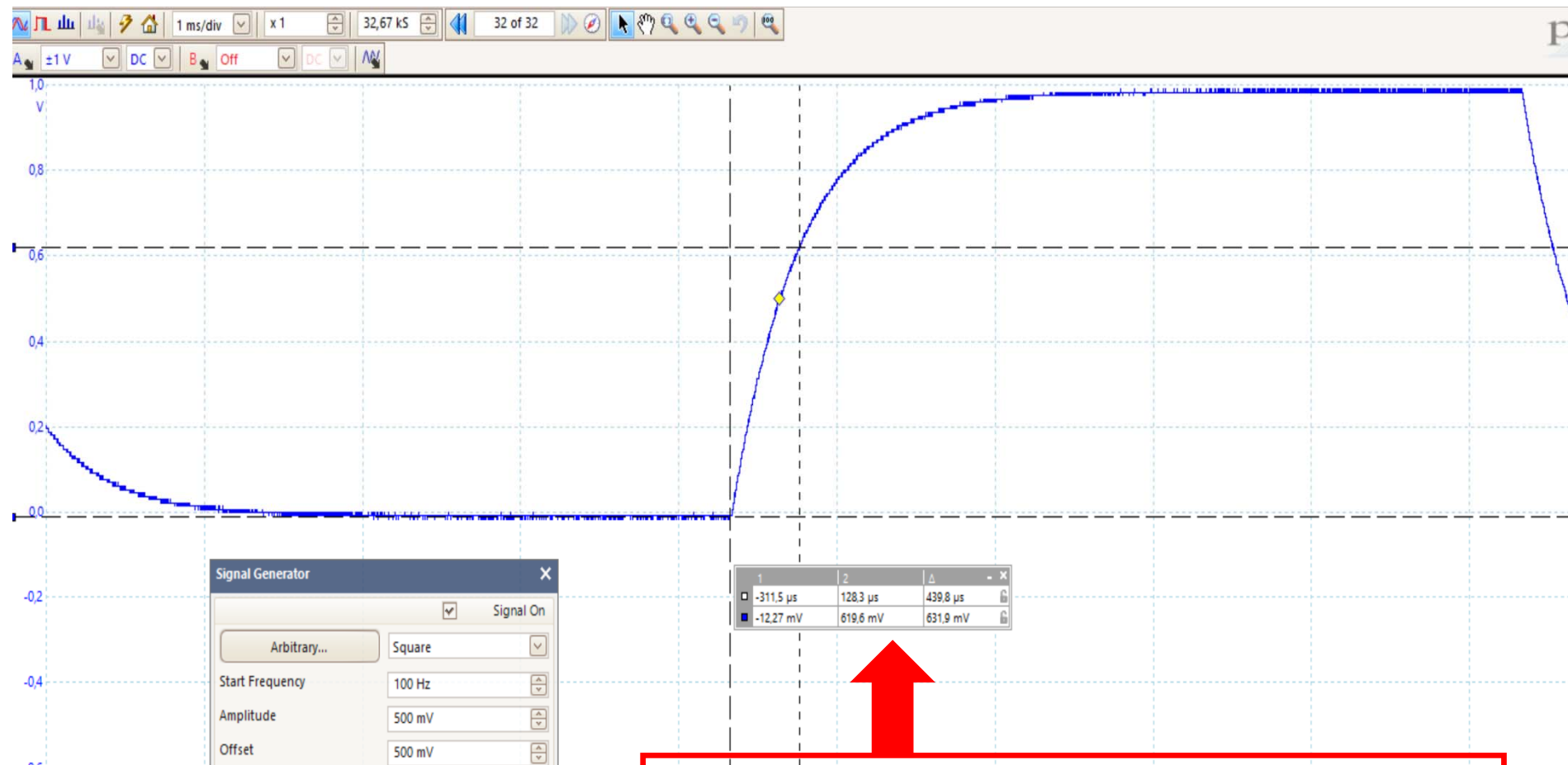
$$F_{\text{taglio}} = 1/(2\pi\tau) = 469 \text{ Hz (caso 1) o}$$

$$F_{\text{taglio}} = 1/(2\pi\tau) = 378 \text{ Hz (caso 2) o}$$

$$\tau_1 = (R + \rho)C = 339 \, \mu\text{s}$$

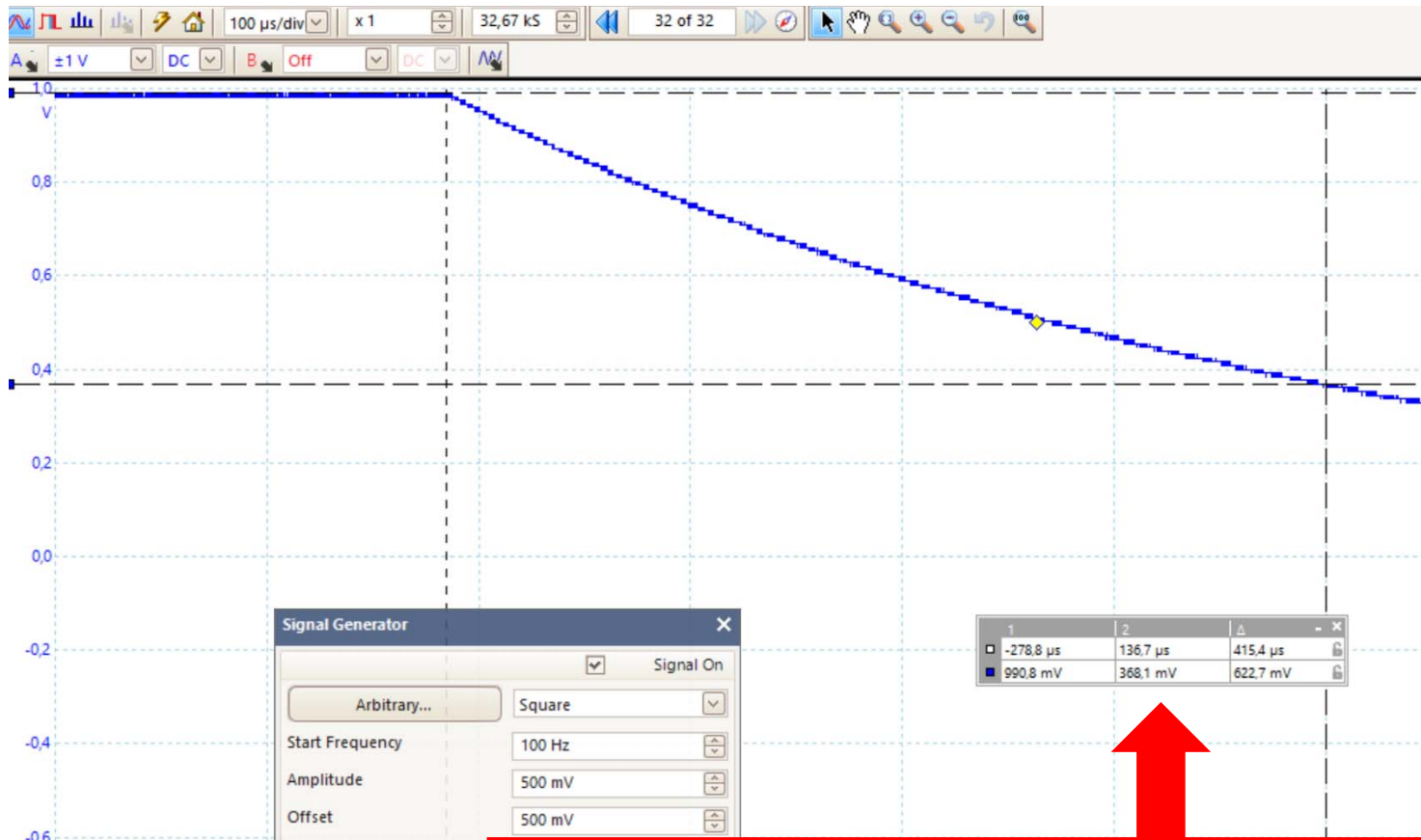
$$\tau_2 = (R + \rho)C = 422 \, \mu\text{s}$$

Costante di tempo per circuito RC ($C=150\text{ nF}$ $R=2.2\text{ K}\Omega$) da dati di salita



usando i cursori si cerca il momento in cui l'ampiezza diventa pari a $(1-e^{-1})$ del valore asintotico: si trova $\Delta t = \tau = 439\mu\text{s}$

Costante di tempo per circuito RC ($C=150\text{ nF}$ $R=2.2\text{K}\Omega$) da dati di discesa



usando i cursori si cerca il momento in cui l'ampiezza diventa pari a e^{-1} del valore di partenza: si trova $\Delta t = \tau = 415\mu\text{s}$

