

- Torniamo alla teoria dei circuiti risonanti:
- I circuiti LC e RLC sono circuiti risonanti
 - senza smorzamento (LC)
 - con smorzamento (RLC)
- Abbiamo visto che l'oscillazione alla frequenza di risonanza avviene tramite una continua trasformazione di energia elettrica in magnetica e viceversa, in un tempo caratteristico determinato da L e C
- l'energia rimane costante se non c'è dissipazione ($R=0$) e l'oscillazione persiste.
- Nel caso che ci sia dissipazione ($R>0$) l'energia persa può venire rimpiazzata collegando il circuito a un generatore esterno (forzante), il che avviene con massima efficienza se il generatore produce corrente proprio alla frequenza di risonanza.

Fenomeni di Risonanza

- Già conosciuti in meccanica.
- Quando c'è un sistema che ha una frequenza propria di oscillazione ω_N , stimolandolo con una piccola forza oscillante con frequenza ω_F molto vicina a ω_N si può aumentare moltissimo l'ampiezza del moto.
- Equazione dell'oscillatore forzato:

$$\ddot{x} + \omega_S \dot{x} + \omega_N^2 x = a_{0F} \cos(\omega_F t)$$

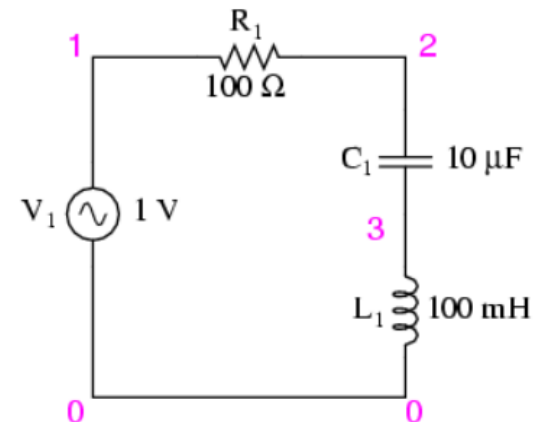
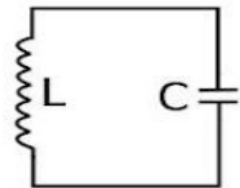
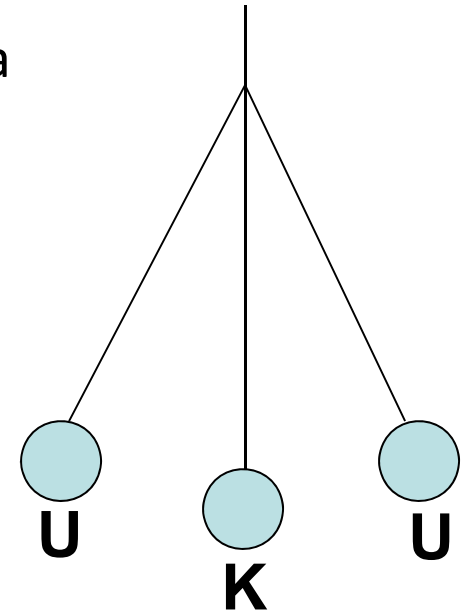
- Soluzione:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\omega_S}{2}t} \cos(\omega_S t + \phi) + B \cos(\omega_F t - \delta) \quad B = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_N^2 - \omega_F^2)^2 + \gamma^2 \omega_F^2}}$$

- Esempi pratici: l'altalena, il diapason, il bicchiere che suona, le corde "simpatiche" nella viola d'amore o nella chitarra a 12 corde ...

Caso elettrico

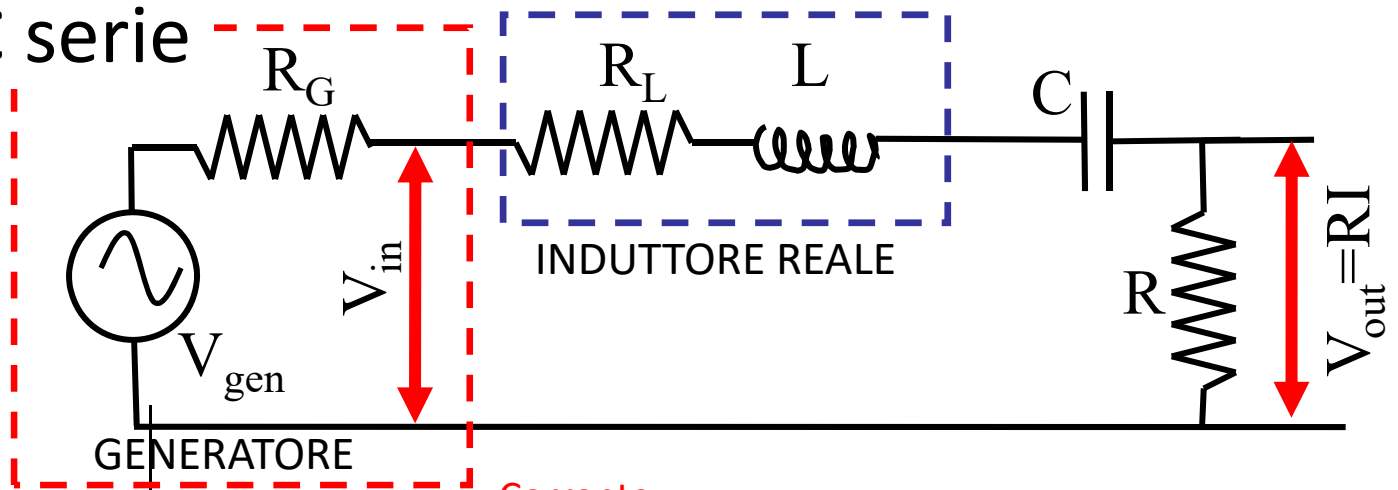
- L' oscillatore è un sistema in cui si converte l' energia da una forma a un' altra, e viceversa, alternativamente.
- Nel pendolo, da potenziale (all' estremo) l' energia diventa cinetica (nel punto più basso della traiettoria) e poi di nuovo potenziale (all' altro estremo) ... e così via.
- Nel caso elettrico se si connettono tra loro un induttore e un condensatore l' energia si trasforma alternativamente da elettrica (quando il condensatore è completamente carico, e non scorre corrente) a magnetica (quando scorre massima corrente nell' induttore e il condensatore è scarico) e di nuovo a elettrica quando il condensatore è di nuovo carico ... e così via.
- Il circuito avrà una sua frequenza di risonanza (come il pendolo ha la sua frequenza di oscillazione), e si potrà forzare il trasferimento di corrente collegando il circuito ad un generatore di corrente alternata.
- L' analogo della viscosità è la resistenza elettrica, che impedisce il libero trasferimento di cariche (e di energia).



