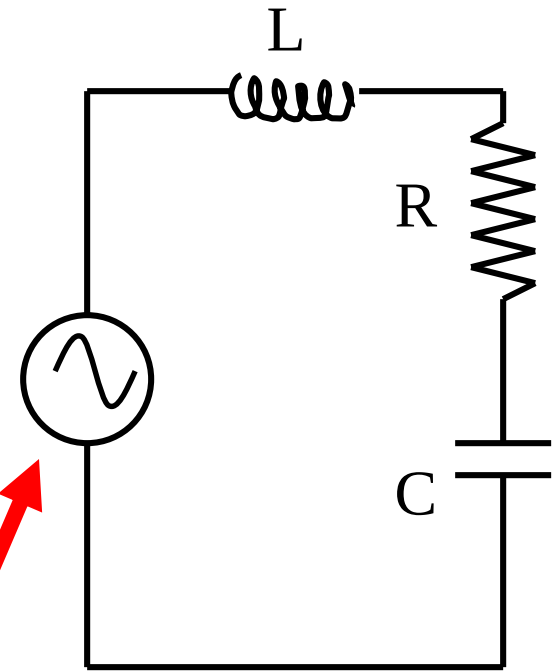


# Il circuito RLC serie

- Se si aggiunge un induttore al circuito RC si ottiene un circuito RLC serie.
- Sia  $L$  l'induttanza (coefficiente di autoinduzione) dell'induttore
- Proviamo a risolvere il circuito (cioè a trovare la corrente che lo attraversa) quando è eccitato da una sorgente sinusoidale.  $V = V_o \cos(\omega t + \varphi_V)$



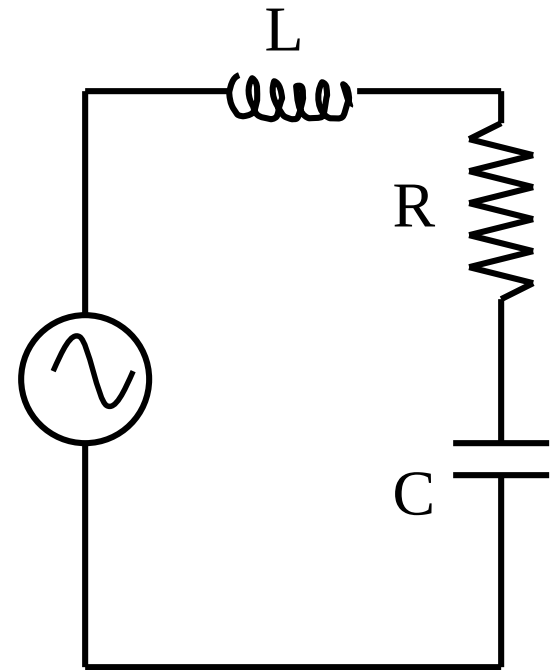
# Il circuito RLC serie

- Per la seconda legge di Kirchhoff:

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}$$

- Per l'induttanza abbiamo considerato la forza elettromotrice autoindotta  $-LdI/dt$  e l'abbiamo spostata a secondo membro cambiandola di segno.
- Derivando rispetto a t:

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$



$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- E' una eq. differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. La soluzione è la somma dell' integrale generale dell' omogenea più un integrale particolare della disomogenea.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Omogenea associata}$$

- Fisicamente la soluzione dell' omogenea corrisponde al comportamento transitorio iniziale; a regime vale l' integrale particolare.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- La soluzione dell' **omogenea** è del tipo

$$I(t) = I_1 e^{k_1 t} + I_2 e^{k_2 t}$$

- Con  $I_1$  e  $I_2$  costanti da determinare dalle condizioni iniziali e  $k_1$  e  $k_2$  soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$Lk^2 + Rk + \frac{1}{C} = 0$$

- quindi

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ponendo

# Il circuito RLC serie

$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

si trova

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

la quantità  $b$  può essere reale, nulla o immaginaria  
a seconda che sia

$$\begin{cases} \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} & \text{Caso 1, } b \text{ reale} \\ \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} & \text{Caso 2, } b \text{ nullo} \\ \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} & \text{Caso 3, } b \text{ immaginario} \end{cases}$$

# Il circuito RLC serie

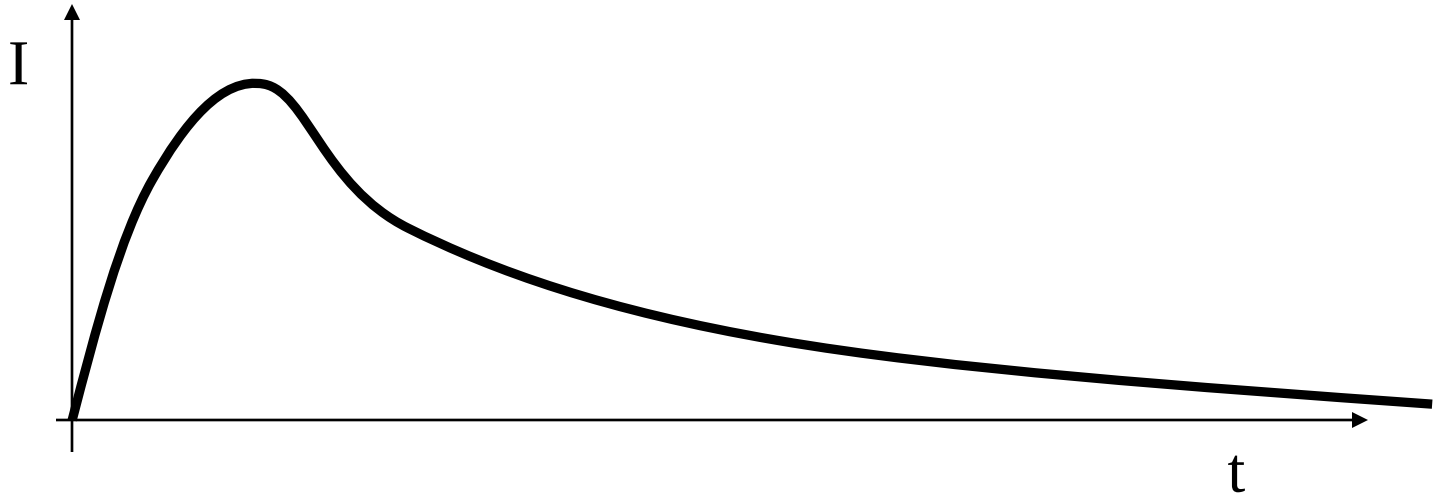
$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

e

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

se  $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$  gli esponenti sono ambedue negativi.

caso sovrasmorzato :



Imponendo le condizioni iniziali:

$$I(0) = 0 \Rightarrow$$

$$1): 0 = I(0) = I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t} = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = -I_2$$

$$\text{e } q(0) = q_o \Rightarrow$$

$$RI(0) + L \left. \frac{dI}{dt} \right|_0 + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L \left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = -\frac{q_o}{C}$$

si trova quindi, derivando la [1] e ponendo  $t = 0$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = 2bI_1 \rightarrow \dots$$

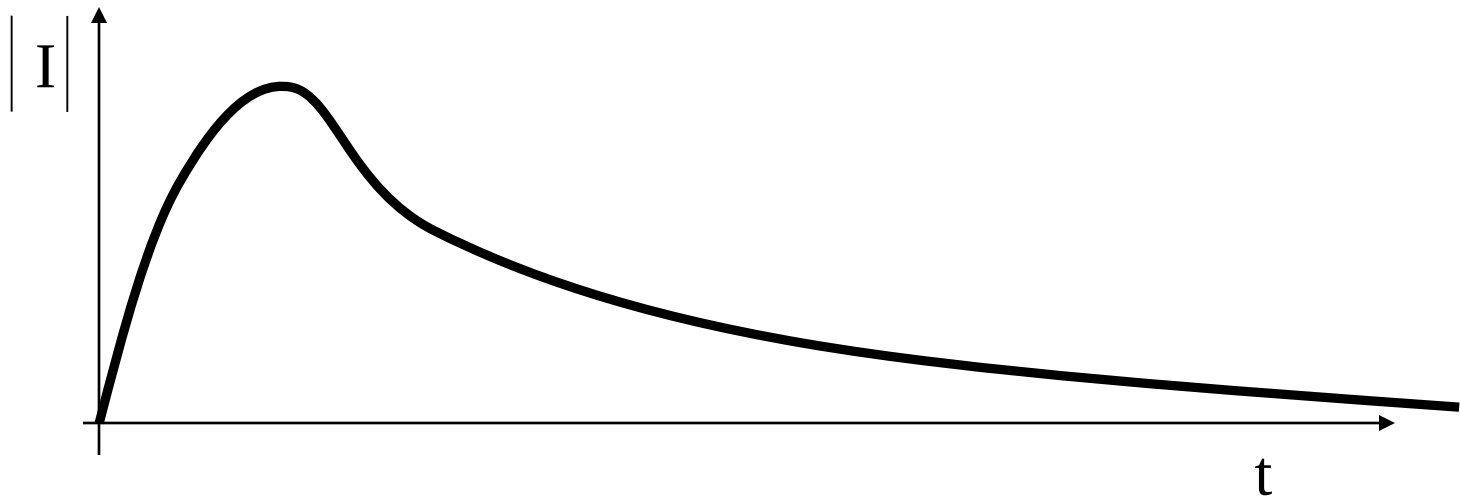
$$I_1 = -\frac{q_o}{2LCb}$$

e ponendo  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  si arriva a

$$I(t) = -\frac{q_o \omega_o^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\}$$

Quindi nel caso sovrasmorzato si  
ottiene il seguente andamento

$$I(t) = -\frac{q_o \omega_o^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\}$$



# Caso criticamente smorzato

$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\text{se } \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \quad (\text{caso criticamente smorzato}) \quad b = 0$$

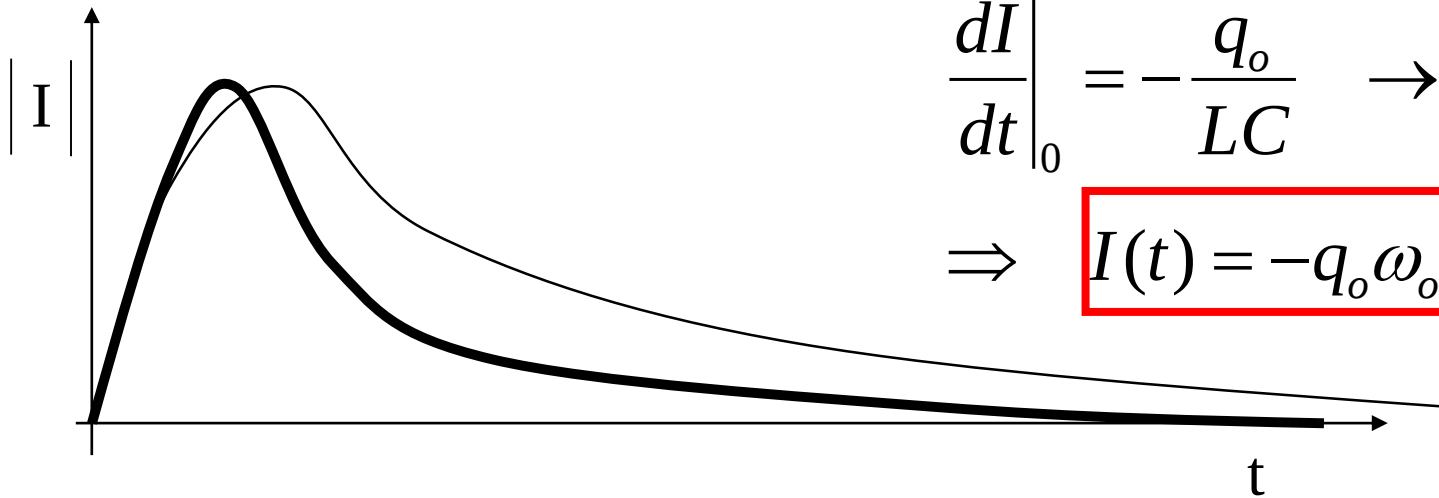
la soluzione e' del tipo  $I(t) = (I_1 + I_2 t)e^{-at}$