- Teoricamente la costante di tempo dovrebbe essere pari a $\tau = (\rho + R_2)C$
- Con i valori nominali dei componenti:

$$R_2 = 2.2k\Omega$$

$$\rho = 0.61k\Omega$$

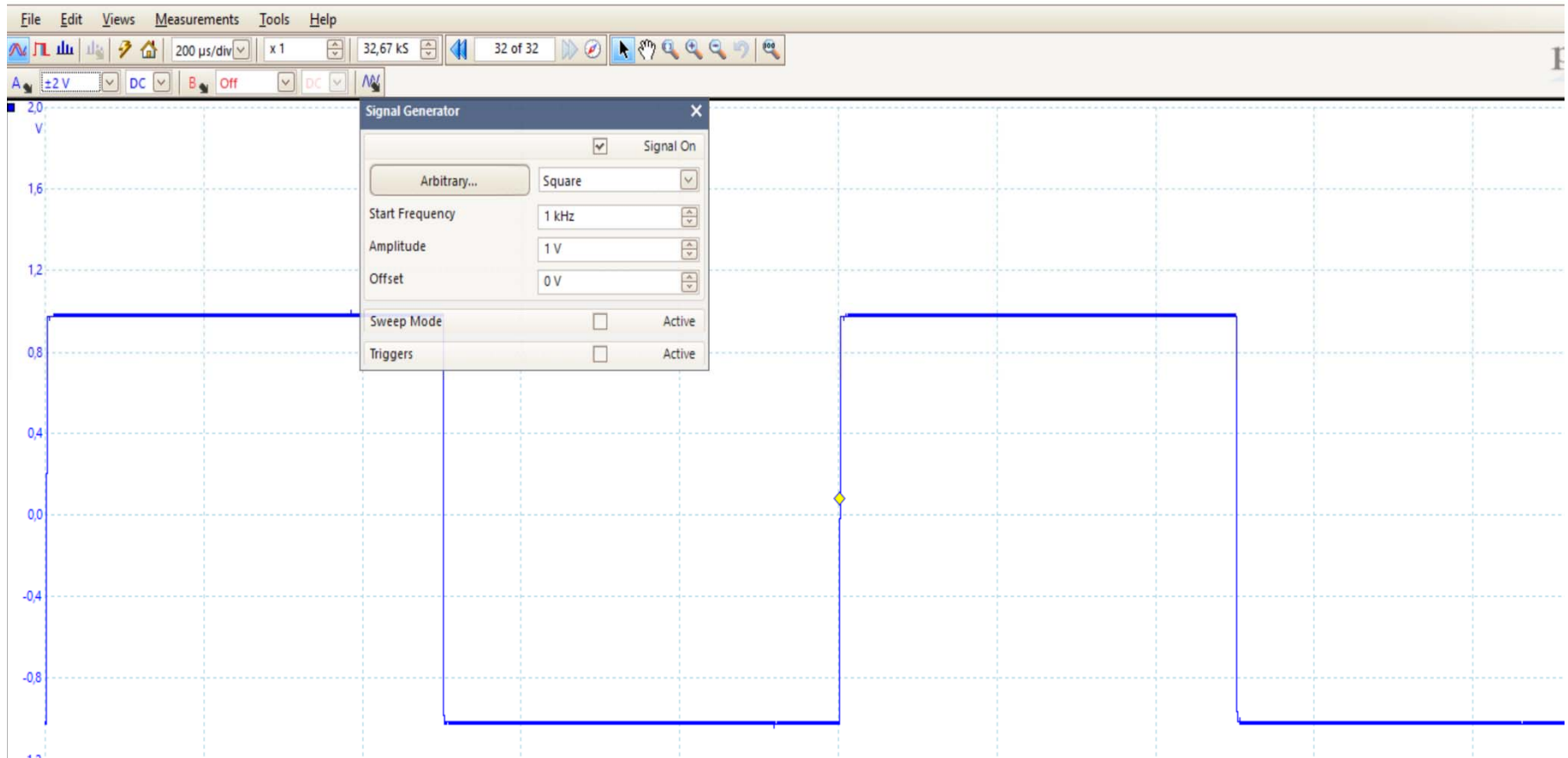
$$C = 150 \times 10^{-9} F$$

si dovrebbe avere:

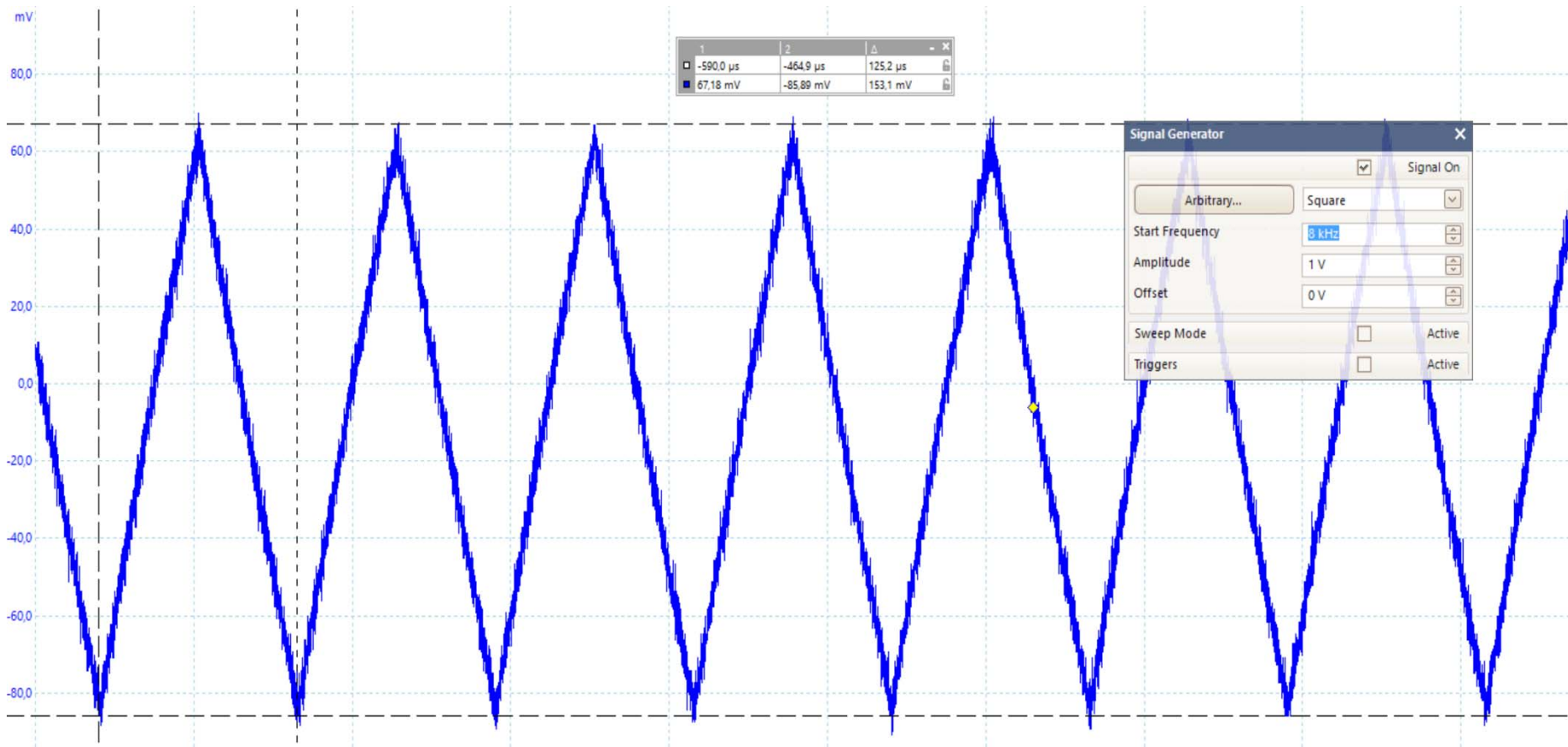
$$\tau = (\rho + R_2)C \approx 422 \mu s$$

- in buon accordo con quanto misurato.
- Quindi la frequenza di taglio di questo RC è pari a $f = \frac{1}{2\pi\tau} \approx 378 Hz$

