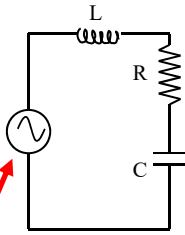


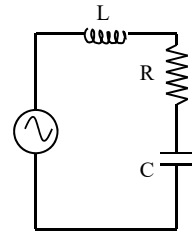
Il circuito RLC serie

- Se si aggiunge un induttore al circuito RC si ottiene un circuito RLC serie.
- Sia L l'induttanza (coefficiente di autoinduzione) dell'induttore
- Proviamo a risolvere il circuito (cioè a trovare la corrente che lo attraversa) quando è eccitato da una sorgente sinusoidale. $V = V_o \cos(\omega t + \varphi_V)$



Il circuito RLC serie

- Per la seconda legge di Kirchhoff:
- $$V = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}$$
- Per l'induttanza abbiamo considerato la forza elettromotrice autoindotta $-LdI/dt$ e l'abbiamo spostata a secondo membro cambiandola di segno.



- Derivando rispetto a t :
- $$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- È una eq. differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. La soluzione è la somma dell'integrale generale dell'omogenea più un integrale particolare della disomogenea.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Omogenea associata}$$

- Fisicamente la soluzione dell'omogenea corrisponde al comportamento transitorio iniziale; a regime vale l'integrale particolare.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- La soluzione dell'**omogenea** è del tipo

$$I(t) = I_1 e^{k_1 t} + I_2 e^{k_2 t}$$

- Con I_1 e I_2 costanti da determinare dalle condizioni iniziali e k_1 e k_2 soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$Lk^2 + Rk + \frac{1}{C} = 0$$

- quindi

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ponendo

Il circuito RLC serie

$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

si trova

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

la quantità b può essere reale, nulla o immaginaria a seconda che sia

$$\begin{cases} \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} & \text{Caso 1, } b \text{ reale} \\ \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} & \text{Caso 2, } b \text{ nullo} \\ \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} & \text{Caso 3, } b \text{ immaginario} \end{cases}$$

Il circuito RLC serie

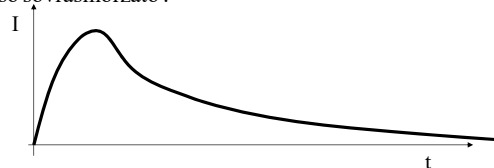
$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

e

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

se $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ gli esponenti sono ambedue negativi.

caso sovrasmorzato:



Imponendo le condizioni iniziali:

$$I(0) = 0 \Rightarrow$$

$$1) : 0 = I(0) = I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t} = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = -I_2$$

$$\text{e } q(0) = q_o \Rightarrow$$

$$RI(0) + L \left. \frac{dI}{dt} \right|_0 + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L \left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = -\frac{q_o}{C}$$

si trova quindi, derivando la [1] e ponendo $t = 0$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = 2bI_1 \rightarrow \dots$$

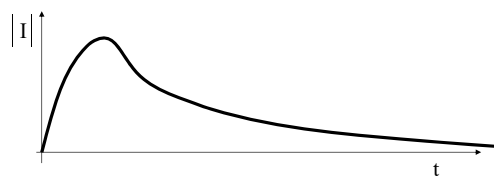
$$I_1 = -\frac{q_o}{2LCb}$$

e ponendo $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ si arriva a

$$I(t) = -\frac{q_o \omega_o^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\}$$

Quindi nel caso sovrasmorzato si ottiene il seguente andamento

$$I(t) = -\frac{q_o \omega_o^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\}$$



Caso criticamente smorzato

$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\text{se } \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \quad (\text{caso criticamente smorzato}) \quad b = 0$$

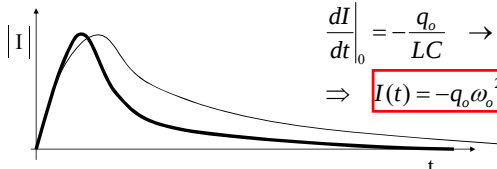
la soluzione e' del tipo $I(t) = (I_1 + I_2 t) e^{-at}$