Di nuovo, imponendo le condizioni iniziali si trovano  $I_1$  e  $I_2$

$$I(0) = 0 \rightarrow I_1 = 0$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = -\frac{q_o}{LC} \rightarrow I_2 = -\frac{q_o}{LC}$$

$$\Rightarrow I(t) = -q_o \omega_o^2 t e^{-at}$$



$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

# Il circuito RLC serie

e

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

se  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$  la soluzione e'

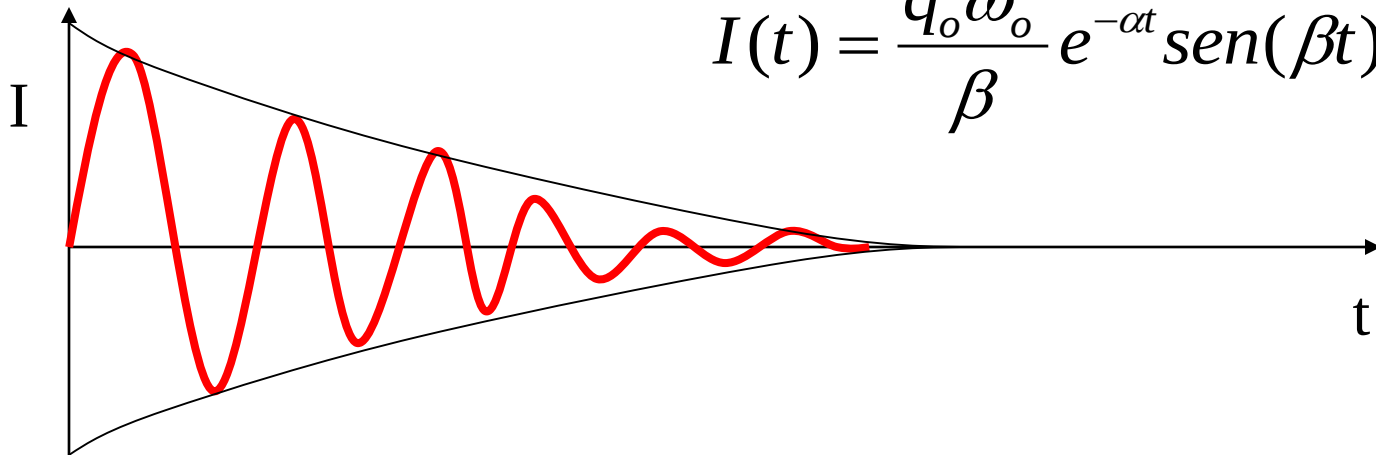
$$I(t) = I_1 e^{-(\alpha-j\beta)t} + I_2 e^{-(\alpha+j\beta)t}$$

caso oscillatorio smorzato :

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

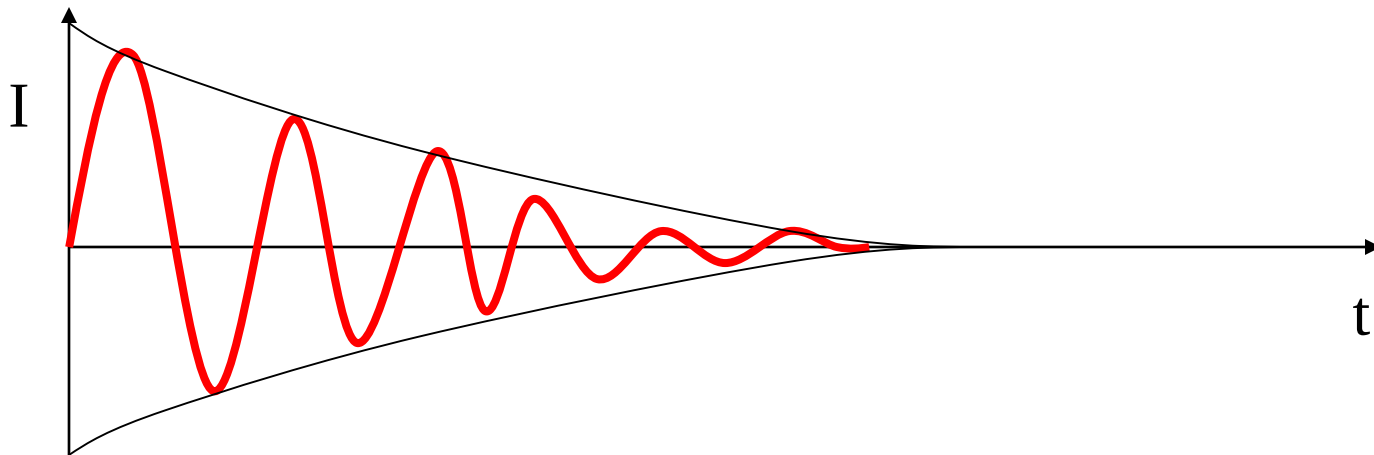
$$I(t) = -j \frac{q_o \omega_o^2}{2\beta} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) e^{-\alpha t}$$

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} e^{-\alpha t} \text{sen}(\beta t)$$



# Il circuito RLC serie

- L'ampiezza delle oscillazioni diminuisce perchè l'energia inizialmente disponibile come campo elettrico nel condensatore viene via via dissipata per effetto Joule nella resistenza.
- Le oscillazioni dipendono dal fatto che l'energia viene rimbalzata continuamente tra condensatore (campo elettrico) e induttore (campo magnetico)

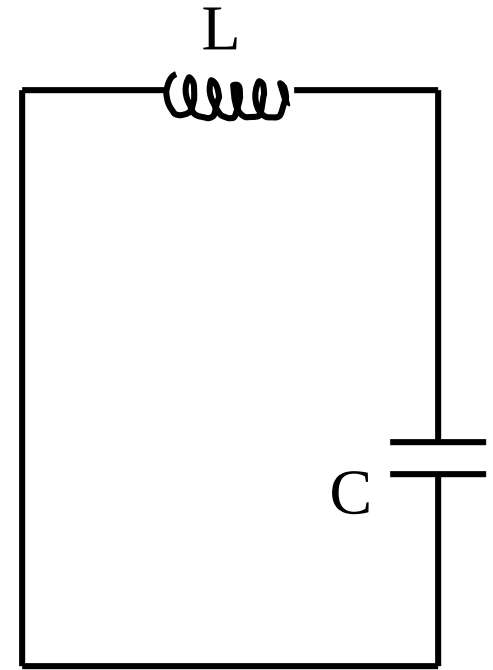


# Il circuito RLC serie

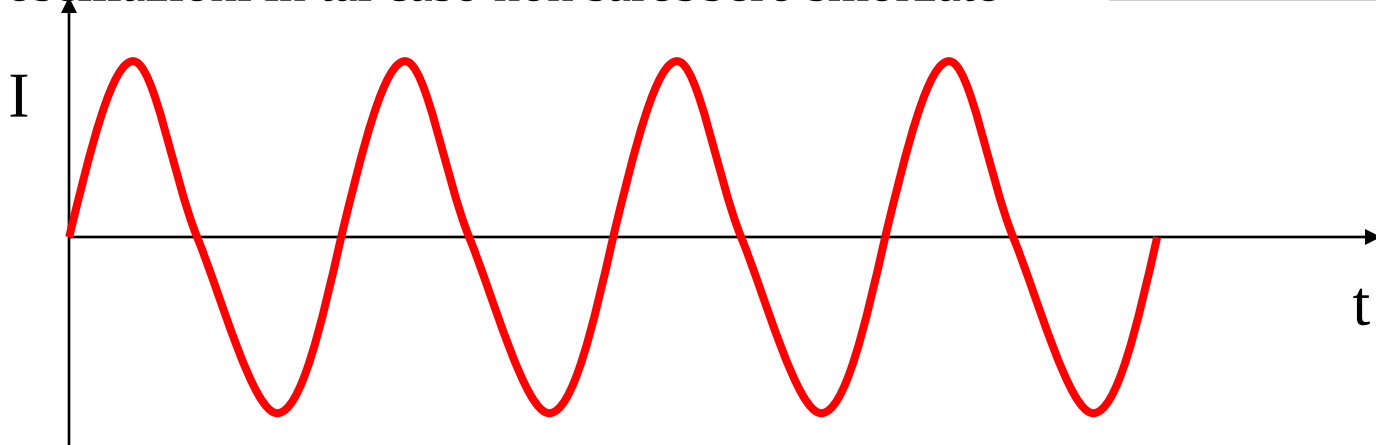
- Consideriamo il caso oscillatorio smorzato.
- Se R fosse nulla avremmo  $\alpha=R/2L=0$  e quindi

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} e^{-\alpha t} \text{sen}(\beta t) \Rightarrow$$

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} \text{sen}(\beta t)$$



- Le oscillazioni in tal caso non sarebbero smorzate



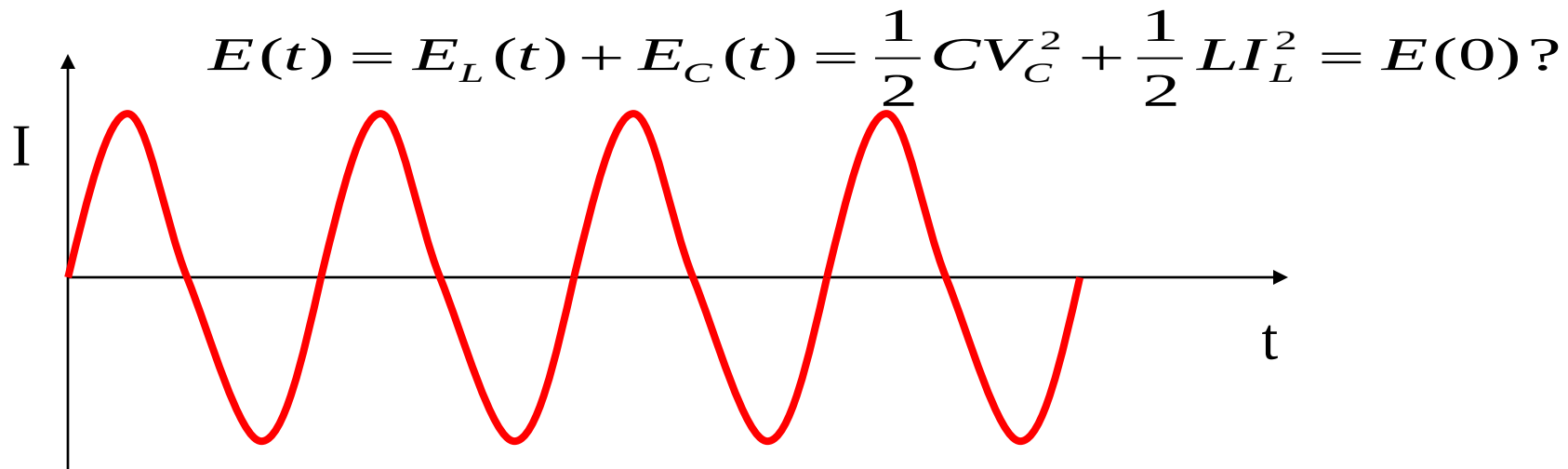
# Il circuito RLC serie

- In assenza di fenomeni dissipativi, e trascurando l'energia irradiata, l'energia immagazzinata nel circuito dovrebbe rimanere costante. Vediamo se è vero.