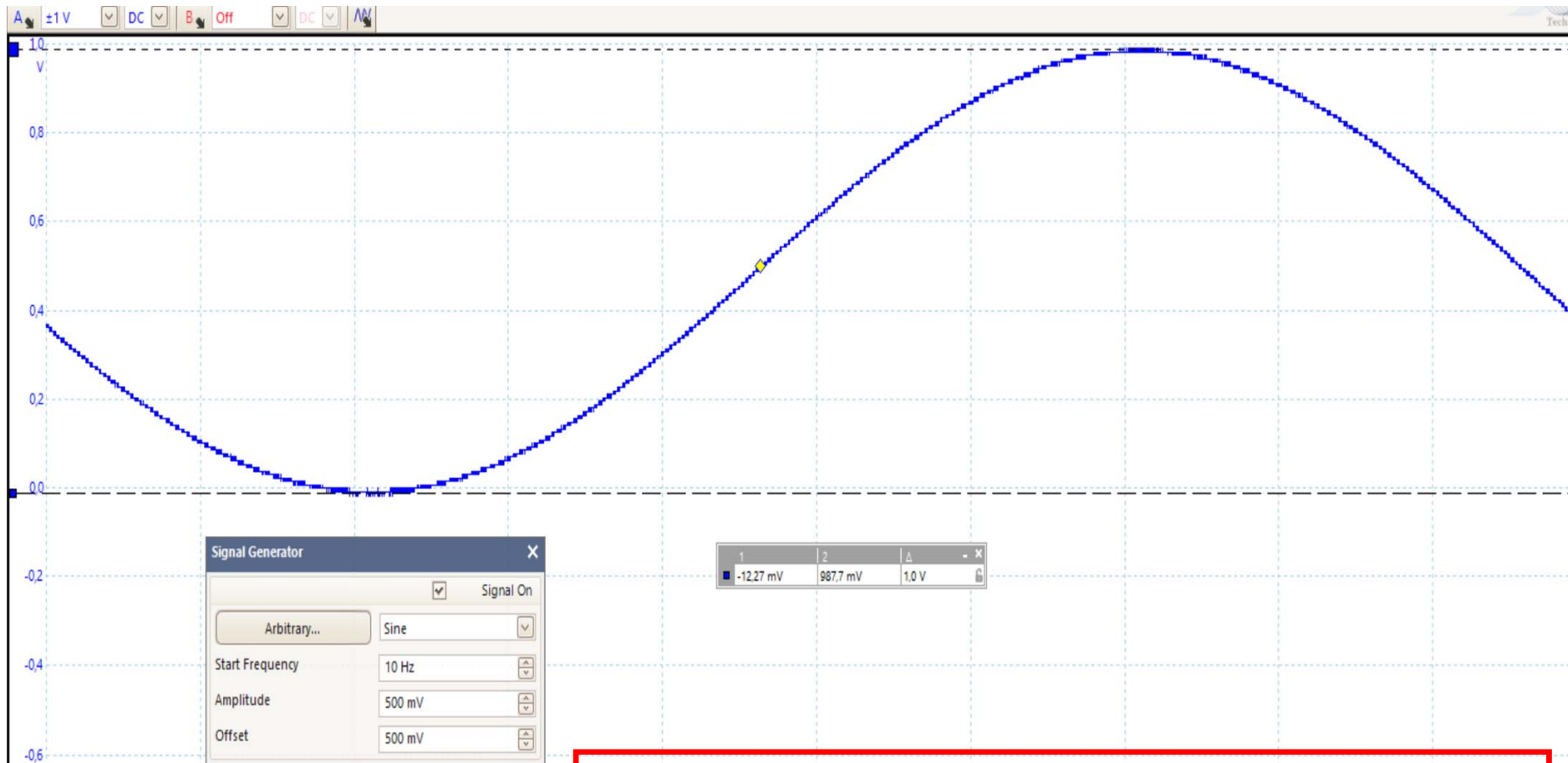
3) Circuito RC come integratore: onda quadra in ingresso



Circuito RC come integratore:
segnale in uscita a frequenza $f=8\text{KHz}$ ($\gg f_{\text{taglio}}$)

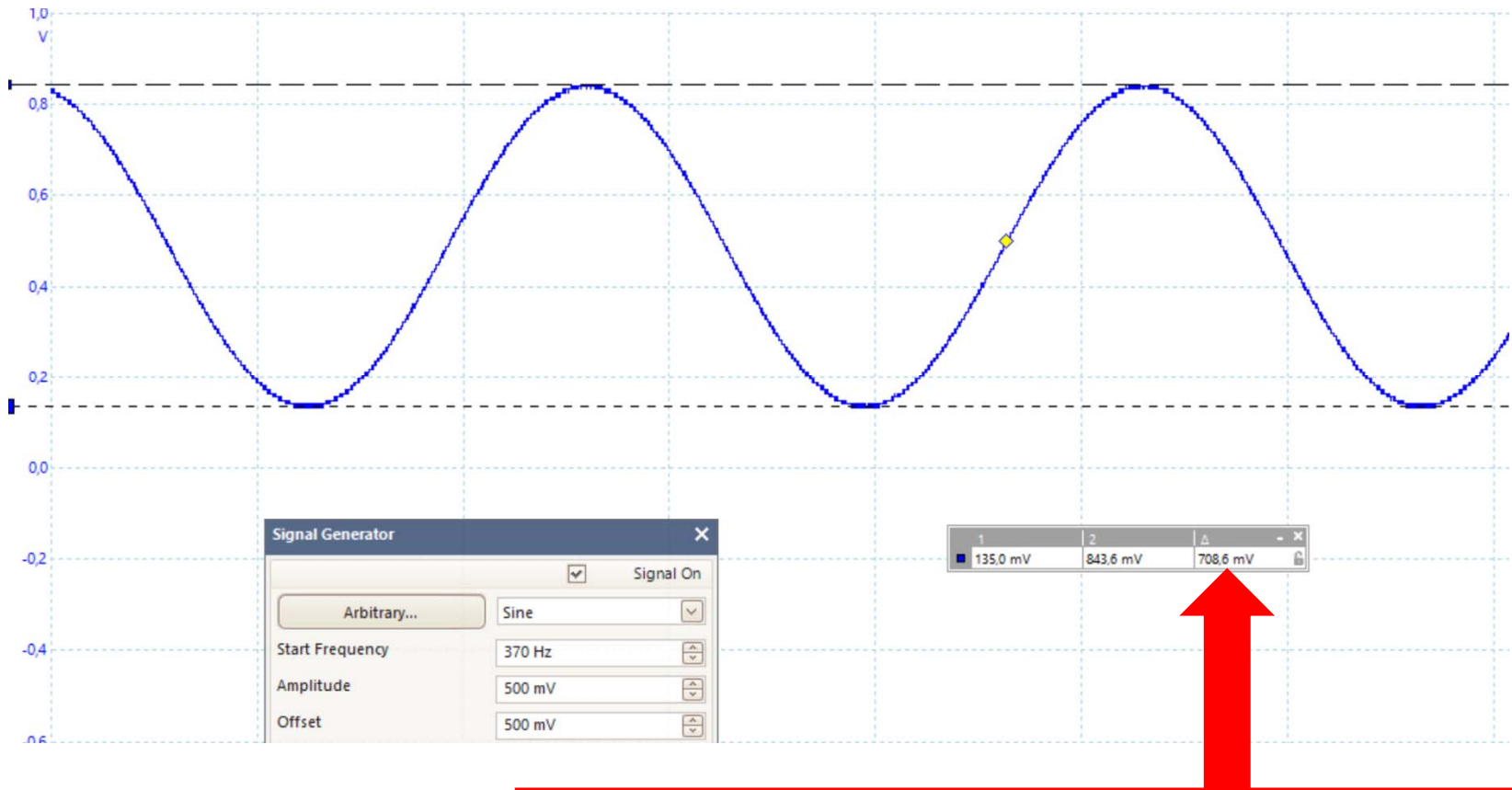


4) Risposta in frequenza circuito RC con segnale sinusoidale in ingresso.



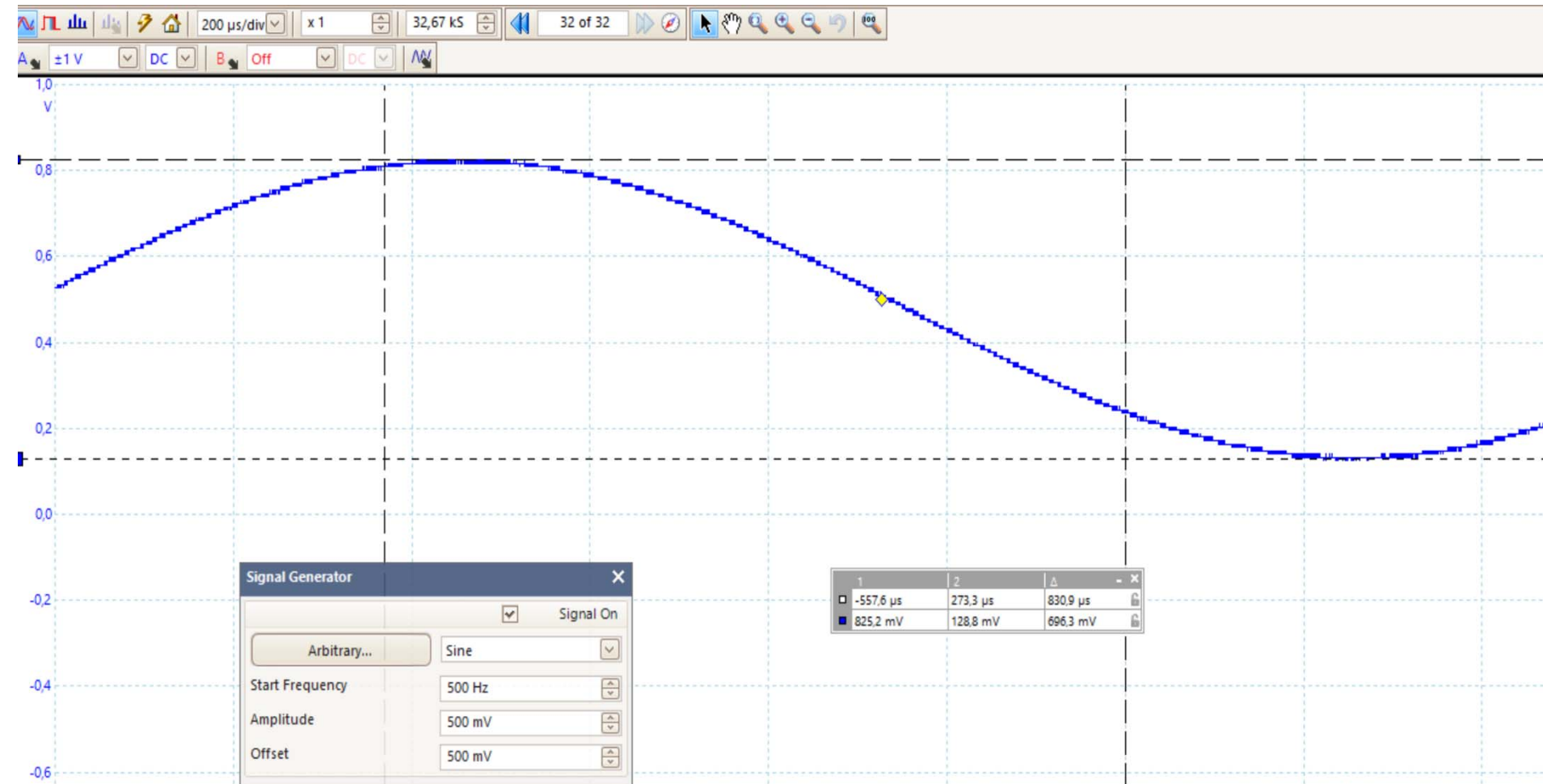
Si inizia con una frequenza (10Hz) $\ll$ di quella di taglio e si misura l'ampiezza.