Di nuovo, imponendo le condizioni iniziali si trovano I_1 e I_2

$$I(0) = 0 \rightarrow I_1 = 0$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = -\frac{q_o}{LC} \rightarrow I_2 = -\frac{q_o}{LC}$$

$$\Rightarrow I(t) = -q_o \omega_o^2 t e^{-at}$$



$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

e

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

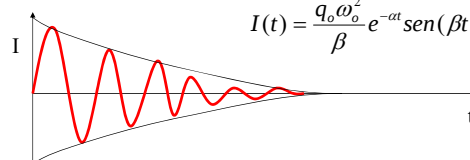
$$\text{se } \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} \quad \text{la soluzione e'}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$I(t) = I_1 e^{-(\alpha-j\beta)t} + I_2 e^{-(\alpha+j\beta)t} \quad I(t) = -j \frac{q_o \omega_o^2}{2\beta} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) e^{-\alpha t}$$

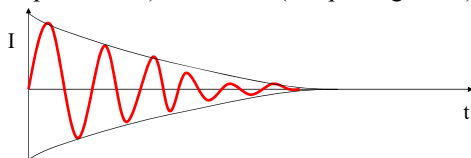
caso oscillatorio smorzato:

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$$



Il circuito RLC serie

- L' ampiezza delle oscillazioni diminuisce perchè l' energia inizialmente disponibile come campo elettrico nel condensatore viene via via dissipata per effetto Joule nella resistenza.
- Le oscillazioni dipendono dal fatto che l' energia viene rimbalzata continuamente tra condensatore (campo elettrico) e induttore (campo magnetico)



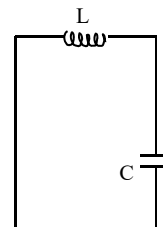
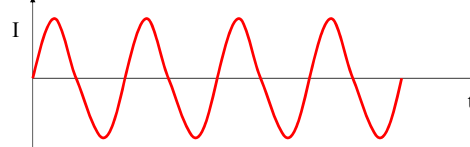
Il circuito RLC serie

- Consideriamo il caso oscillatorio smorzato.
- Se R fosse nulla avremmo $\alpha = R/2L = 0$ e quindi

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \Rightarrow$$

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} \sin(\beta t)$$

- Le oscillazioni in tal caso non sarebbero smorzate



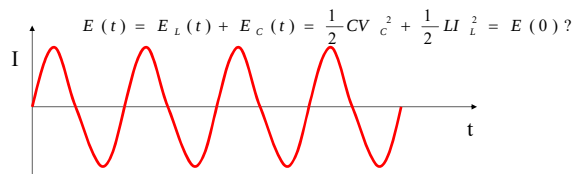
Il circuito RLC serie

- In assenza di fenomeni dissipativi, e trascurando l'energia irradiata, l'energia immagazzinata nel circuito dovrebbe rimanere costante. Vediamo se è vero.

$$E = E(0) = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$$

$$E_c = \frac{1}{C} \int q dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}$$

$$E_L = \int W dt = \int LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$



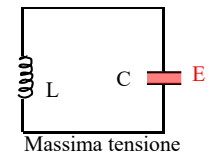
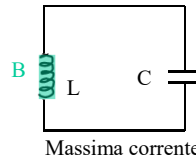
$$I(t) = \frac{q_0 \omega_0^2}{\beta} \sin \beta t = I_0 \sin \omega_0 t$$

$$\cancel{RI} + L \frac{dI}{dt} + V_C = 0 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} = V_C \Rightarrow -LI_0 \omega_0 \cos \omega_0 t = V_C$$

$$E_C = \frac{1}{2} CV_c^2 = \frac{1}{2} CL^2 I_0^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} LI_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$E_L = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} LI_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$E_C + E_L = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad \text{Costante !}$$



$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- Cosa succede a regime (se V è sinusoidale) ?
- Si cerca un integrale particolare:

$$V = V_0 e^{j(\omega t + \phi_V)}$$

$$I = I_0 e^{j(\omega t + \phi_I)}$$

$$j\omega V_0 e^{j(\omega t + \phi_V)} = \left[-\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C} \right] I_0 e^{j(\omega t + \phi_I)}$$

$$V_0 e^{j(\phi_V - \phi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_0$$

A questa equazione si poteva arrivare subito dalla legge di Ohm generalizzata.