$$E = E(0) = \frac{1}{2} \frac{q_o^2}{C}$$

$$E_c = \frac{1}{C} \int q dq = Q^2 / 2C = CV^2 / 2$$

$$E_L = \int W dt = \int IL dI = 1/2 LI^2$$



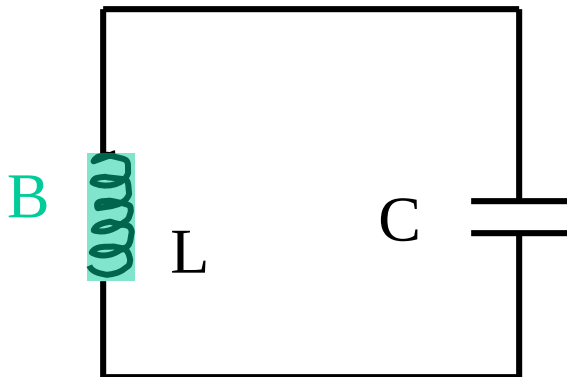
$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} \text{sen} \beta t = I_o \text{sen} \omega_o t$$

$$\cancel{RI} + L \frac{dI}{dt} + V_C = 0 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} = V_C \Rightarrow -LI_o \omega_o \cos \omega_o t = V_C$$

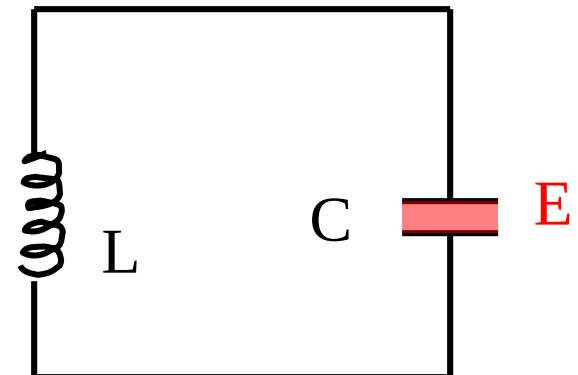
$$E_C = \frac{1}{2} C V_c^2 = \frac{1}{2} C L^2 I_o^2 \omega_o^2 \cos^2 \omega_o t = \frac{1}{2} L I_o^2 \cos^2 \omega_o t$$

$$E_L = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L I_o^2 \sin^2 \omega_o t$$

$$E_C + E_L = \frac{1}{2} L I_o^2 \quad \text{Costante !}$$



Massima corrente



Massima tensione

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

## Il circuito RLC serie

- Cosa succede a regime (se  $V$  è sinusoidale) ?
- Si cerca un integrale particolare:

$$V = V_o e^{j(\omega t + \varphi_V)}$$

$$I = I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

$$j\omega V_o e^{j(\omega t + \varphi_V)} = \left[ -\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C} \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

A questa equazione si poteva arrivare subito dalla legge di Ohm generalizzata.

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

ponendo

$$\varphi = (\varphi_V - \varphi_I)$$

$$Z = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

si ottiene

$$V_o e^{j\varphi} = Z I_o \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \varphi = \arctan \left[ \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{array} \right.$$

$$V_o e^{j\varphi} = Z I_o \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \varphi = \arctan \left[ \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{array} \right.$$

se  $\omega = \omega_o = 1/\sqrt{LC}$  l'impedenza diventa reale  
(e pari a R) e lo sfasamento va a 0.  
condizione di risonanza.

si definisce il fattore di qualità del circuito

$$Q_o = \omega_o L / R = (1 / R) \sqrt{L / C} \quad \text{e si può riscrivere :}$$

$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow I_o = \frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

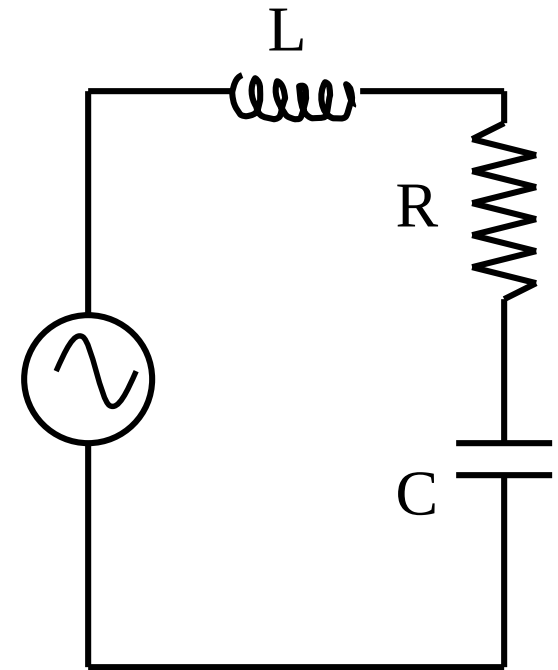
# Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

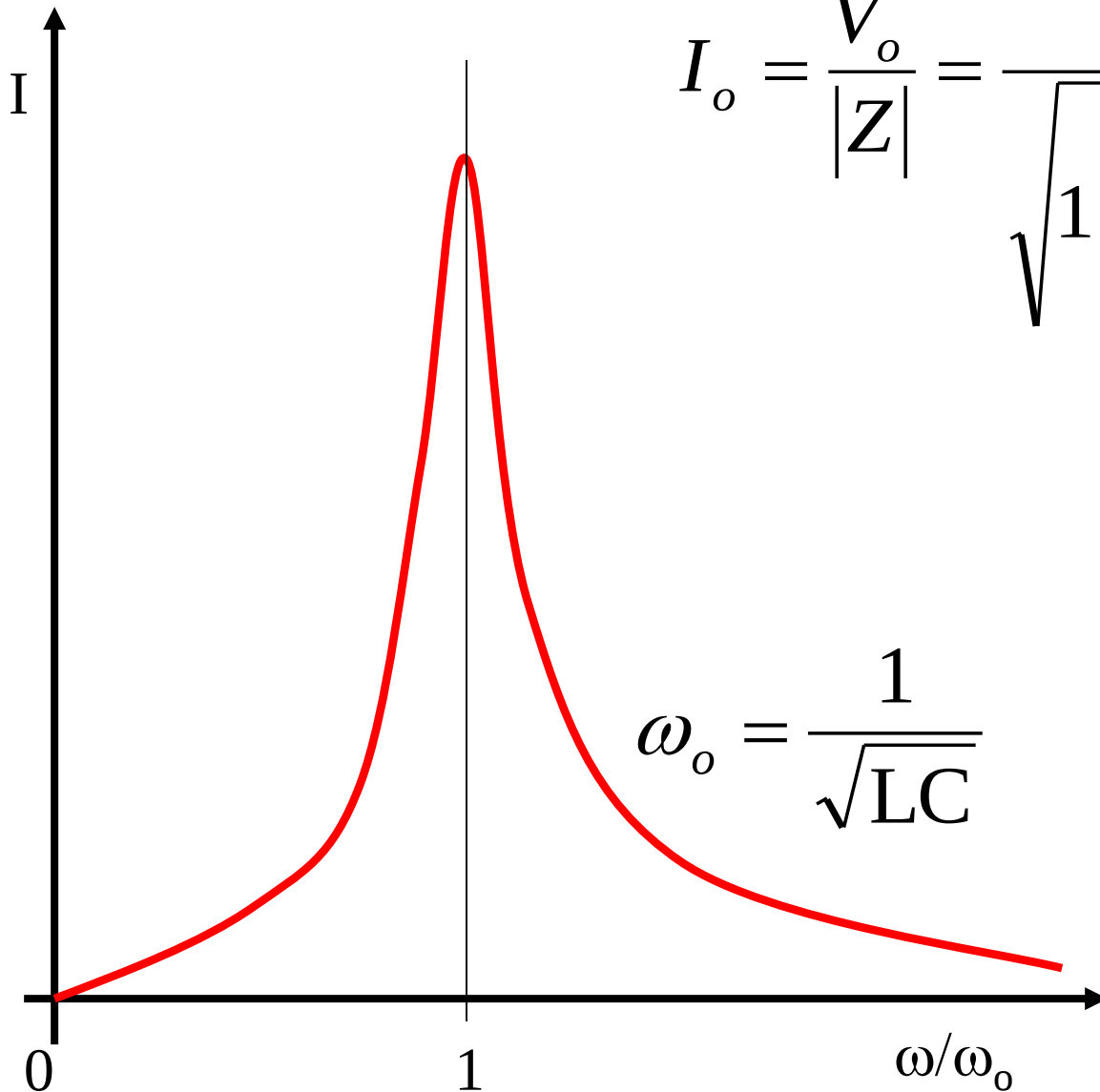
$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} =$$

$$\frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

dove  $Q_o = \omega_o L / R$  è il fattore di qualità



# Il circuito RLC serie



$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Il circuito presenta un massimo di risposta (corrente massima) per  $\omega = \omega_o$ .