Frequenza di taglio circuito RC, da confrontare con quella ricavata dalla costante di tempo misurata prima (circa 378 Hz)

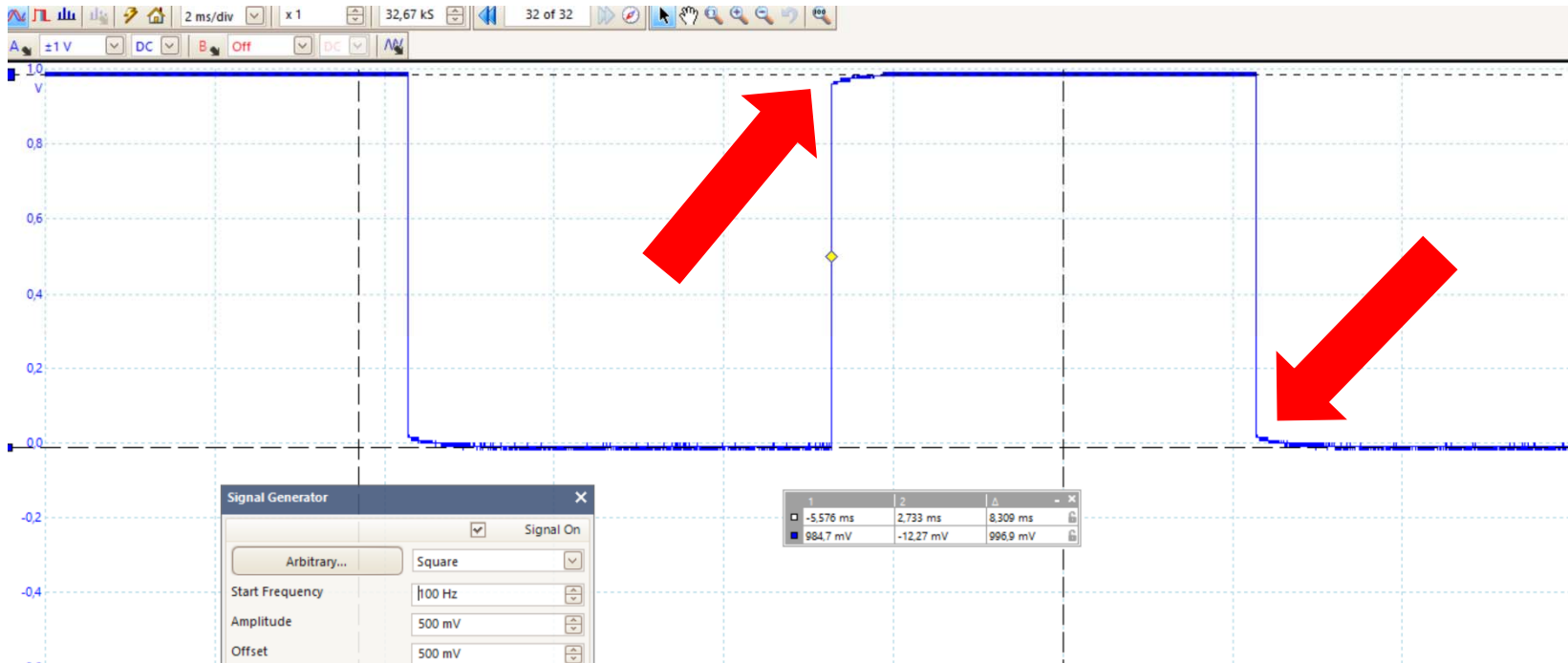


Si varia la frequenza finchè l'ampiezza non diventa $1/\sqrt{2}$ di quella a basse frequenze

Altro RC ($C=15\text{ nF}$, $R=22\text{ k}\Omega$)

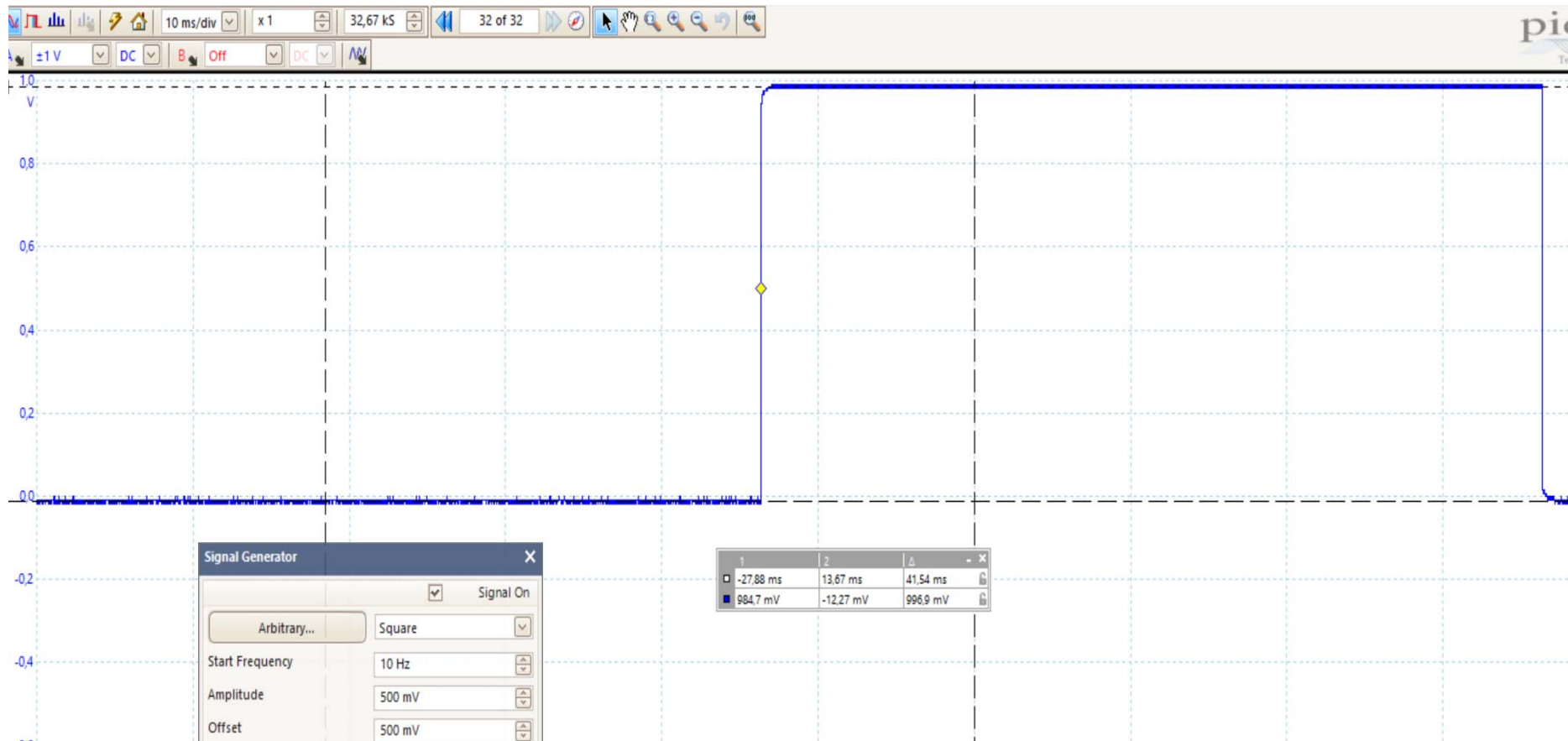


Dettagli dell' onda quadra in ingresso:

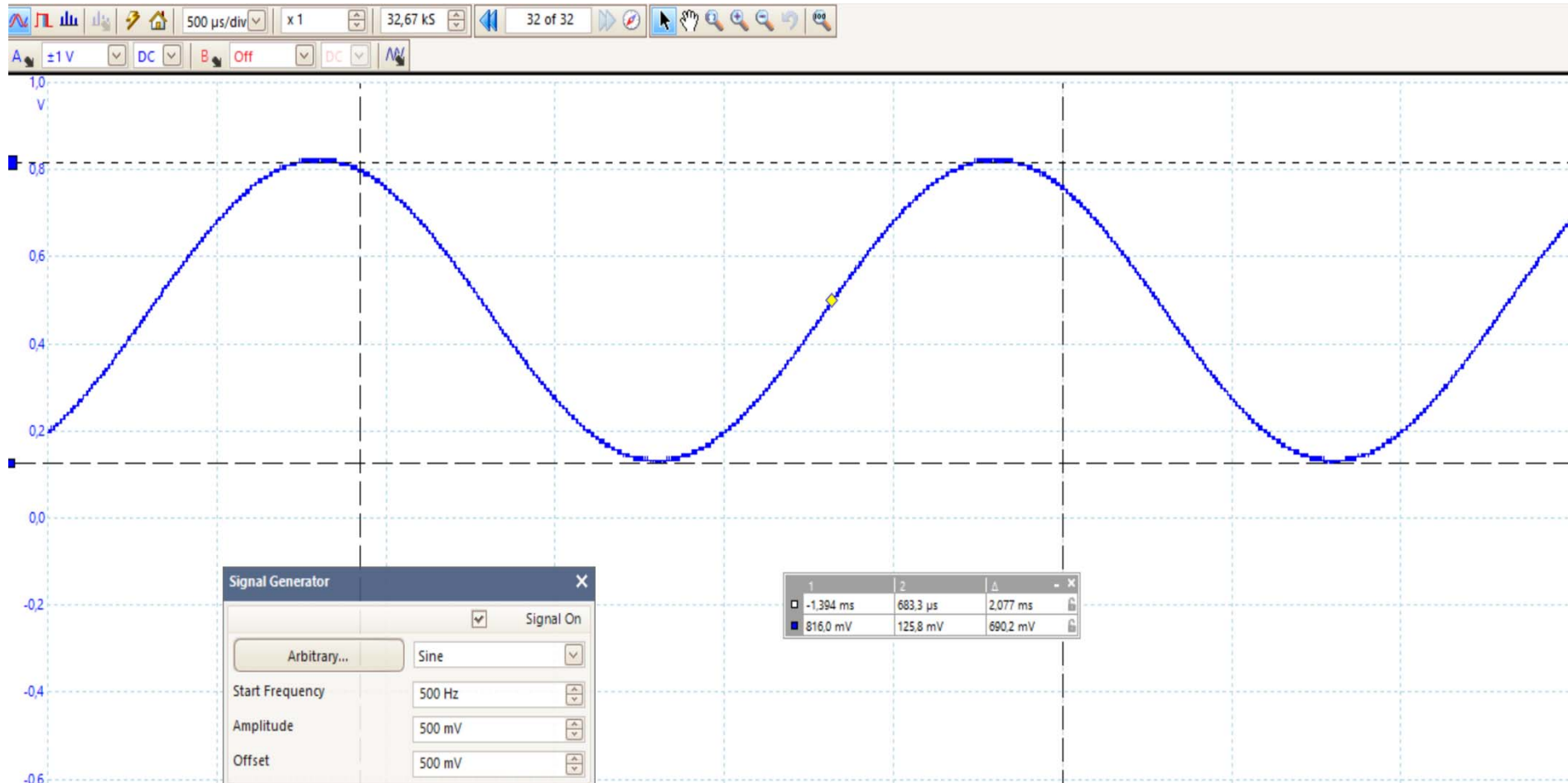


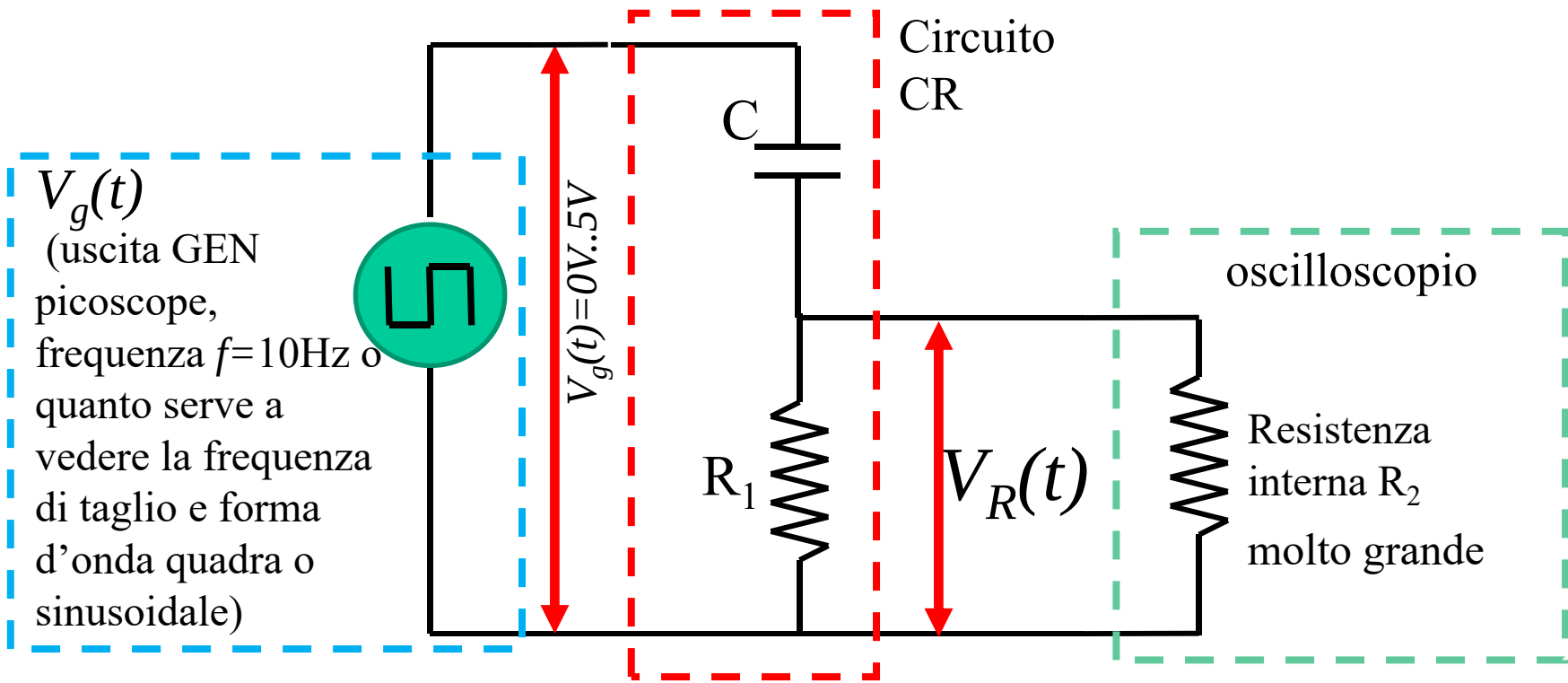
Quando il condensatore si carica (in un verso o nell'altro) il generatore, a causa della sua resistenza interna, fatica a mantenere l'ampiezza impostata per l'onda.