$$V_0 e^{j(\phi_V - \phi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_0$$

ponendo

$$\phi = (\phi_V - \phi_I)$$

$$Z = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

si ottiene

$$V_0 e^{j\phi} = Z I_0 \Rightarrow \begin{cases} I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \phi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{cases}$$

$$V_0 e^{j\phi} = Z I_0 \Rightarrow \begin{cases} I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \phi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{cases}$$

se $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ l'impedenza diventa reale (e pari a R) e lo sfasamento va a 0. condizione di risonanza.

si definisce il fattore di qualità del circuito

$$Q_0 = \omega_0 L / R = (1/R) \sqrt{L/C} \quad \text{e si può riscrivere :}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{V_0 / R}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \right)^2}}$$

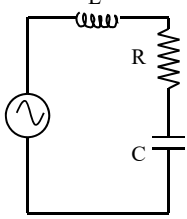
Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j(\phi_v - \phi_i)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

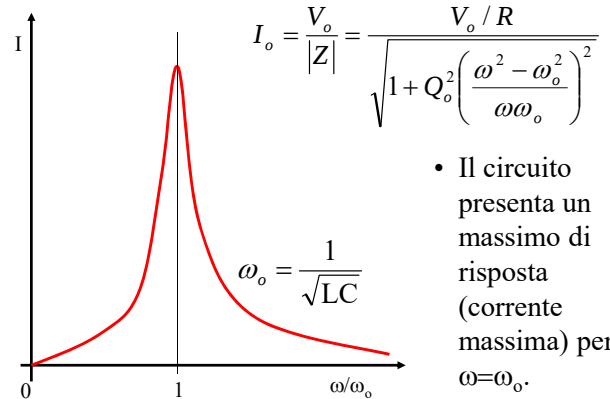
$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} =$$

$$\frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

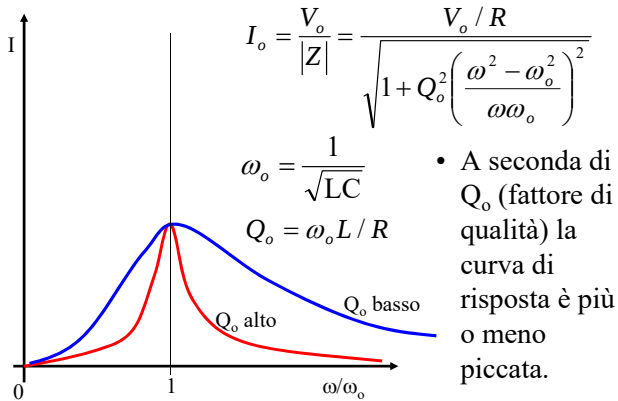
dove $Q_o = \omega_o L / R$ è il fattore di qualità



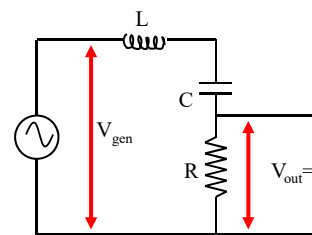
Il circuito RLC serie



Il circuito RLC serie

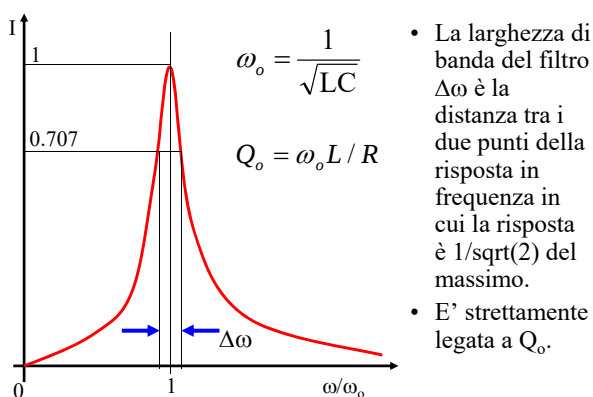


Il circuito RLC serie



- In questa configurazione il circuito agisce come un filtro **passa banda**.
- Solo le frequenze intorno ad ω_o producono un segnale in uscita.
- Il filtro è tanto più selettivo quanto più alto è Q_o .
- Viene utilizzato ad es. per sintonizzare una radio su una frequenza ben precisa, eliminando le altre.