circuito RLC serie

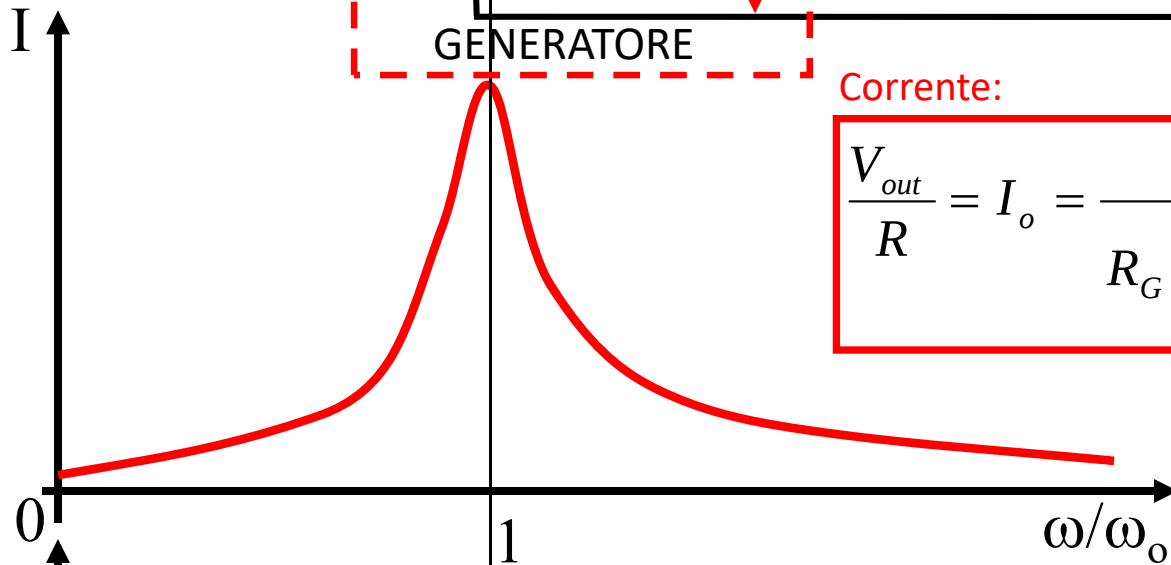
$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{f_o}{\Delta f}$$



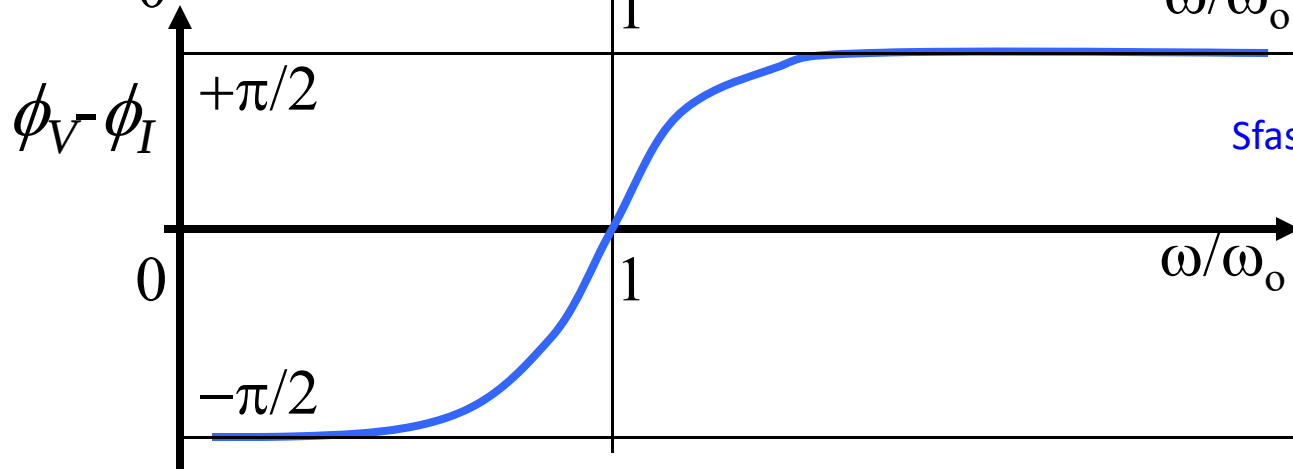
Corrente:

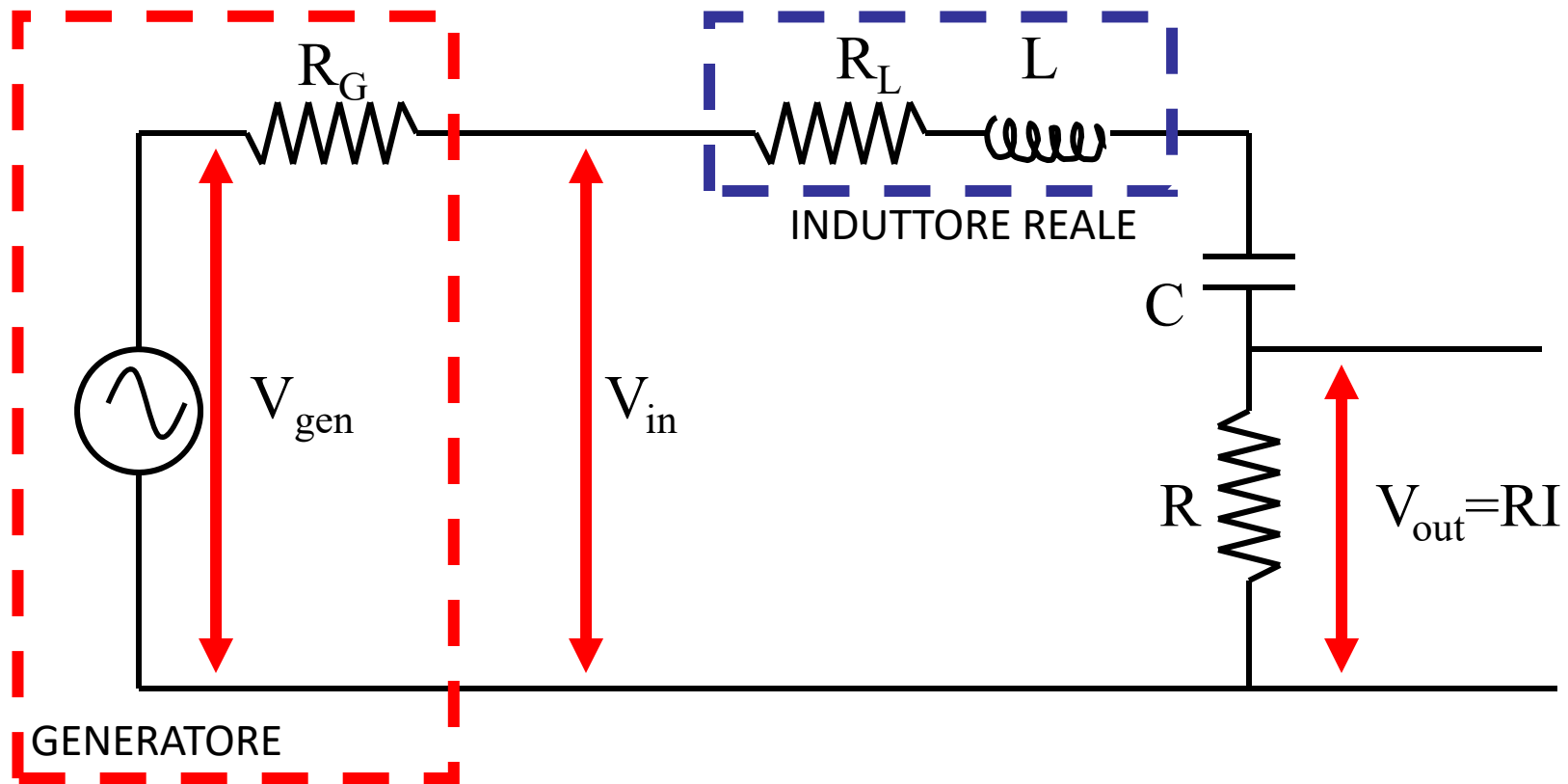
$$\frac{V_{out}}{R} = I_o = \frac{V_{gen}}{R_G + R_L + R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$