Stessa onda quadra in ingresso, a 10 Hz



RC ($C=15\text{ nF}$, $R=22\text{K}\Omega$), circa 470 Hz



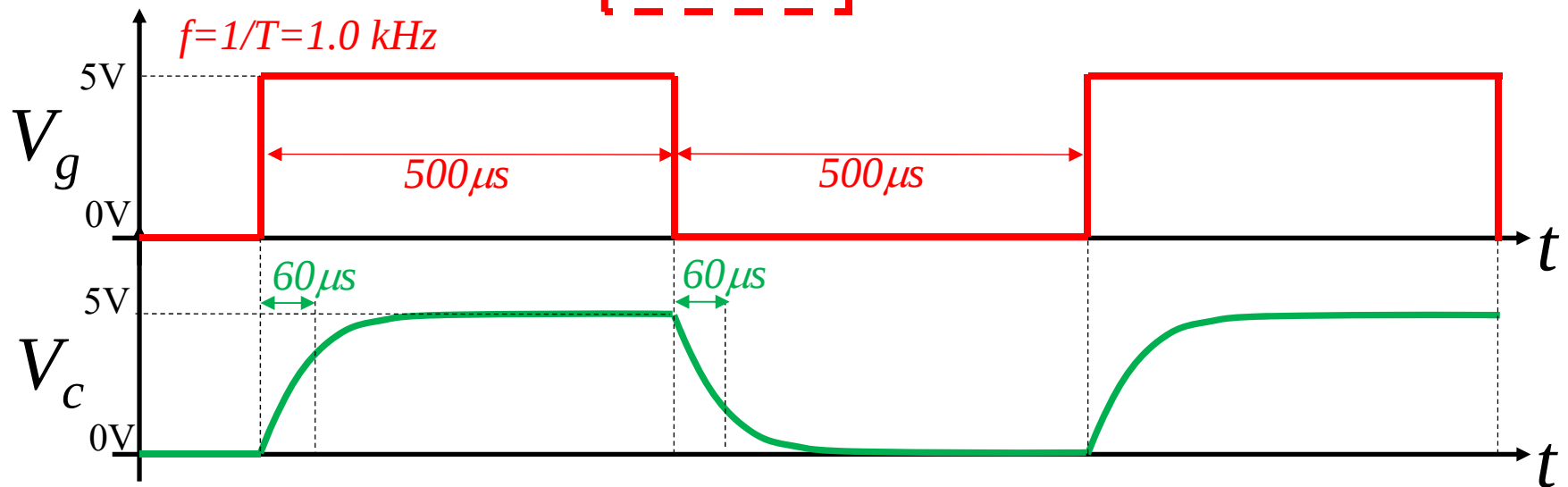
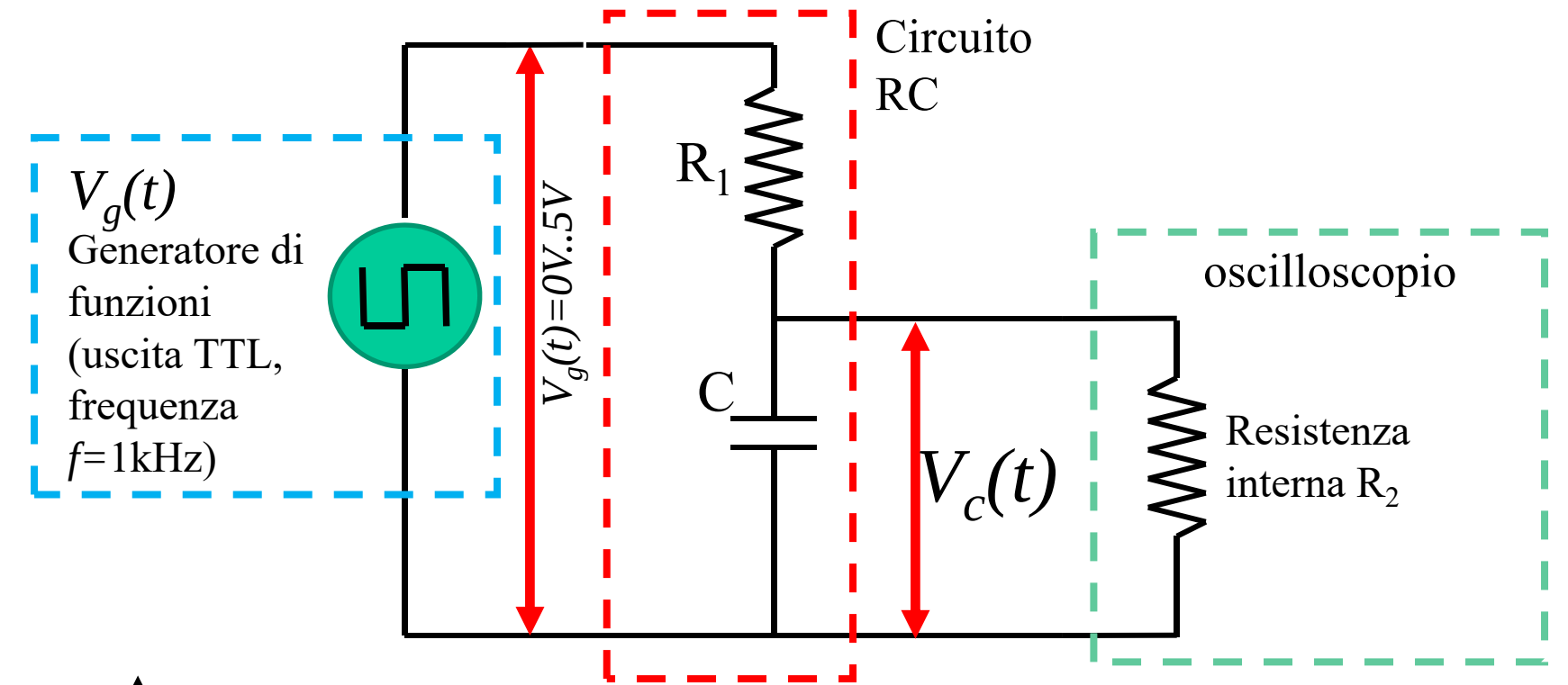


Nello stesso modo si studia il circuito passa alto (CR) invertendo la disposizione di R e C, e si visualizza la sua azione come derivatore a basse frequenze

Prima parte esercitazione 2 : carica e scarica del condensatore (circuito RC con breve costante di tempo)

- Sostituire R e C con valori inferiori ($2.7\text{k}\Omega$ e 22nF). La costante di tempo è molto diminuita ($RC=59\mu\text{s}$) e il processo è troppo veloce per usare voltmetro e cronometro.
- Però si può visualizzare lo stesso il processo di carica (e scarica) usando l'oscilloscopio.
- Invece che caricare e scaricare il condensatore collegandolo a mano all'alimentatore V_o , si usa un generatore di funzioni che può generare tensioni periodiche di diverse forme.
- L'uscita TTL genera una tensione periodica che si alterna tra 0V e 5V.
- Usando un periodo molto più lungo della costante di tempo, quando la tensione transisce da 0 a 5V inizia la carica del condensatore, che si completa prima che la tensione transisca nuovamente a 0V.
- Quando transisce da 5V a 0V parte la scarica. Anche questa si completa prima della successiva transizione del generatore da 0V a 5V.

Prima parte esercitazione 2 : carica e scarica del condensatore
(circuito RC con breve costante di tempo)