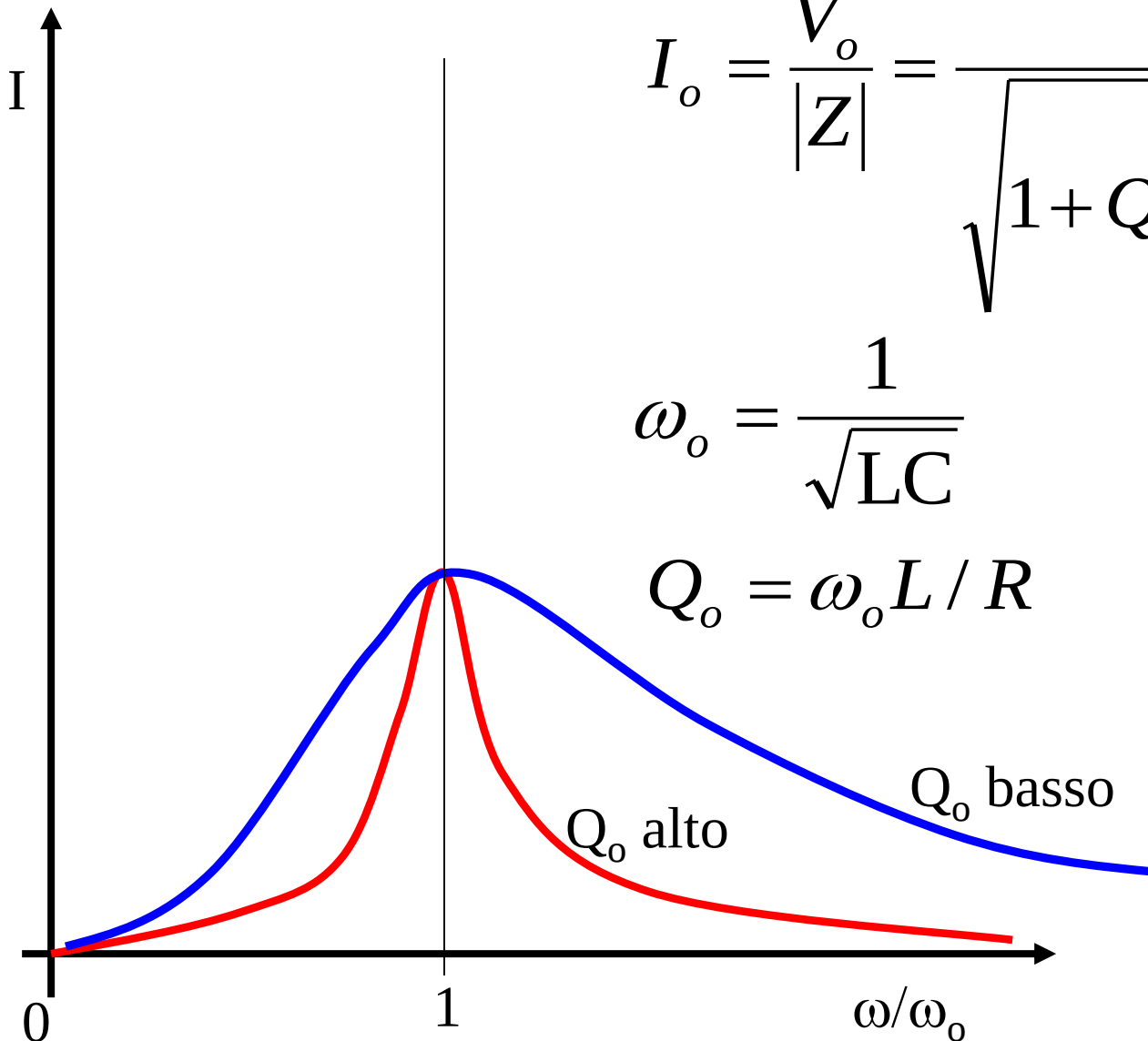
# Il circuito RLC serie

$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

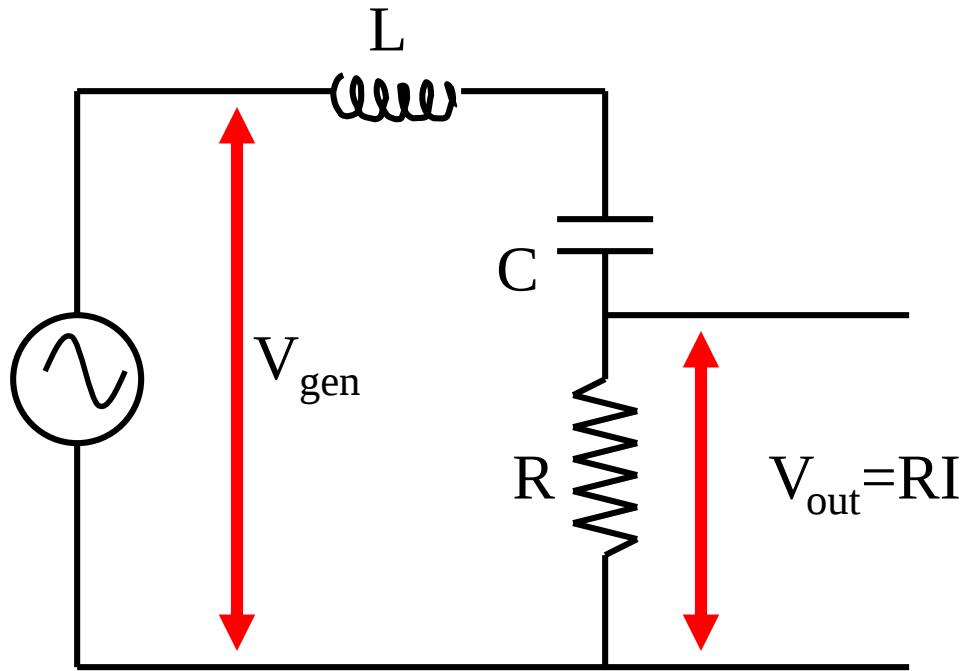
$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o L / R$$

- A seconda di  $Q_o$  (fattore di qualità) la curva di risposta è più o meno piccata.

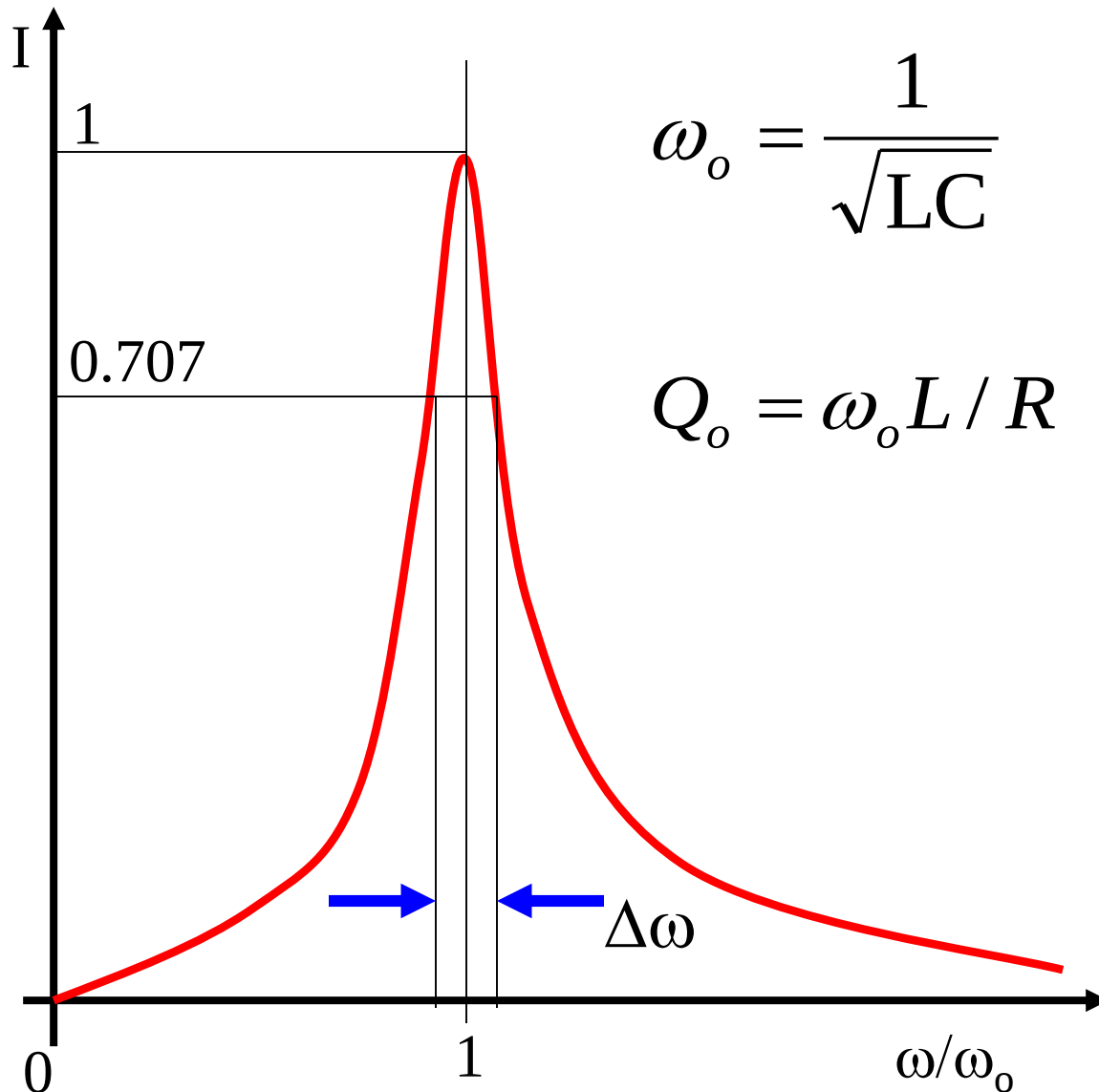


# Il circuito RLC serie



- In questa configurazione il circuito agisce come un filtro **passa banda**.
- Solo le frequenze intorno ad  $\omega_0$  producono un segnale in uscita.
- Il filtro è tanto più selettivo quanto più alto è  $Q_0$ .
- Viene utilizzato ad es. per sintonizzare una radio su una frequenza ben precisa, eliminando le altre.

# Il circuito RLC serie



- La larghezza di banda del filtro  $\Delta\omega$  è la distanza tra i due punti della risposta in frequenza in cui la risposta è  $1/\sqrt{2}$  del massimo.
- E' strettamente legata a  $Q_0$ .

# Il circuito RLC serie

$$\frac{I_o}{V_{gen} / R} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

vale  $1/\sqrt{2}$  quando

$$Q_o^2 \left( \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2 = 1$$

$$\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} = \pm \frac{1}{Q_o} \Rightarrow \omega^2 \mp \frac{\omega \omega_o}{Q_o} - \omega_o^2 = 0$$

# Il circuito RLC serie

$$Q_o \omega^2 \mp \omega \omega_o - Q_o \omega_o^2 = 0$$

la soluzione è

$$\omega = \frac{\mp \omega_o \pm \sqrt{\omega_o^2 + 4Q_o^2 \omega_o^2}}{2Q_o}$$

e le due soluzioni positive sono

$$\omega_{1,2}^+ = \frac{\mp \omega_o + \sqrt{\omega_o^2 + 4Q_o^2 \omega_o^2}}{2Q_o}$$

da cui

$$\Delta\omega = \omega_2^+ - \omega_1^+ = \frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{R}{L}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

La larghezza di banda è inversamente proporzionale al fattore di qualità  $Q_o$ . Il filtro è tanto più selettivo quanto più alto è  $Q_o$ .

# Il circuito RLC serie

- La resistenza minima del circuito è quella dell'avvolgimento con cui si realizza l' induttanza.
- Con induttanze commerciali di ottima qualità si ottengono fattori di qualità dell' ordine di 100, e quindi bande passanti dell' ordine di 1/100 della frequenza centrale.
- Solo usando superconduttori si possono ottenere  $Q \gg 100$ .