Sfasamento tra tensione e corrente:

$$\phi_V - \phi_I = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]$$





Q_o si valuta
da questa

non da questa !

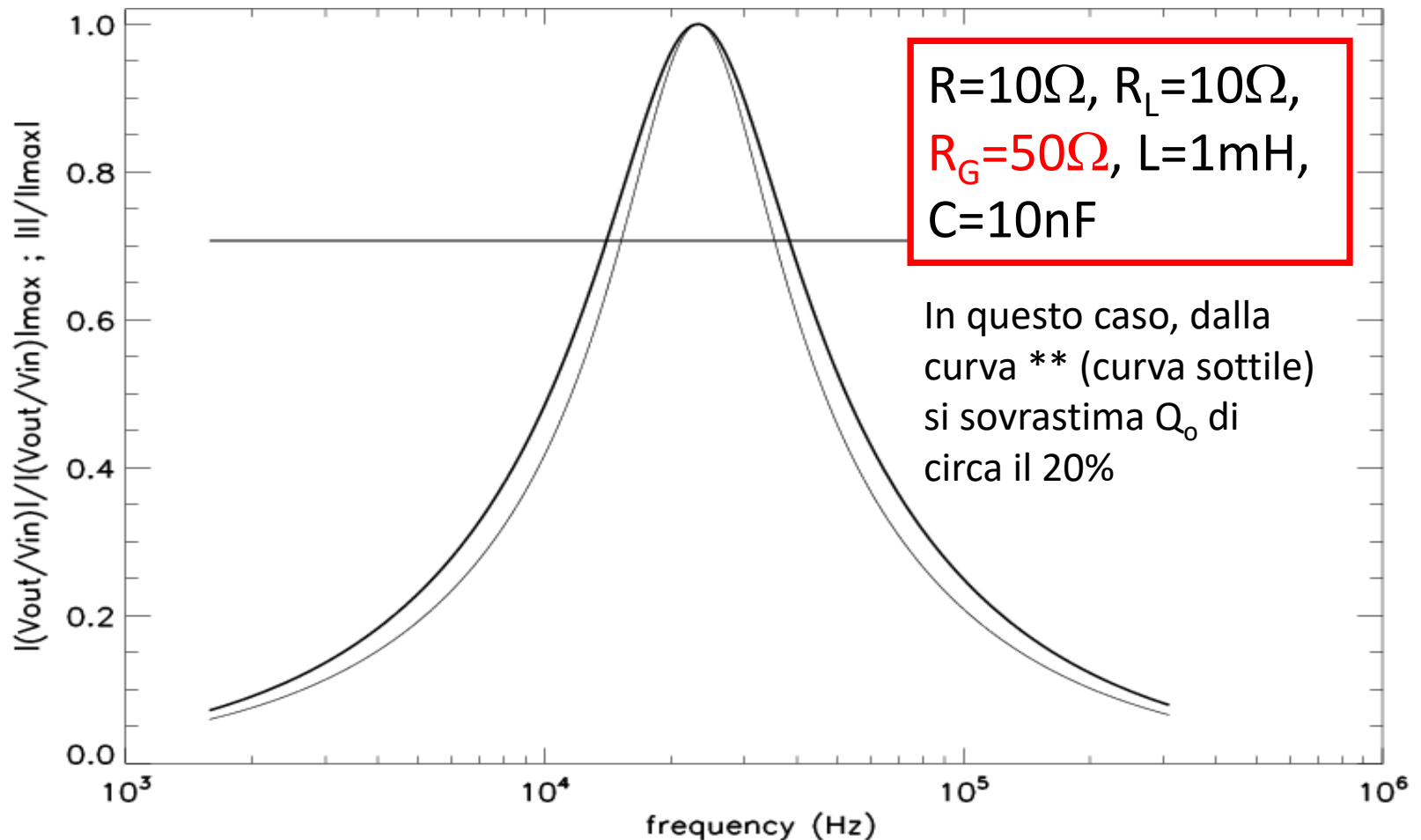
$$\frac{V_{out}}{R} = I_o = \frac{V_{gen}}{R_G + R_L + R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R_L + R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Differenza tra
le 2 formule:

$$* : \frac{V_{out}}{R} = I_o = \frac{V_{gen}}{R_G + R_L + R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$