Il circuito RLC serie



Il circuito RLC serie

$$\frac{I_o}{V_{gen} / R} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

vale $1/\sqrt{2}$ quando

$$Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2 = 1$$

$$\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} = \pm \frac{1}{Q_o} \Rightarrow \omega^2 \mp \frac{\omega \omega_o}{Q_o} - \omega_o^2 = 0$$

Il circuito RLC serie

$$Q_o \omega^2 \mp \omega \omega_o - Q_o \omega_o^2 = 0$$

la soluzione è

$$\omega = \frac{\mp \omega_o \pm \sqrt{\omega_o^2 + 4Q_o^2 \omega_o^2}}{2Q_o}$$

e le due soluzioni positive sono

$$\omega_{1,2} = \frac{\mp \omega_o + \sqrt{\omega_o^2 + 4Q_o^2 \omega_o^2}}{2Q_o}$$

da cui

$$\Delta \omega = \omega_2^+ - \omega_1^+ = \frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{R}{L}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

La larghezza di banda è inversamente proporzionale al fattore di qualità Q_o . Il filtro è tanto più selettivo quanto più alto è Q_o .

Il circuito RLC serie

- La resistenza minima del circuito è quella dell'avvolgimento con cui si realizza l'induttanza.
- Con induttanze commerciali di ottima qualità si ottengono fattori di qualità dell'ordine di 100, e quindi bande passanti dell'ordine di 1/100 della frequenza centrale.
- Solo usando superconduttori si possono ottenere $Q \gg 100$.

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

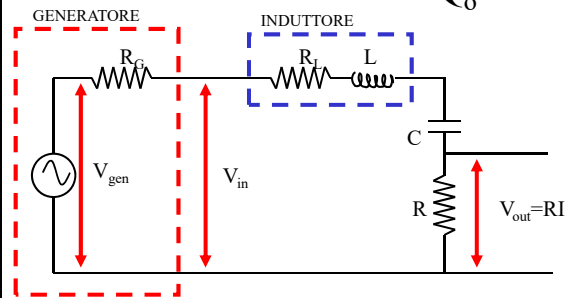
$$\Delta \omega = \omega_2^+ - \omega_1^+ = \frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{\omega_o}{\Delta \omega} = \frac{f_o}{\Delta f}$$

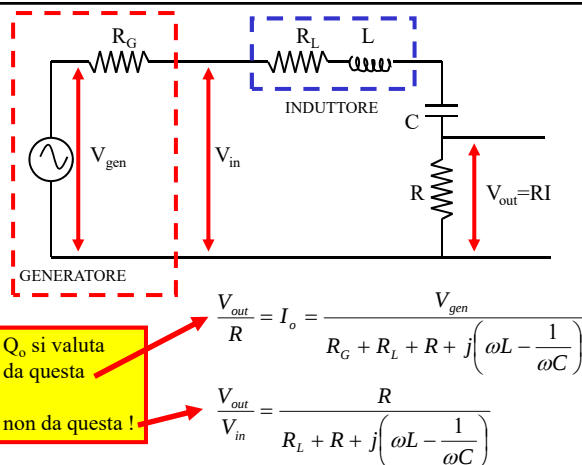
Nota: Misura di Q_o

- Il Q_o che abbiamo definito si riferisce all'espressione della **corrente** nel circuito.
- La R che compare nell'espressione di Q_o è la resistenza totale del circuito, somma di
 - Resistenza interna del generatore
 - Resistenza interna dell'induttore
 - Resistenza reale
- La corrente che scorre nel circuito può essere valutata misurando V ai capi della resistenza reale e dividendo per il valore della resistenza reale.
- Da una curva di I in funzione della frequenza si valuta $Q_o = f_o / \Delta f$

Nota: Misura di Q_o



- In un circuito reale solo V_{in} e V_{out} sono misurabili, V_{gen} non lo è (almeno non direttamente).