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

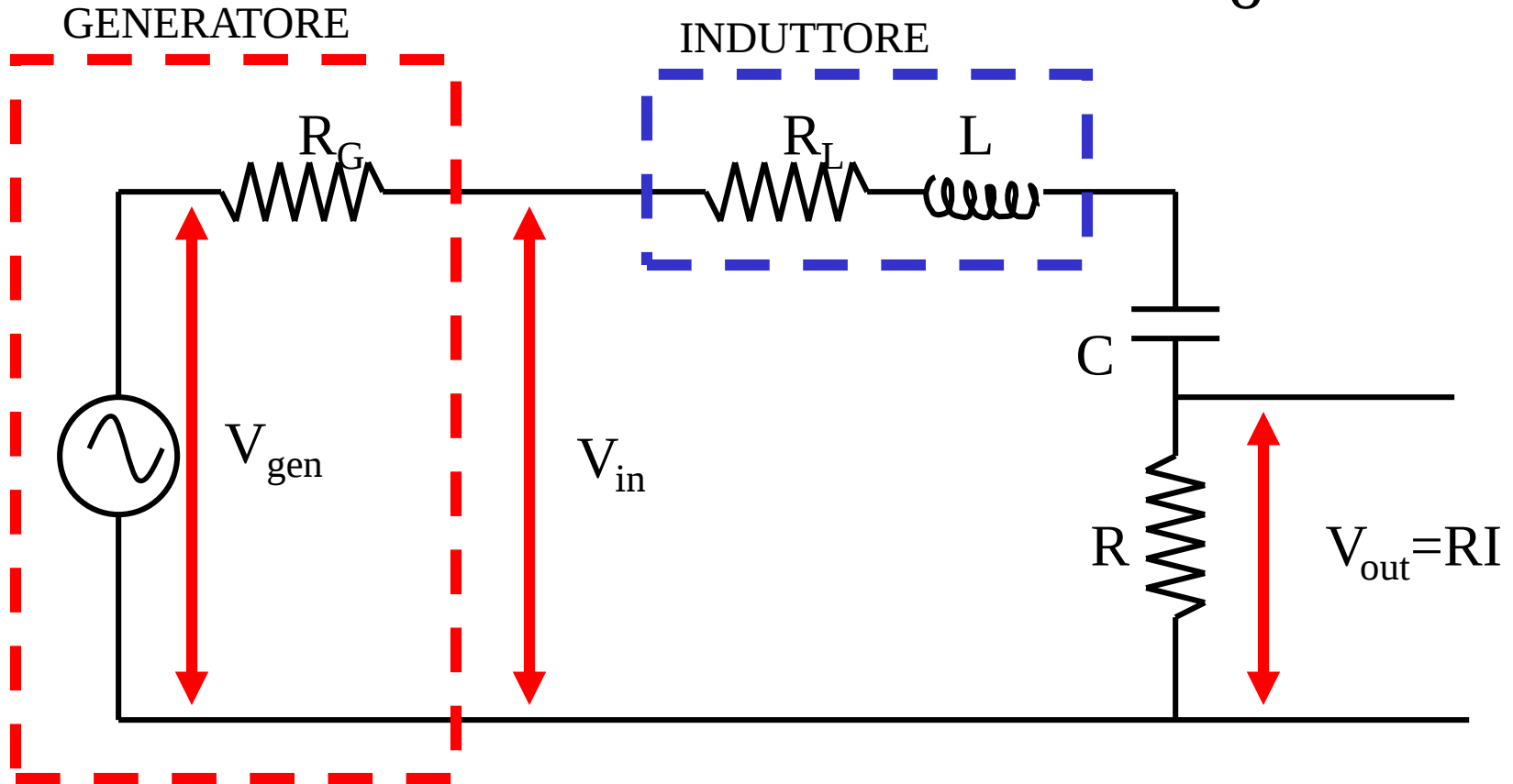
$$\Delta\omega = \omega_2^+ - \omega_1^- = \frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{R}{L}$$


$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} = \frac{f_o}{\Delta f}$$

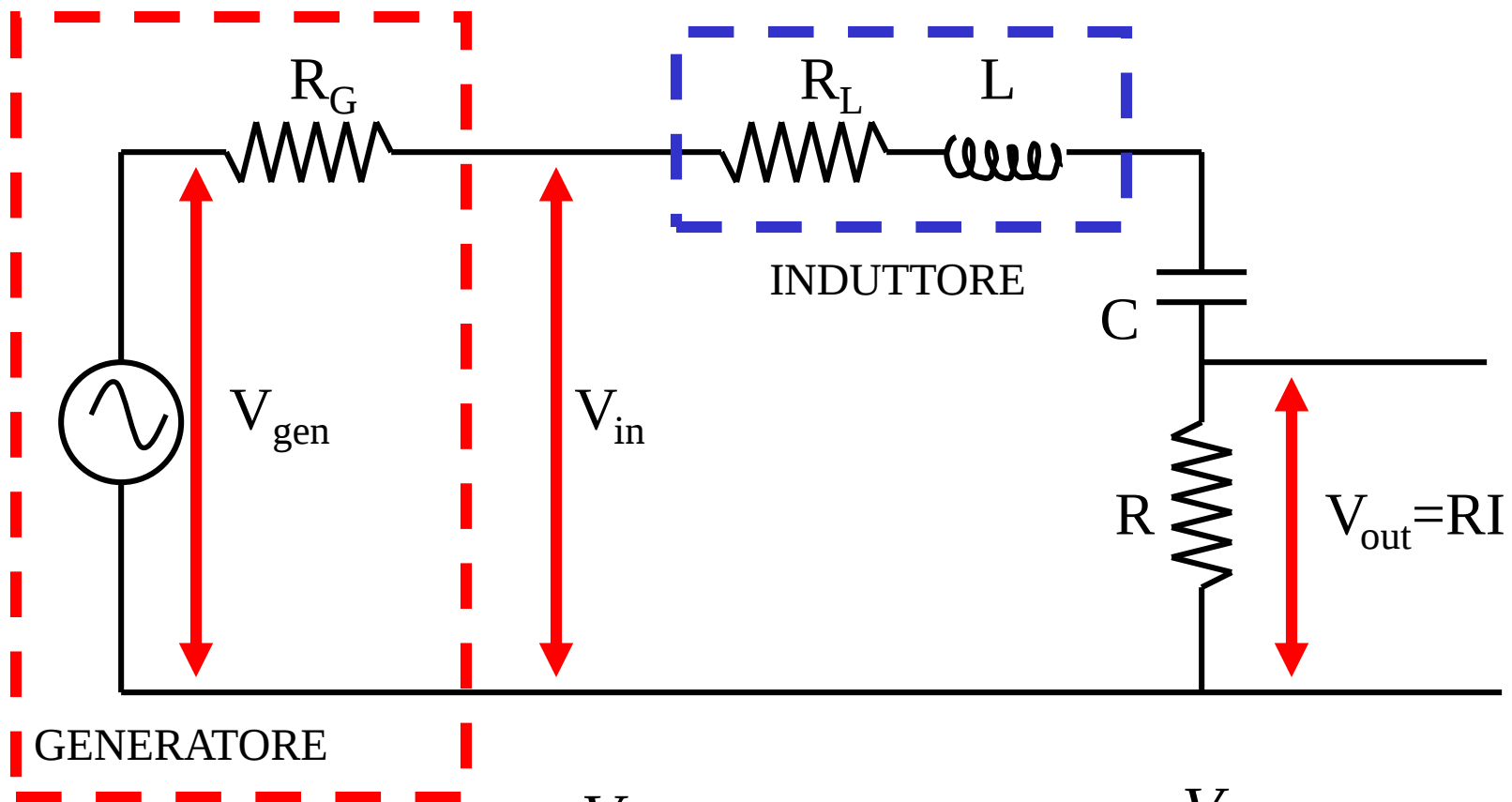
# Nota: Misura di $Q_o$

- Il  $Q_o$  che abbiamo definito si riferisce all'espressione della **corrente** nel circuito.
- La  $R$  che compare nell'espressione di  $Q_o$  è la resistenza totale del circuito, somma di
  - Resistenza interna del generatore
  - Resistenza interna dell'induttore
  - Resistenza reale
- La corrente che scorre nel circuito può essere valutata misurando  $V$  ai capi della resistenza reale e dividendo per il valore della resistenza reale.
- Da una curva di  $I$  in funzione della frequenza si valuta  $Q_o = f_o / \Delta f$

# Nota: Misura di $Q_0$



- In un circuito reale solo  $V_{in}$  e  $V_{out}$  sono misurabili,  $V_{gen}$  non lo è (almeno non direttamente).



$Q_o$  si valuta  
da questa

non da questa !

$$\frac{V_{out}}{R} = I_o = \frac{V_{gen}}{R_G + R_L + R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R_L + R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

## Nota2: se si vuole misurare $R_L$

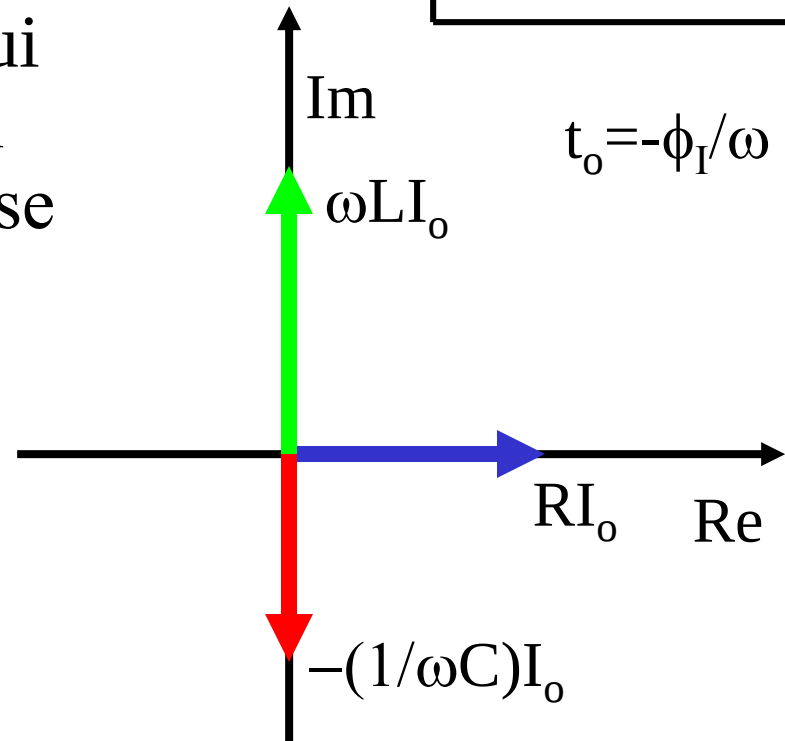
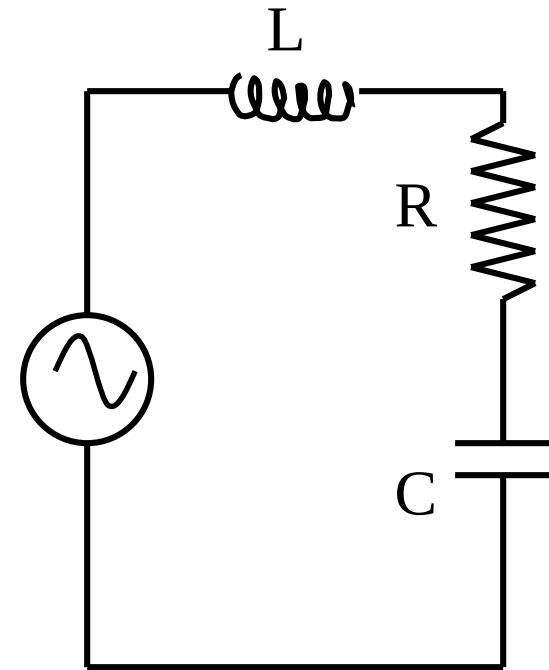
- Dalle misure di  $I$  si valuta  $Q_o = f_o / \Delta f$  e da questo la somma di  $R_L + R_G + R$ , da cui per sottrazione  $R_L$  (sapendo le altre due)
- Oppure, meglio
- Dalle misure di  $V_{out}/V_{in}$  alla risonanza:

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{RIS} = \frac{R}{R + R_L} \Rightarrow R_L = R \left[ \left. \frac{V_{in}}{V_{out}} \right|_{RIS} - 1 \right]$$

# Lo sfasamento

$$V_o e^{j\omega t} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \phi_I)}$$

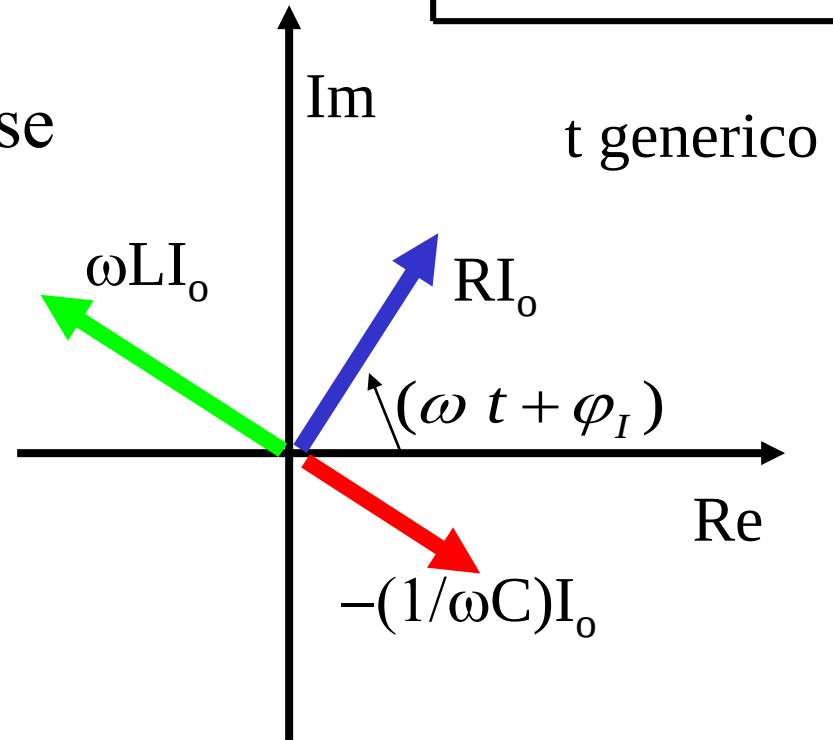
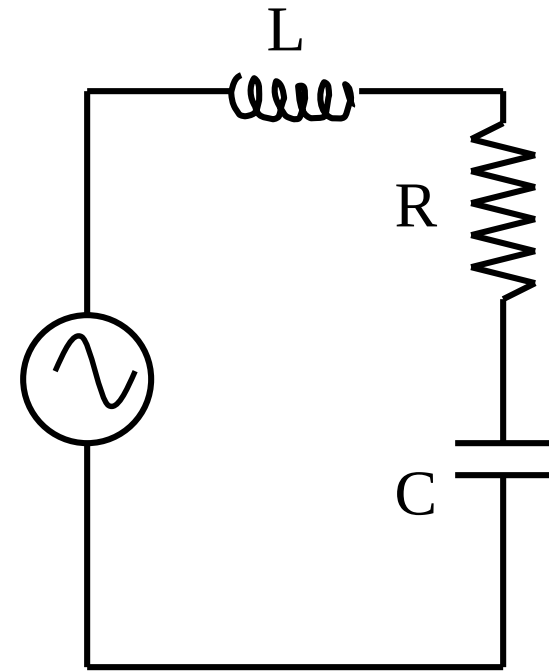
- Vediamo le tensioni ai capi di ciascun componente:
- I tre termini nell' equazione sopra sono delle tensioni, la cui parte reale e' la proiezione del fasore rappresentativo sull' asse reale del piano complesso.
- I tre vettori sono lunghi rispettivamente
- $I_o R$ ,  $I_o \omega L$ ,  $I_o / \omega C$



# Il circuito RLC serie

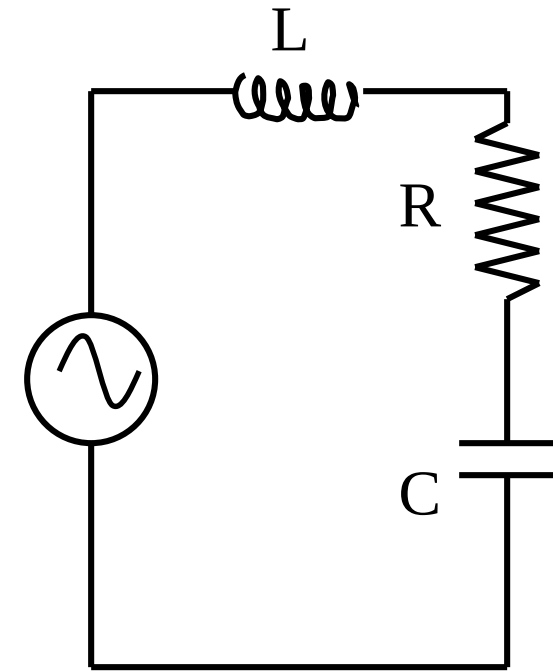
$$V_o e^{j\omega t} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- Vediamo le tensioni ai capi di ciascun componente:
- I tre termini nell'equazione sopra sono delle tensioni, la cui parte reale è la proiezione del fasore rappresentativo sull'asse reale del piano complesso.
- I tre vettori sono lunghi rispettivamente
- $I_o R$ ,  $I_o \omega L$ ,  $I_o / \omega C$
- Al passare del tempo ruotano mantenendo le stesse fasi relative

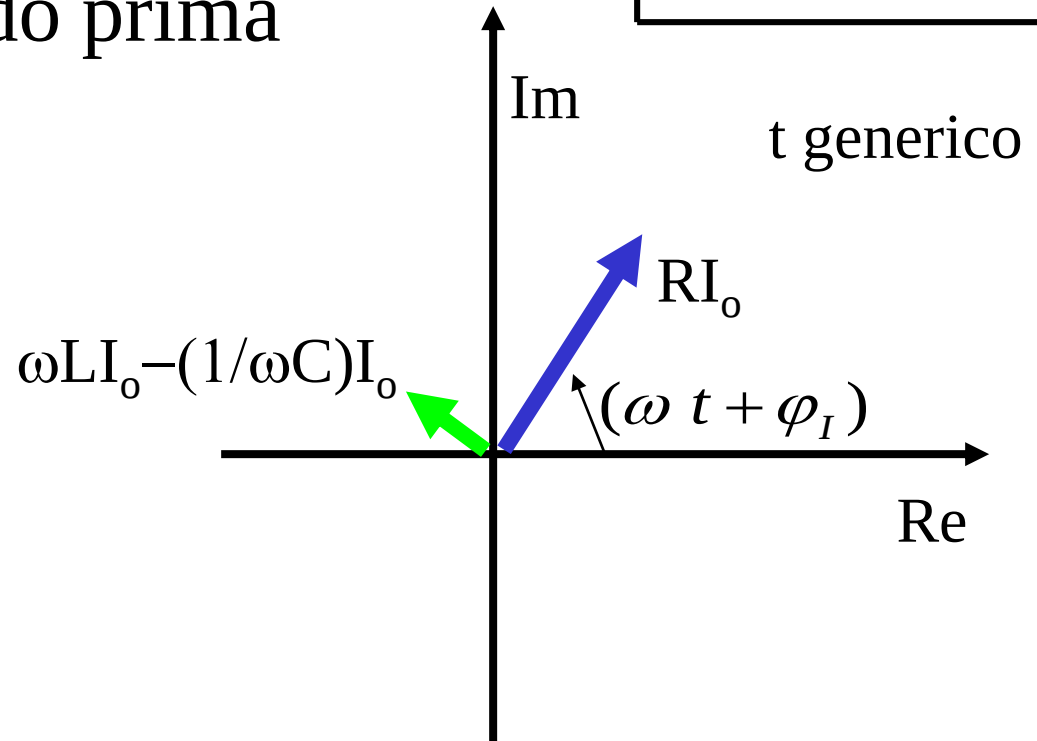


# Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$



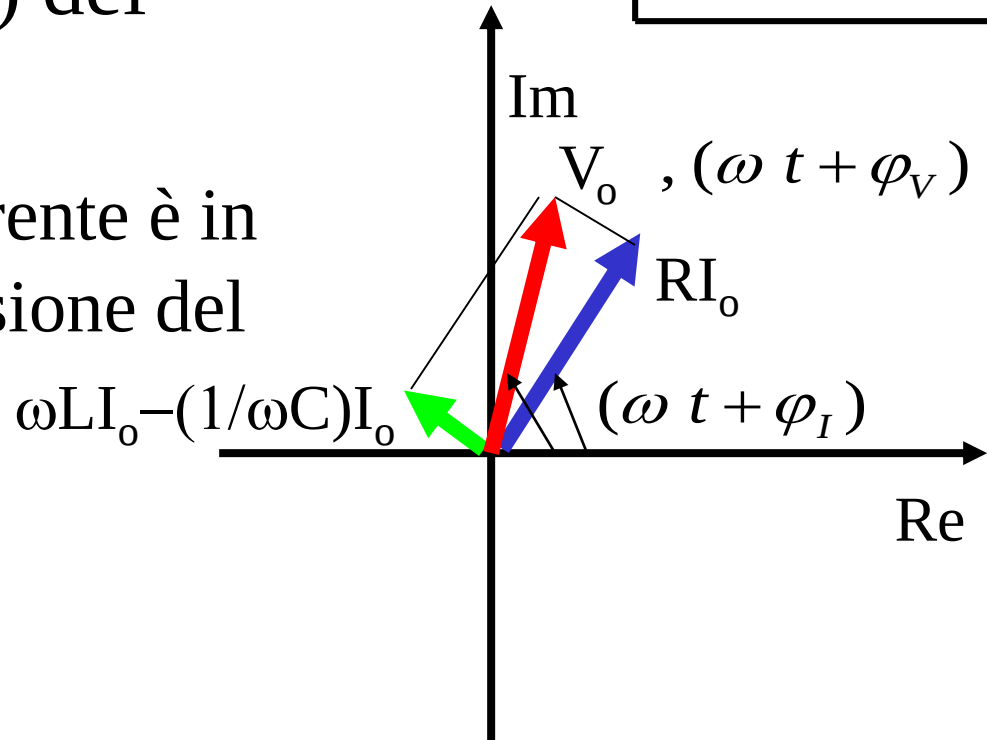
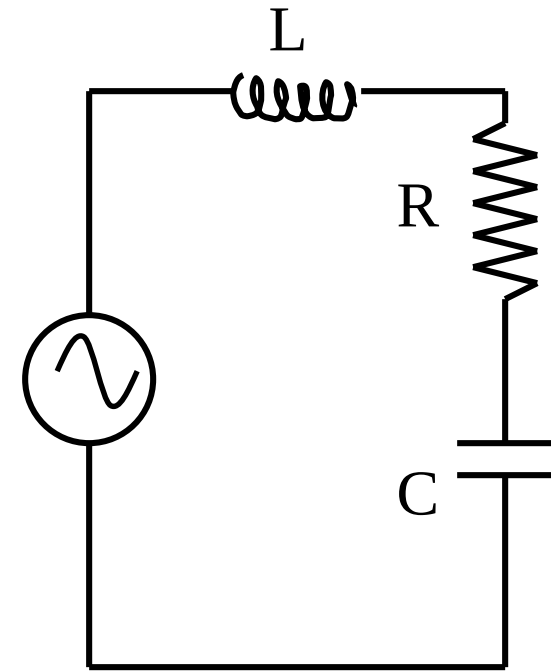
- La composizione dei vettori si può fare sommando prima i contributi di L e C:



# Il circuito RLC serie

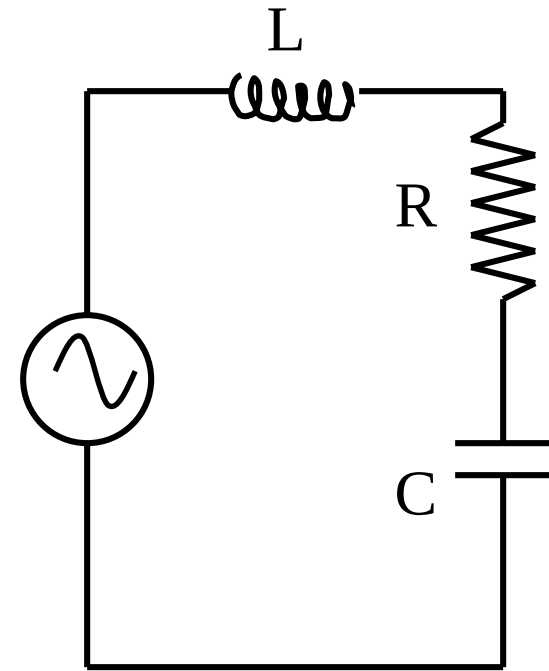
$$V_o e^{j\omega t} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- E poi trovando la risultante, che deve essere proprio la tensione (complessa) del generatore.
- Se  $\omega L > (1/\omega C)$ , la corrente è in ritardo rispetto alla tensione del generatore

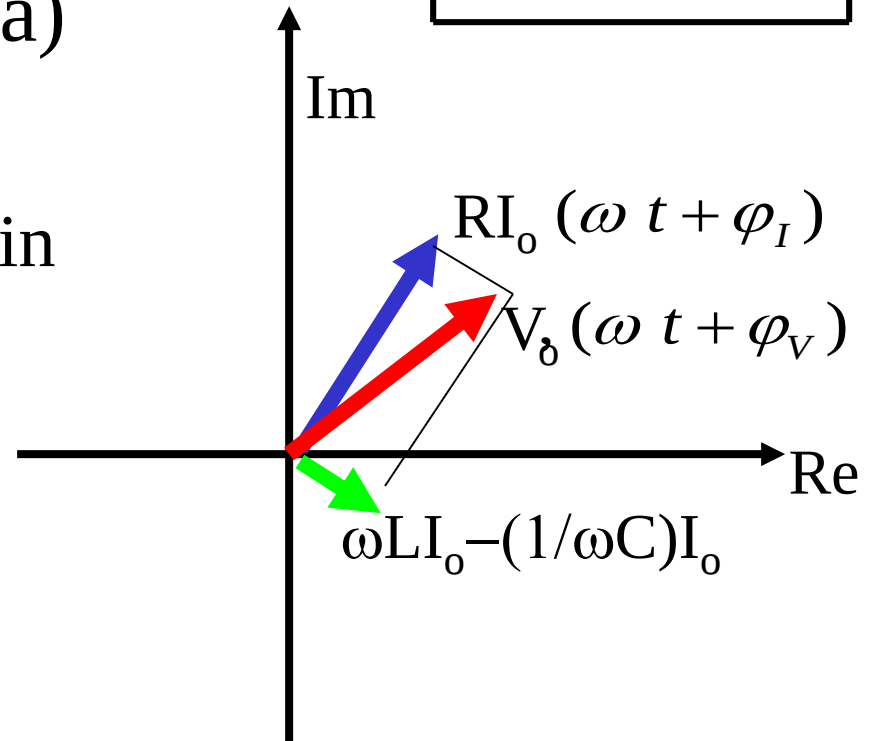


# Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$



- E poi trovando la risultante, cioè la tensione (complessa) del generatore.
- Se  $\omega L < (1/\omega C)$ , la corrente è in anticipo rispetto alla tensione



# circuito RLC serie

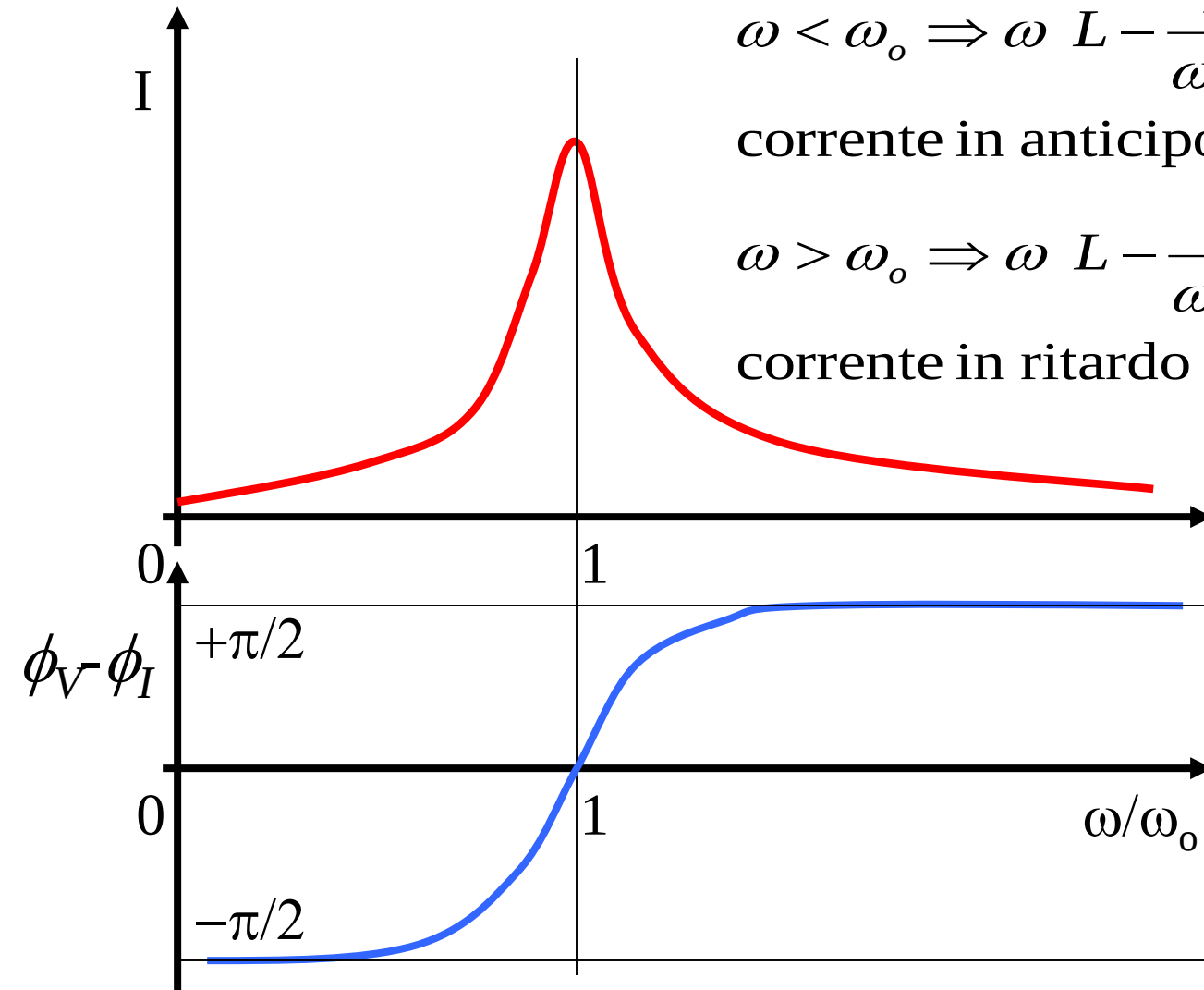
Sfasamento tra tensione e corrente:  $\varphi_V - \varphi_I = \arctan \left[ \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]$

$$\omega < \omega_o \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} < 0 \Rightarrow \varphi_V - \varphi_I < 0$$

corrente in anticipo rispetto alla tensione

$$\omega > \omega_o \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0 \Rightarrow \varphi_V - \varphi_I > 0$$

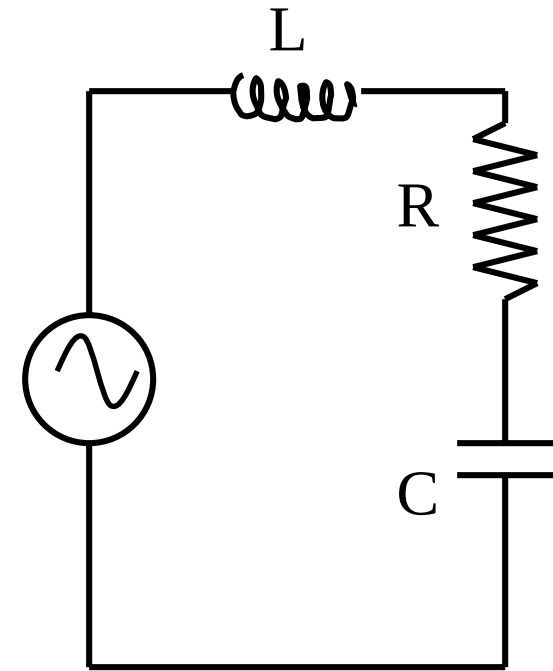
corrente in ritardo rispetto alla tensione



# Extratensioni

$$V_o e^{j\omega t} = \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \phi_I)}$$

- Vediamo i moduli delle tensioni ai capi di ciascun componente  
**reattivo:**



$$\vec{V}_C = \vec{Z}_C \vec{I} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \vec{V}_o}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$\vec{V}_L = \vec{Z}_L \vec{I} = \frac{j\omega L \vec{V}_o}{R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