Generatore di funzioni

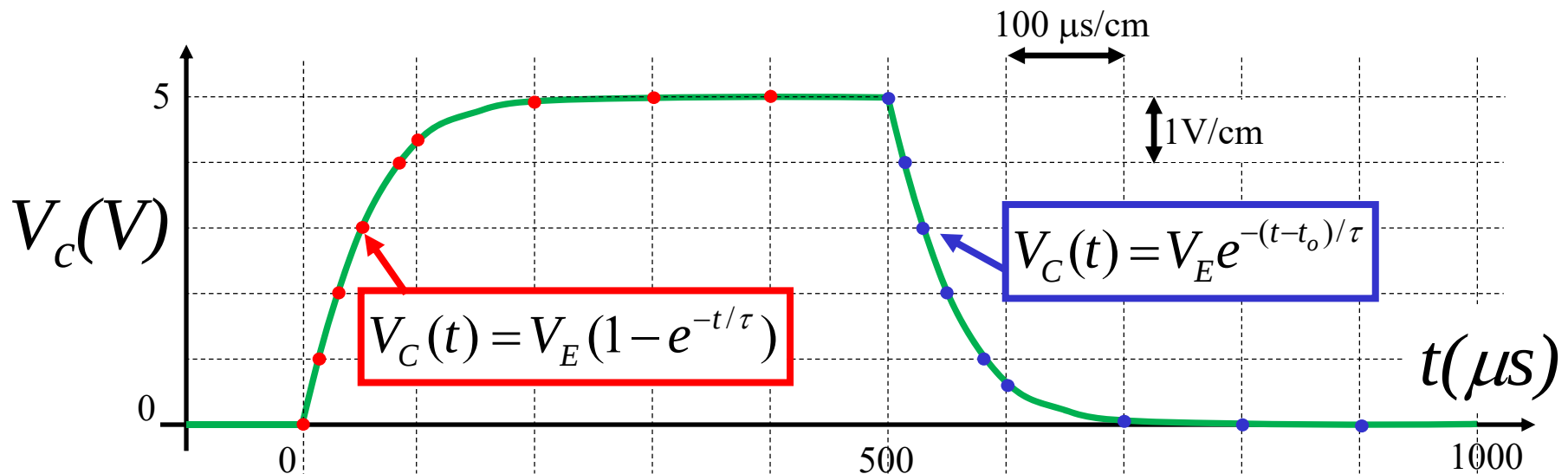


Regolazione frequenza

Uscita TTL del generatore di funzioni

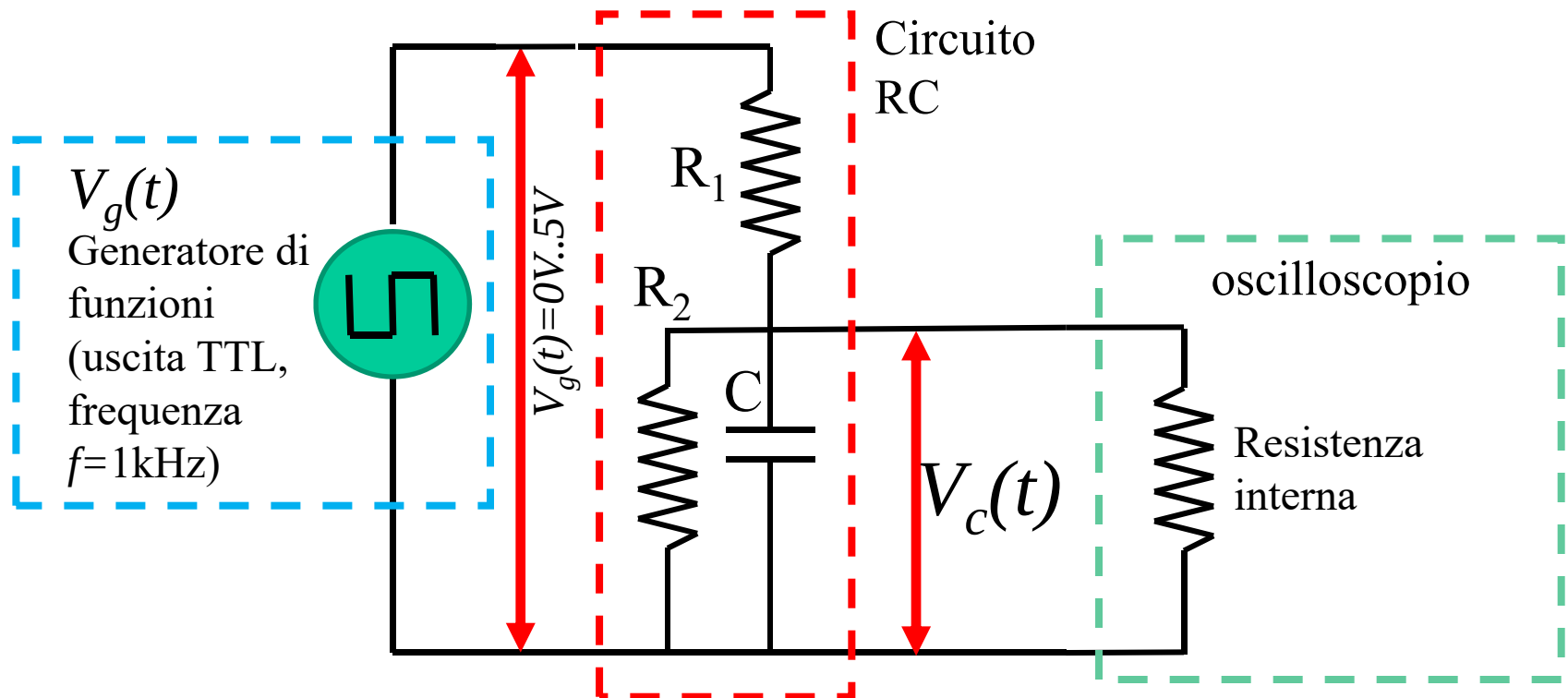
Prima parte esercitazione 2 : (circuito RC con breve costante di tempo)

- Scegliendo un periodo dell'onda quadra di 1 ms (frequenza 1 kHz) si ha abbastanza tempo nella fase alta e nella fase bassa della tensione del generatore per consentire la carica e scarica praticamente complete del condensatore.
- Sullo schermo si possono quindi campionare i valori della tensione al passare del tempo, e ricostruire lo stesso grafico fatto nella prima parte dell'esperienza, dal quale si misurerà nello stesso modo la nuova costante di tempo.
- Si possono usare anche i dati della scarica, con la formula relativa, e la costante di tempo deve venire la stessa entro gli errori.
- La resistenza interna dell'oscilloscopio è molto elevata ($1\text{M}\Omega$) e quindi non è facilmente misurabile in questo caso.

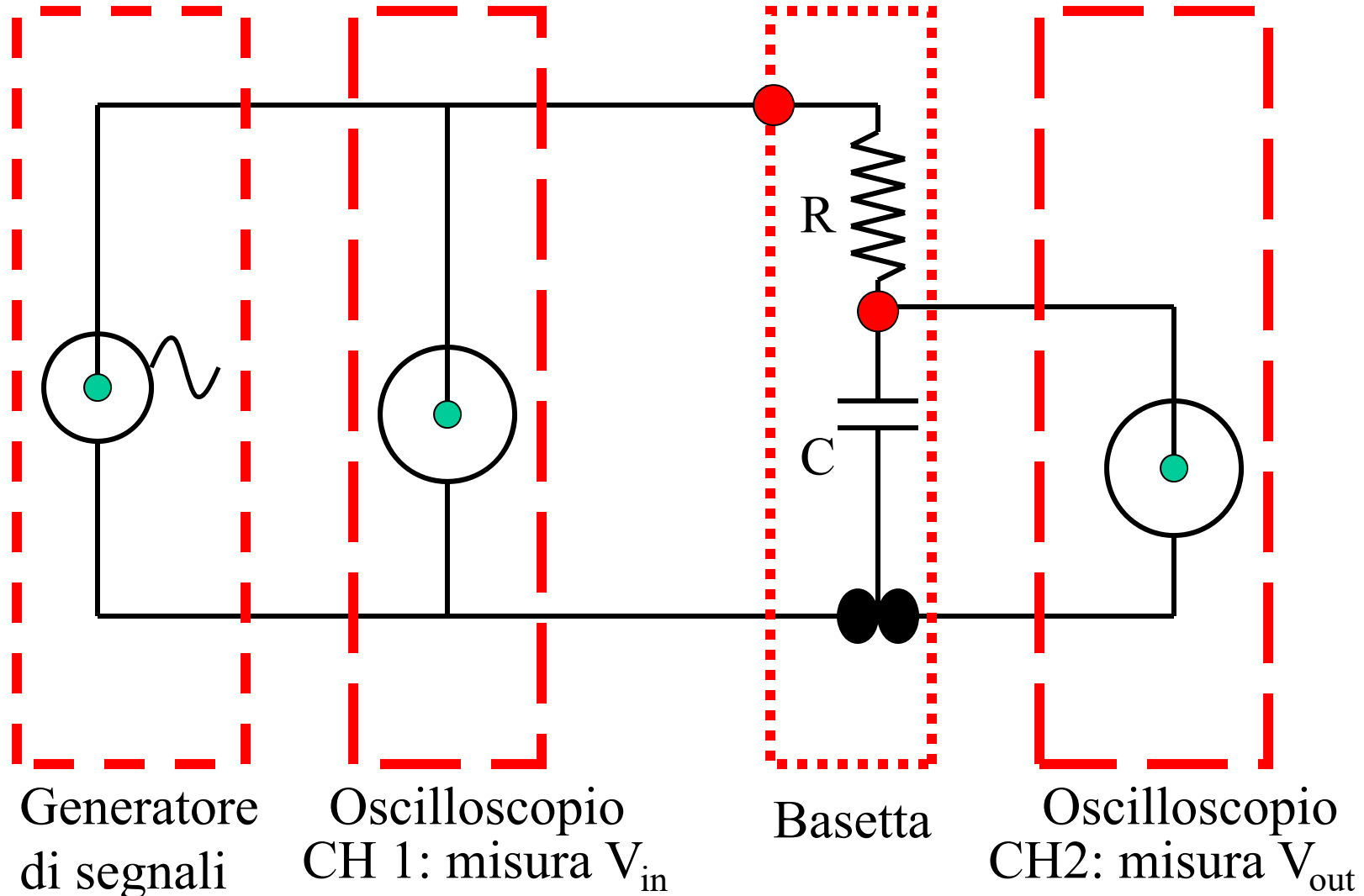


Seconda parte esercitazione 2 : (circuito RC con breve costante di tempo con partitore)

- Si aggiunge un resistore in parallelo al condensatore (ad es. da $2.7\text{k}\Omega$).
- Si ripetono le misure di tensione ai capi del condensatore in funzione del tempo. Che differenze ci sono rispetto al caso precedente ?
- Quale è il valore asintotico per la tensione di carica del condensatore?
- Come cambia la costante di tempo? Perché? (vedi lezioni)