Nota2: se si vuole misurare R_L

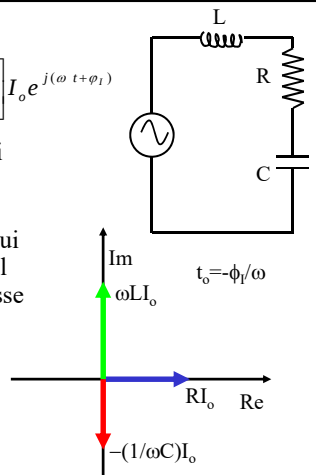
- Dalle misure di I si valuta $Q_o = f_o / \Delta f$ e da questo la somma di $R_L + R_G + R$, da cui per sottrazione R_L (sapendo le altre due)
- Oppure, meglio
- Dalle misure di V_{out}/V_{in} alla risonanza:

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{RIS} = \frac{R}{R + R_L} \Rightarrow R_L = R \left[\left. \frac{V_{in}}{V_{out}} \right|_{RIS} - 1 \right]$$

Lo sfasamento

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

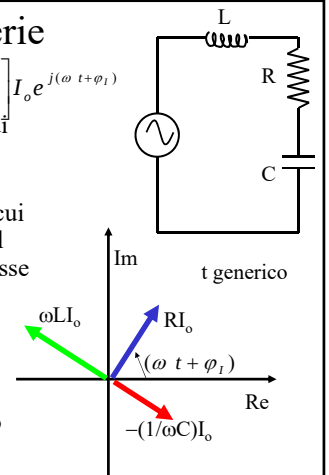
- Vediamo le tensioni ai capi di ciascun componente:
- I tre termini nell'equazione sopra sono delle tensioni, la cui parte reale è la proiezione del fasore rappresentativo sull'asse reale del piano complesso.
- I tre vettori sono lunghi rispettivamente
- $I_o R$, $I_o \omega L$, $I_o / \omega C$



Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

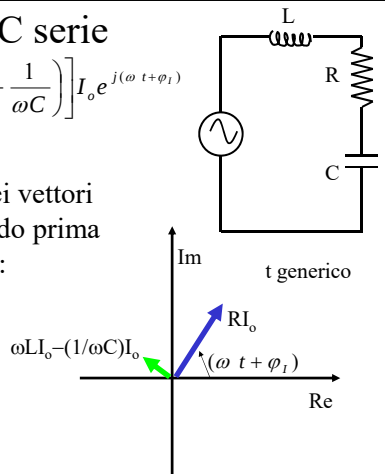
- Vediamo le tensioni ai capi di ciascun componente:
- I tre termini nell'equazione sopra sono delle tensioni, la cui parte reale è la proiezione del fasore rappresentativo sull'asse reale del piano complesso.
- I tre vettori sono lunghi rispettivamente
- $I_o R$, $I_o \omega L$, $I_o / \omega C$
- Al passare del tempo ruotano mantenendo le stesse fasi relative



Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

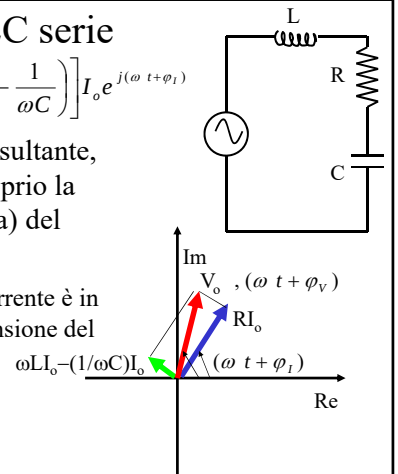
- La composizione dei vettori si può fare sommando prima i contributi di L e C:



Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

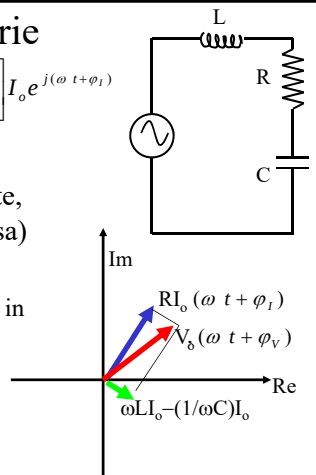
- E poi trovando la risultante, che deve essere proprio la tensione (complessa) del generatore.
- Se $\omega L > (1/\omega C)$, la corrente è in ritardo rispetto alla tensione del generatore