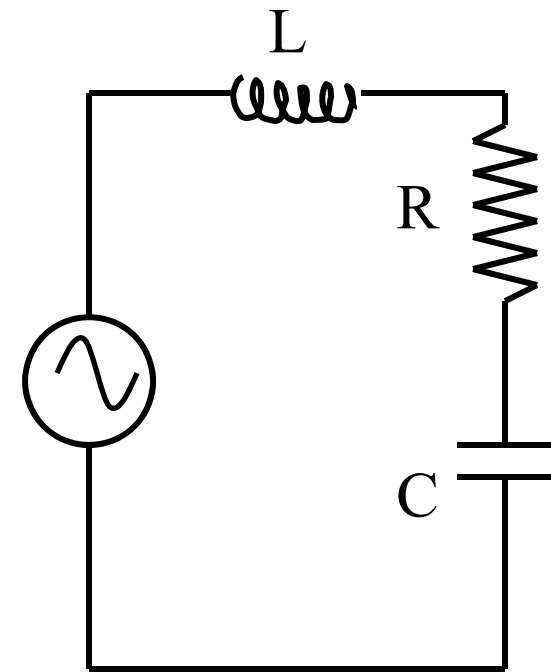
$$** : \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R_L + R + j(\omega L - 1/\omega C)}$$



Extratensioni

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- Vediamo i moduli delle tensioni ai capi di ciascun componente
reattivo:



$$\vec{V}_C = \vec{Z}_C \vec{I} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \vec{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$\vec{V}_L = \vec{Z}_L \vec{I} = \frac{j\omega L \vec{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

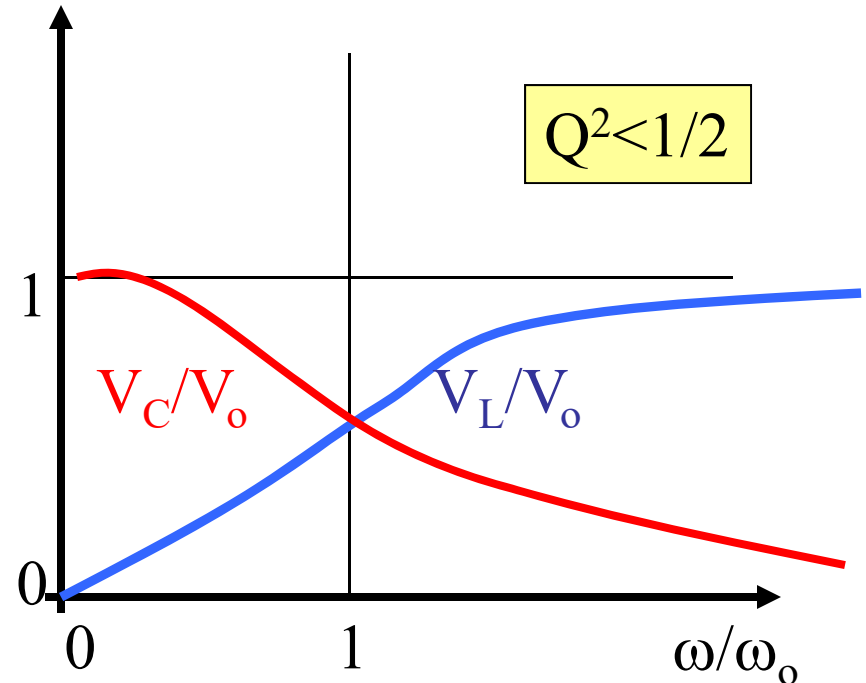
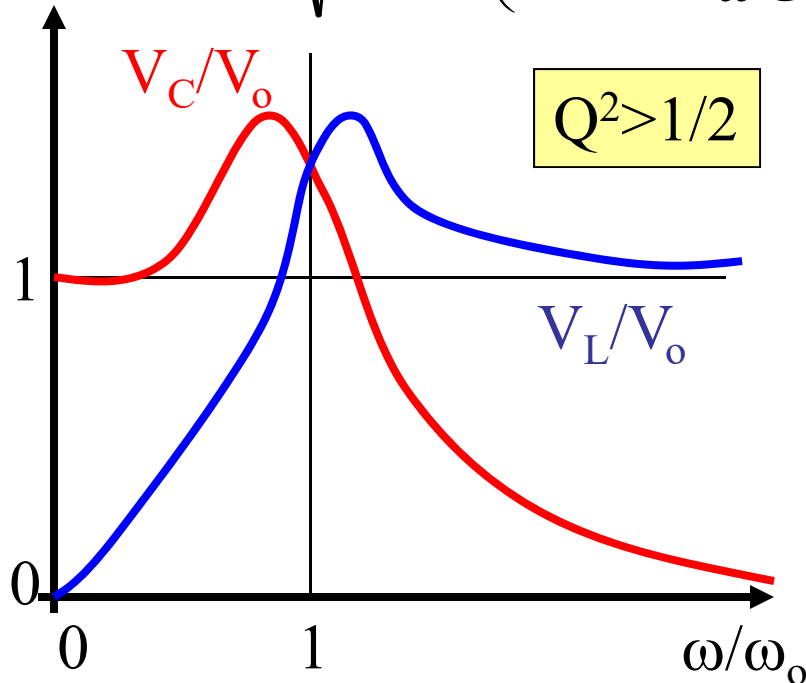
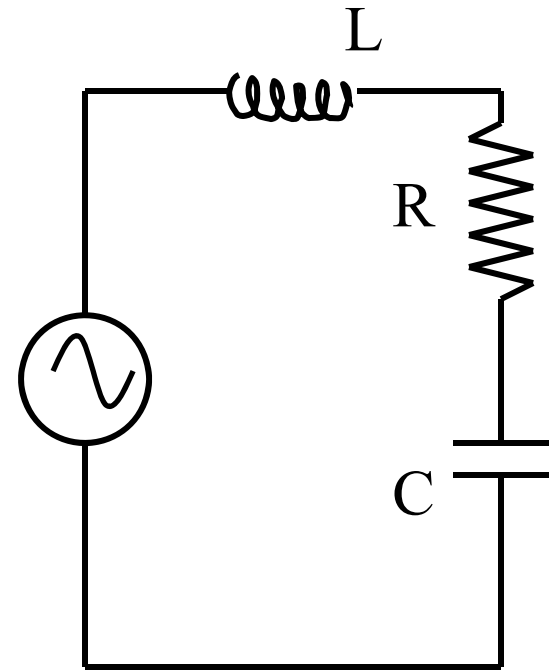
$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Il circuito RLC serie

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$



Extratensioni

- Notare che, alla risonanza :

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \rightarrow \frac{V_C}{V_o} = \frac{1}{R \omega_o C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \rightarrow \frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q_o$$

cioè la tensione ai capi di C e L è maggiore di quella di ingresso, di un fattore pari a Q_o .