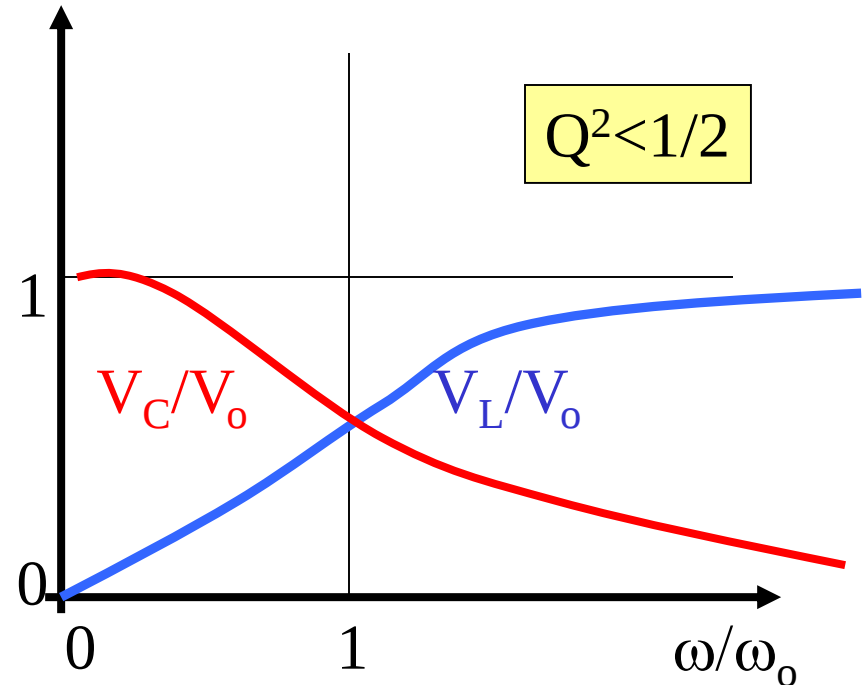
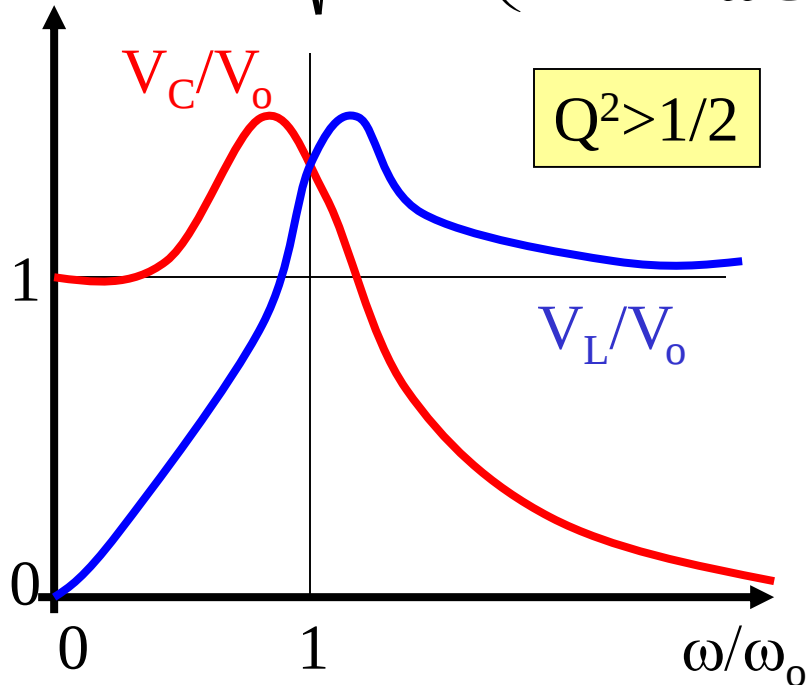
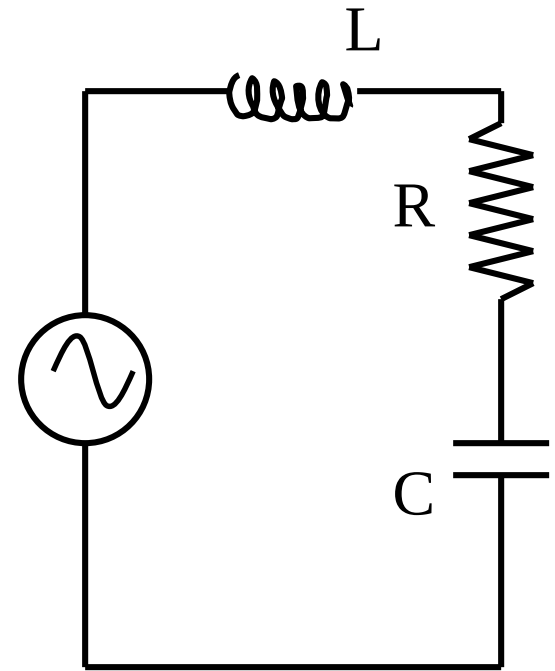
$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

# Il circuito RLC serie

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$



# Extratensioni

- Notare che, alla risonanza :

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \rightarrow \frac{V_C}{V_o} = \frac{1}{R\omega_o C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \rightarrow \frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

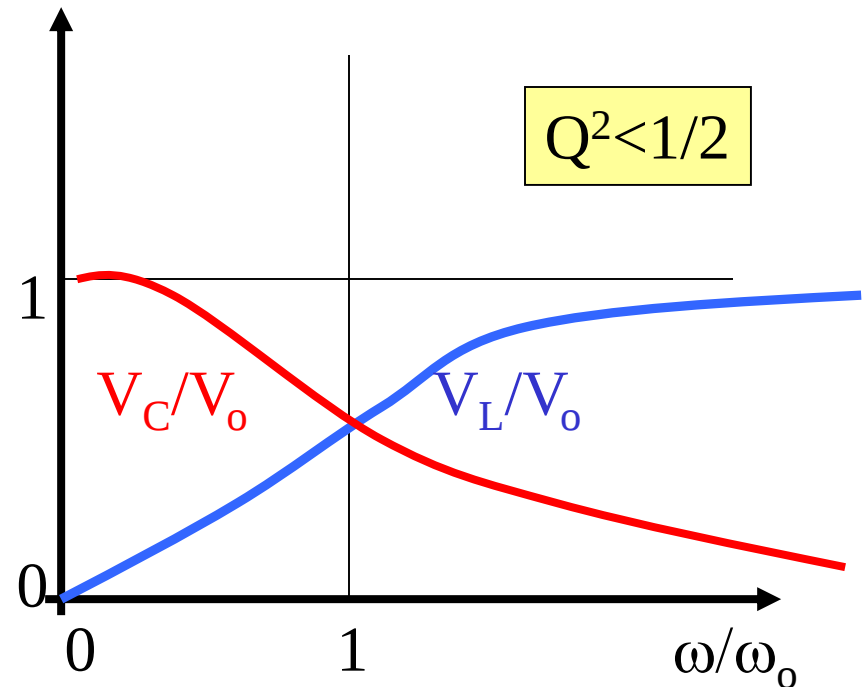
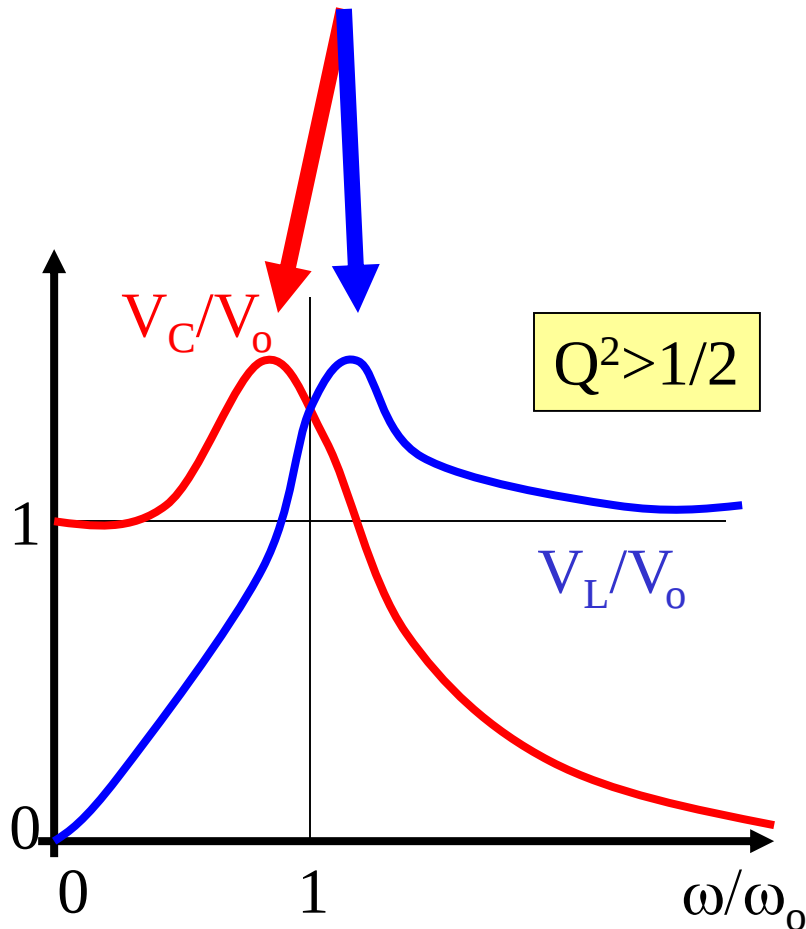
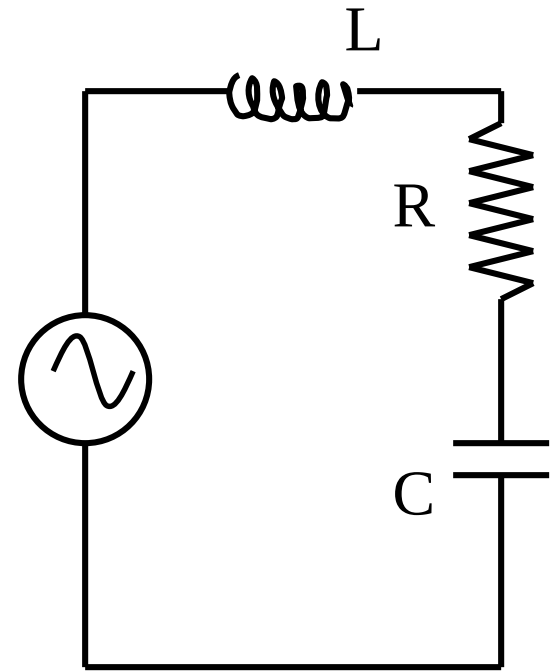
cioè la tensione ai capi di  $C$  e  $L$  è maggiore di quella di ingresso, di un fattore pari a  $Q_o$ .

- Va anche notato che, seppure le due tensioni su  $L$  e su  $C$  siano grandi, hanno fase opposta, e quindi si elidono istante per istante, e non fanno scorrere alcuna corrente, né nel resistore né nel generatore.

# Il circuito RLC serie

EXTRATENSIONI:

La tensione massima, però, si ha per una frequenza leggermente diversa da quella di risonanza.



# Il circuito RLC serie

Si può dimostrare che nei due casi

$$\omega_{\max}(V_L) = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{(RC)^2}{2}}} > \omega_o$$

$$\omega_{\max}(V_C) = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2} < \omega_o$$