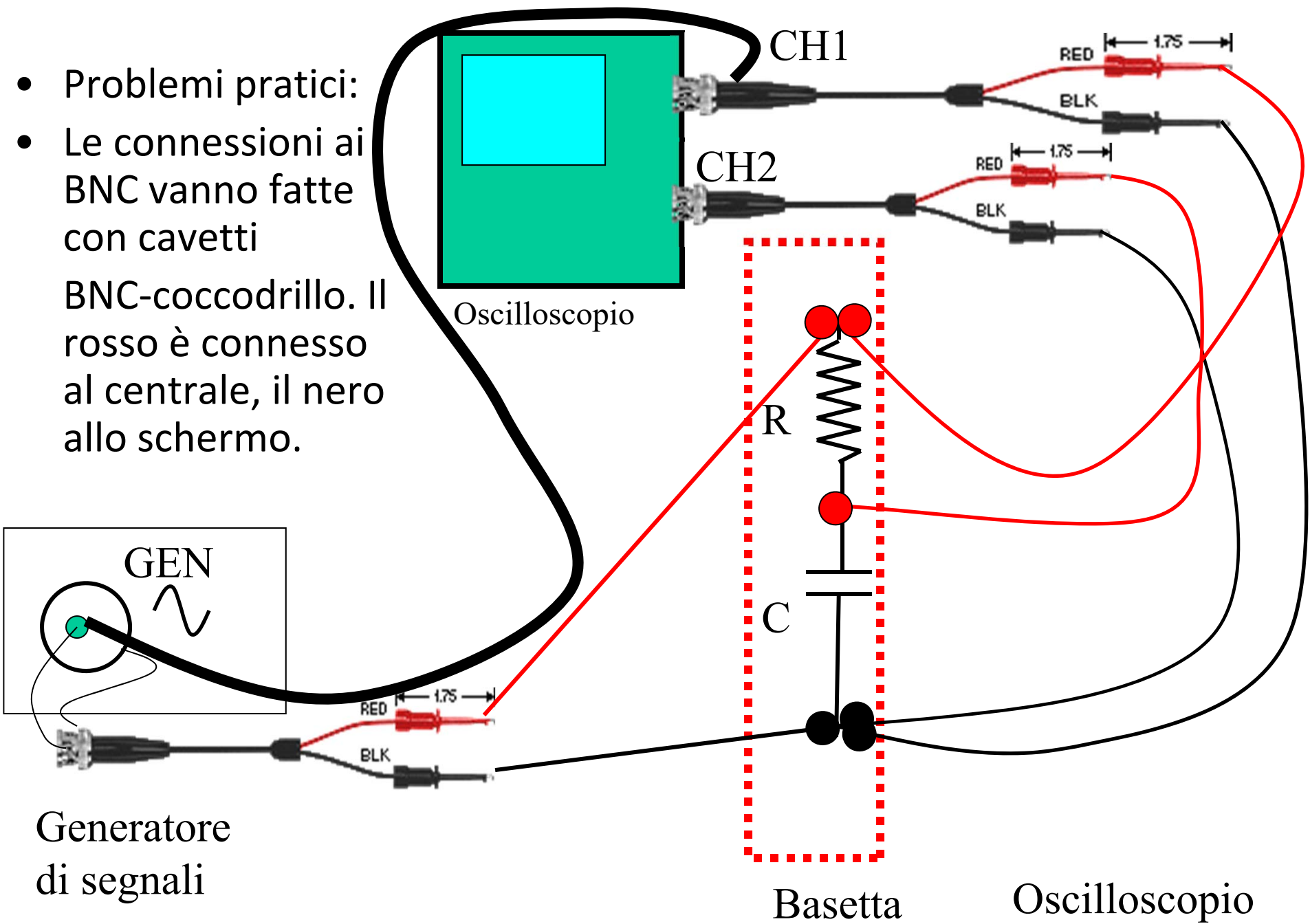
Circuito RC : schema di montaggio



● = coccodrilli rossi

● = coccodrilli neri

- Problemi pratici:
- Le connessioni ai BNC vanno fatte con cavetti BNC-coccodrillo. Il rosso è connesso al centrale, il nero allo schermo.

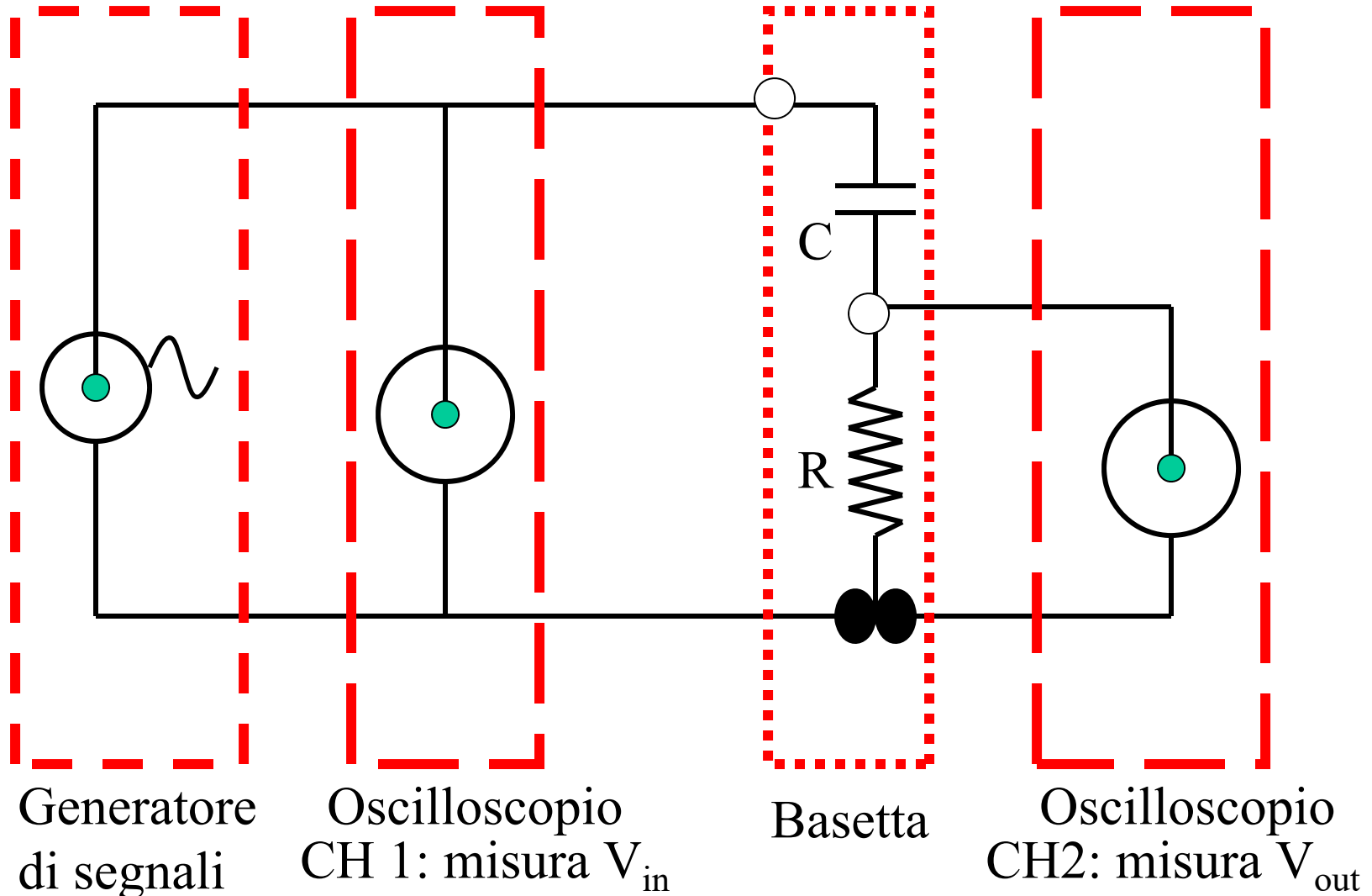


Terza parte esercitazione 2 :

(circuito CR con breve costante di tempo)

- Scambiando R con C nel circuito della parte 1 dell'esperienza, e prendendo il segnale ai capi di R, si misuri, con l'onda quadra in ingresso, la tensione in funzione del tempo.
- Si verifichi che il valore della costante di tempo è entro gli errori, compatibile con quella ricavata nella parte 1 dell'esperienza.
- Confrontare con il valore ottenuto a partire dalla misura di R e C con il ponte

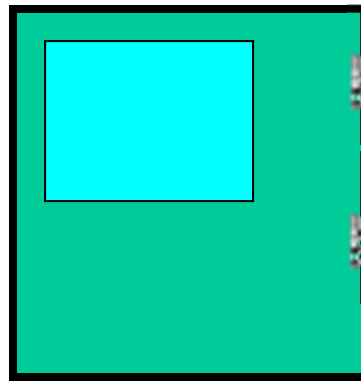
Circuito CR : schema di montaggio



○ = coccodrilli rossi

● = coccodrilli neri

- Problemi pratici:
- Le connessioni ai BNC vanno fatte con cavetti BNC-coccodrillo. Il rosso e' connesso al centrale, il nero allo schermo.



Oscilloscopio

T CH1

CH2

RED

BLK

RED

BLK

1.75

1.75

GEN

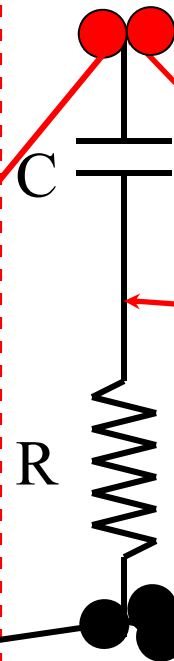


RED

BLK

1.75

Generatore
di segnali



Basetta

Oscilloscopio

Terza parte esercitazione 2 : (circuito CR con breve costante di tempo)

- Scegliendo un periodo dell'onda quadra di 1 ms (frequenza 1 kHz) si ha abbastanza tempo nella fase alta e nella fase bassa della tensione del generatore per consentire la carica e scarica praticamente complete del condensatore.