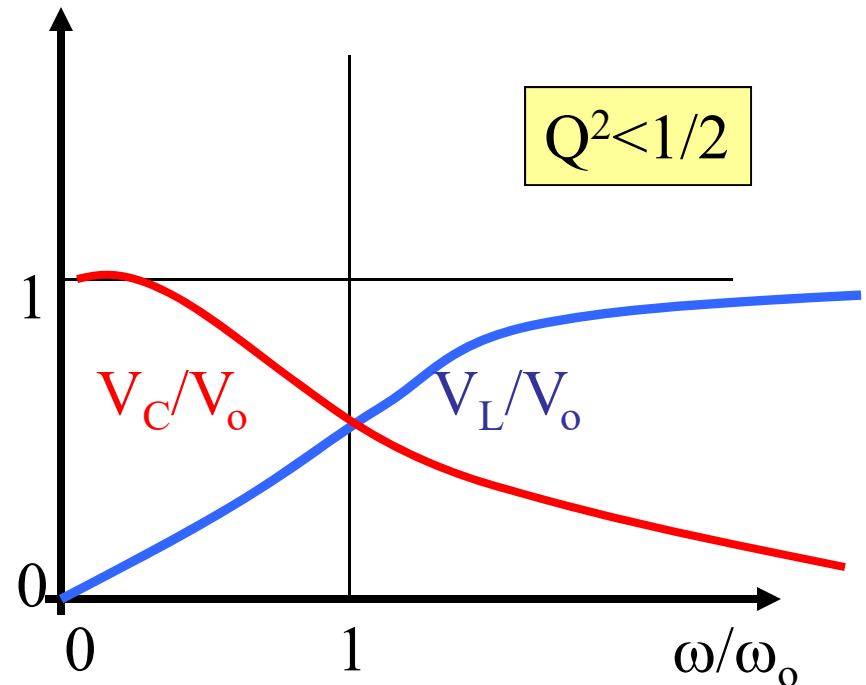
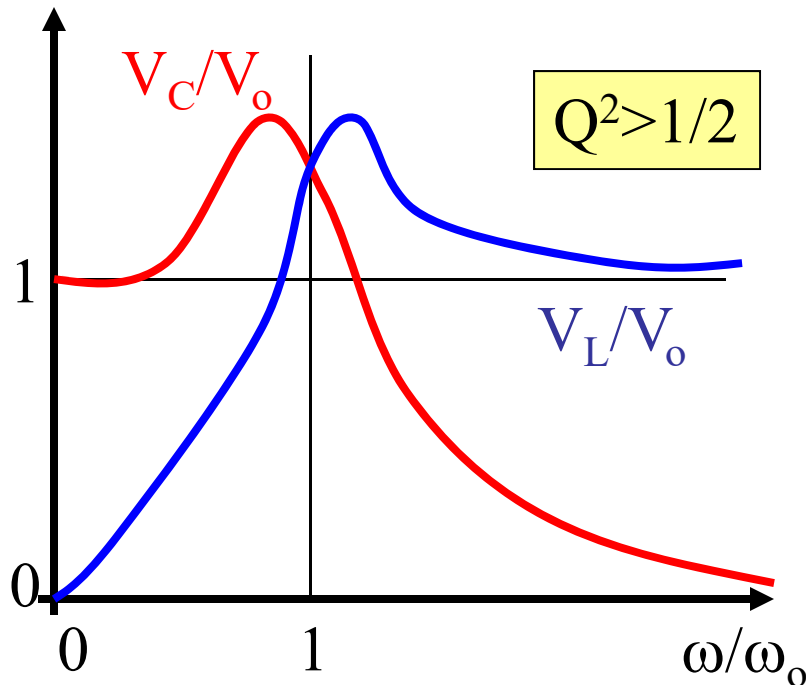
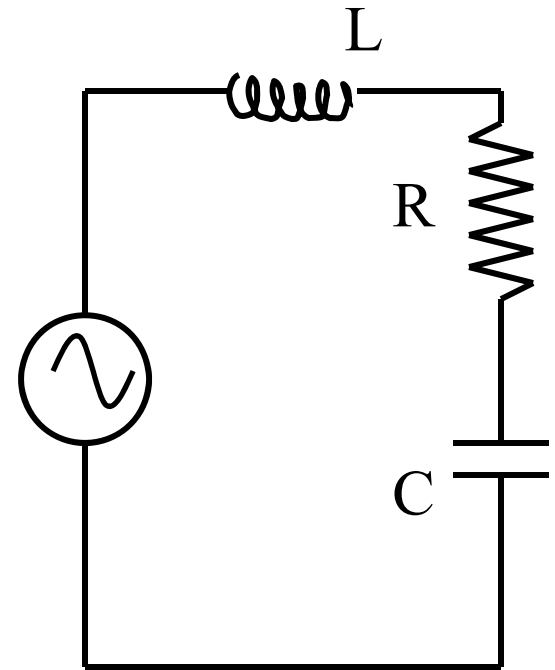
- Va anche notato che, seppure le due tensioni su L e su C siano grandi, hanno fase opposta, e quindi si elidono istante per istante, e non fanno scorrere alcuna corrente, né nel resistore né nel generatore.

Il circuito RLC serie

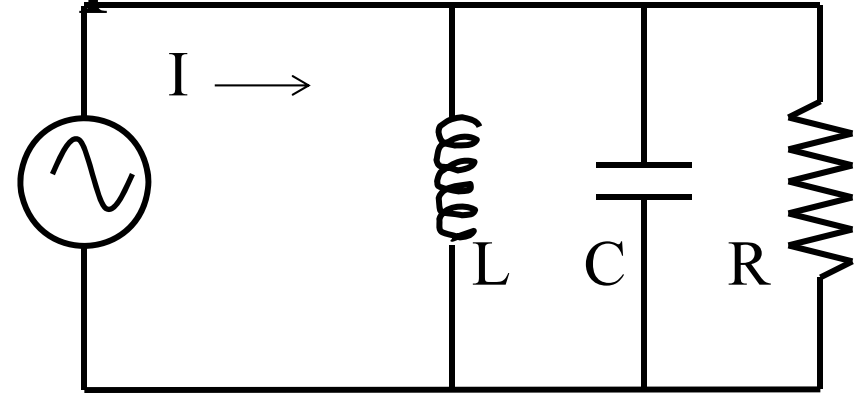
Si può dimostrare che, nei due casi:

$$\omega_{\max}(V_L) = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{(RC)^2}{2}}} > \omega_o$$

$$\omega_{\max}(V_C) = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2} < \omega_o$$