Il circuito RLC serie

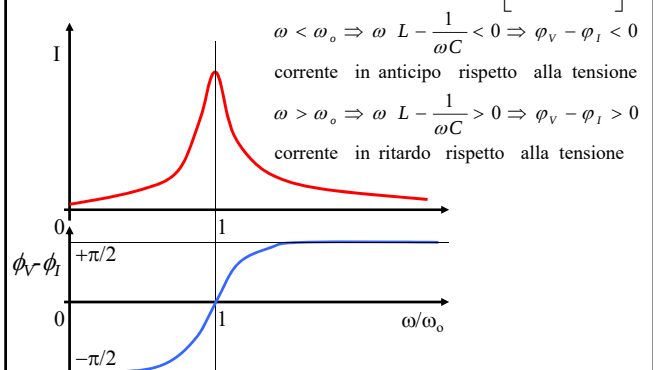
$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- E poi trovando la risultante, cioè la tensione (complessa) del generatore.
- Se $\omega L < (1/\omega C)$, la corrente è in anticipo rispetto alla tensione



circuito RLC serie

Sfasamento tra tensione e corrente: $\varphi_V - \varphi_I = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]$



Extratensioni

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_1)}$$

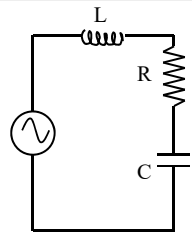
- Vediamo i moduli delle tensioni ai capi di ciascun componente
reattivo:

$$\bar{V}_C = \bar{Z}_C \bar{I} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \bar{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\bar{V}_L = \bar{Z}_L \bar{I} = \frac{j\omega L \bar{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

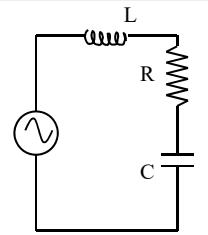
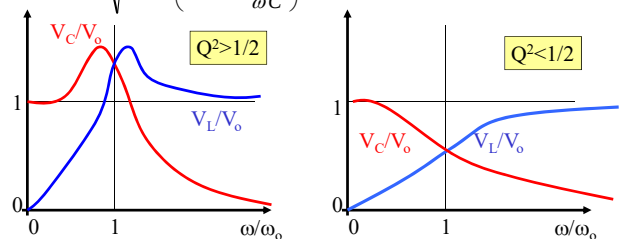
$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$



Il circuito RLC serie

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$



Extratensioni

- Notare che, alla risonanza :

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \rightarrow \frac{V_C}{V_o} = \frac{1}{R\omega_o C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \rightarrow \frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

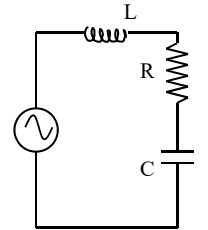
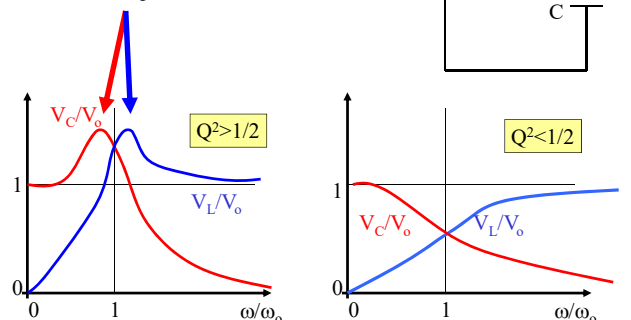
cioè la tensione ai capi di C e L è maggiore di quella di ingresso, di un fattore pari a Q_o .

- Va anche notato che, seppure le due tensioni su L e su C siano grandi, hanno fase opposta, e quindi si elidono istante per istante, e non fanno scorrere alcuna corrente, né nel resistore né nel generatore.

Il circuito RLC serie

EXTRATENSIONI:

La tensione massima, però, si ha per una frequenza leggermente diversa da quella di risonanza.



Il circuito RLC serie

Si può dimostrare che nei due casi

$$\omega_{\max}(V_L) = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{(RC)^2}{2}}} > \omega_o$$

$$\omega_{\max}(V_C) = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} \right)^2}} < \omega_o$$