Il circuito RLC parallelo



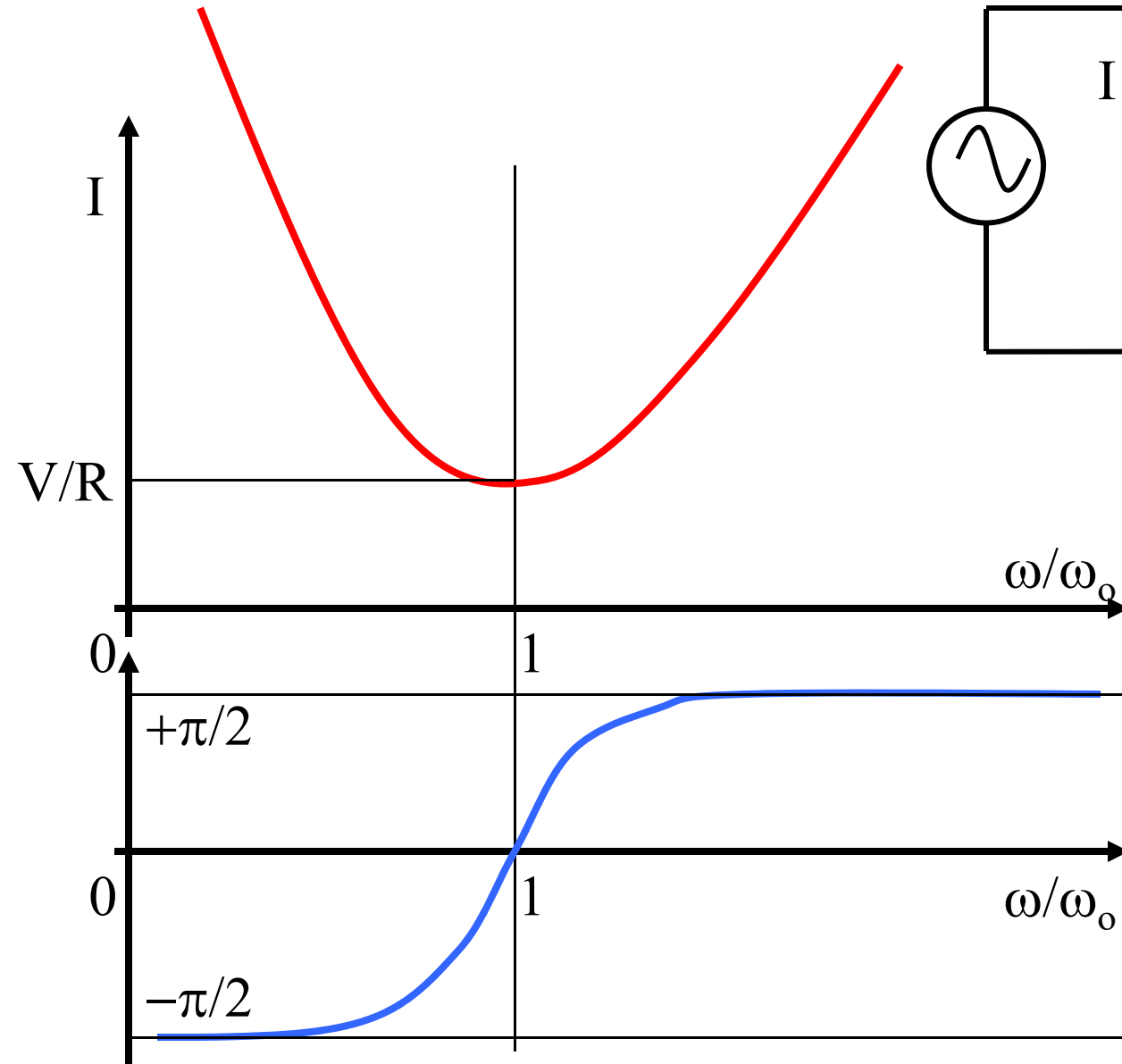
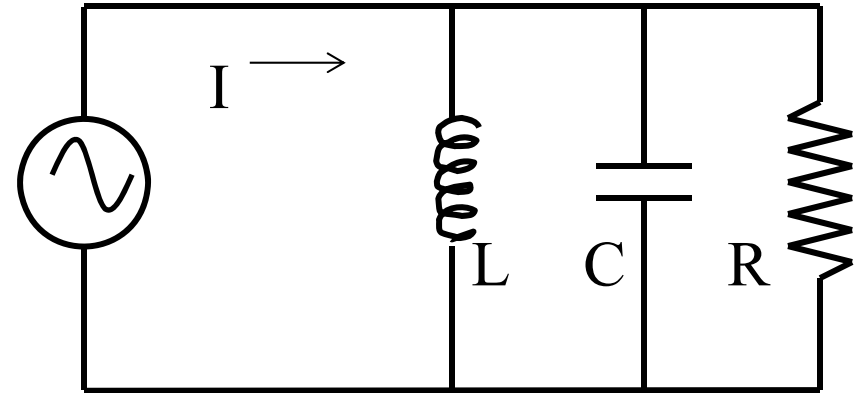
$$\frac{1}{\vec{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \left[\frac{1}{R} + j \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right] \right]$$

$$\vec{I} = \vec{V} \frac{1}{\vec{Z}} = \vec{V} \left[\frac{1}{R} + j \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right] \right]$$

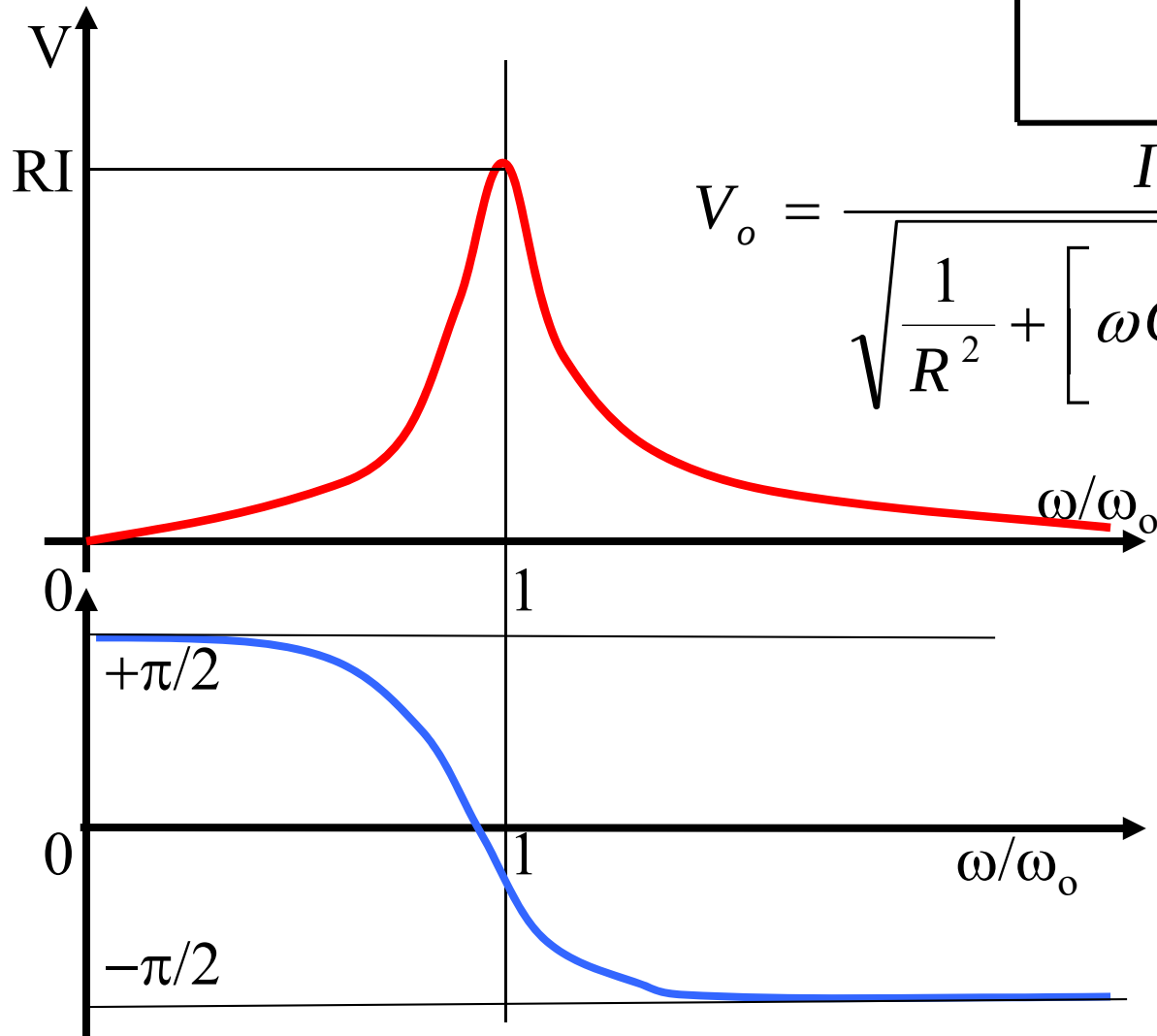
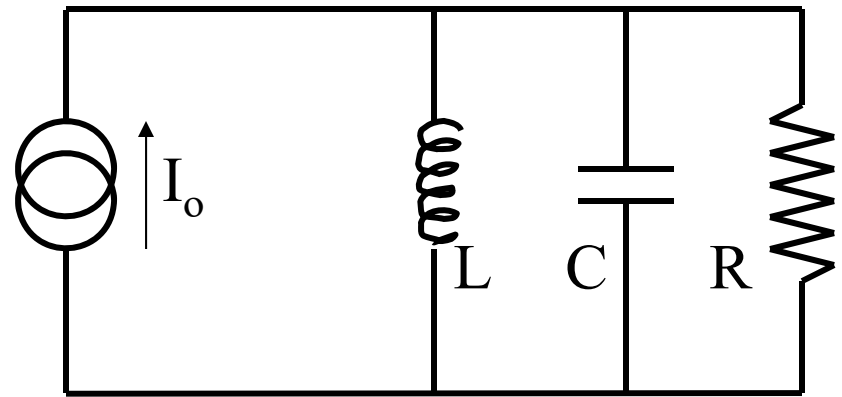
$$I_o = V_o \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right]^2}$$

$$\varphi = \arctg \left[\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) / (1/R) \right] = \arctg \left[\frac{1}{\omega \tau} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \right]$$

Il circuito RLC parallelo



Il circuito RLC parallelo



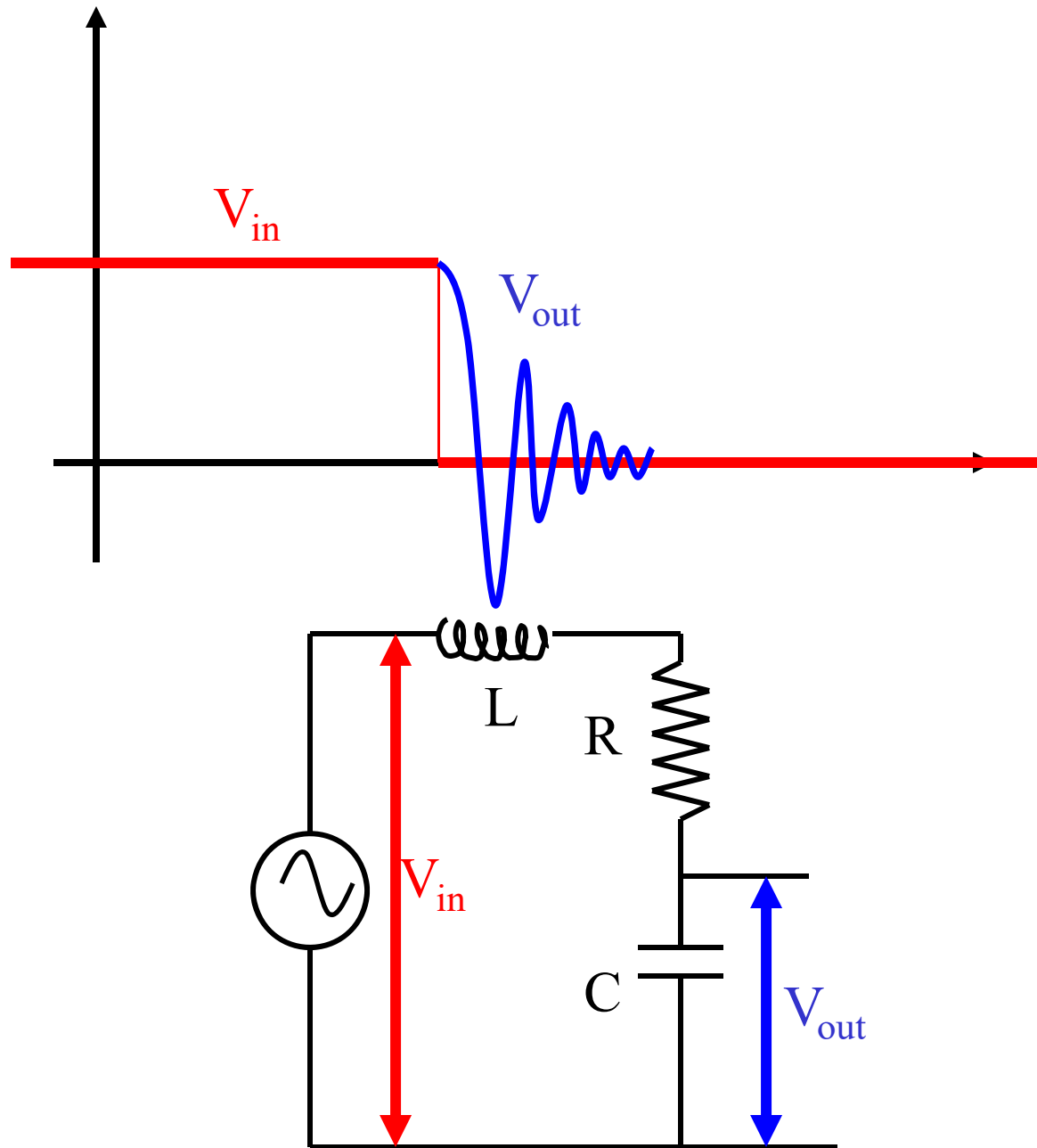
$$V_o = \frac{I_o}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right]^2}}$$

$$\varphi = \arctg \left[\left(-\omega C + \frac{1}{\omega L} \right) / (1/R) \right]$$

$$= \arctg \left[\frac{1}{\omega \tau} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right]$$

RLC con onda quadra

- Ovvero scarica di un condensatore in un circuito RLC, quando il periodo dell' onda quadra è molto più lungo dello pseudoperiodo dell' oscillazione smorzata.
- E' una situazione che capita spesso in elettronica digitale.



Carichiamo il condensatore fino a Q
e chiudiamo il circuito al tempo $t = 0$

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \gamma \frac{dQ}{dt} + \omega_o^2 Q = 0$$

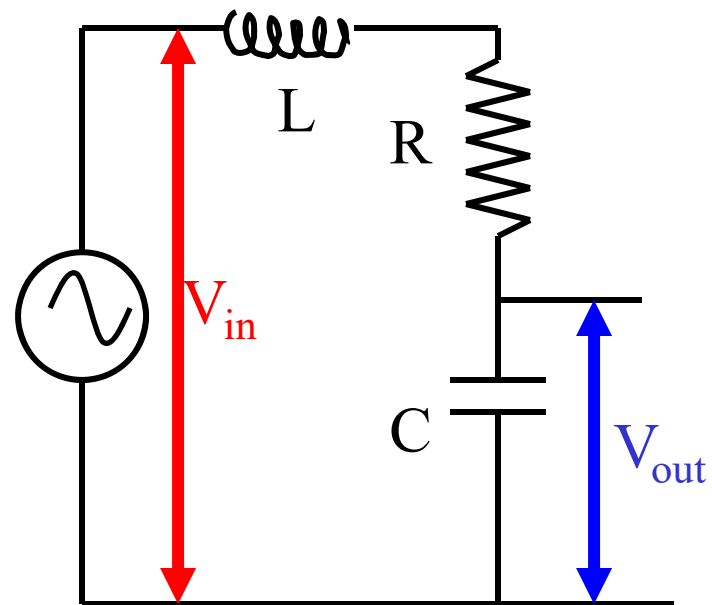
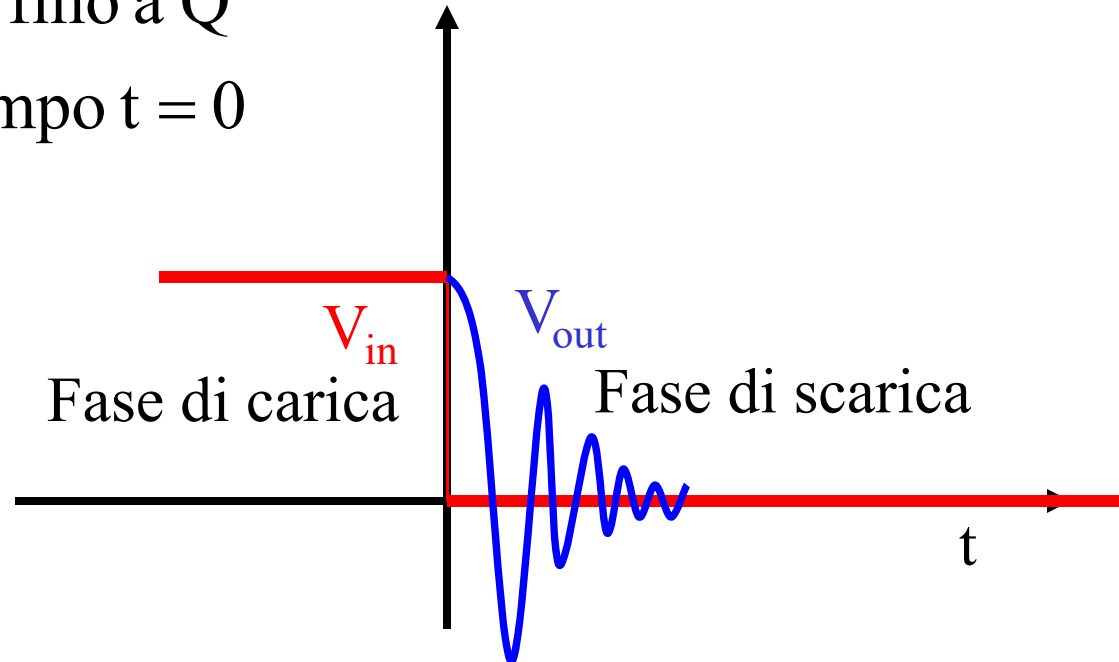
dove

$$\gamma = R/L \quad \text{e} \quad \omega_o = 1/\sqrt{LC}$$

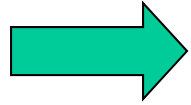
l'equazione caratteristica è

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_o^2 = 0$$

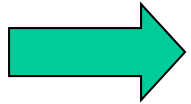
$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}$$



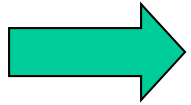
$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}$$



se l'integrando è positivo, la soluzione
è la somma di due esponenziali decrescenti :
soluzione sovrasmorzata



se l'integrando è nullo, soluzione a smorzamento
critico



se l'integrando è negativo, soluzioni complesse
coniugate :

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm j\omega_1 \quad \text{con} \quad \omega_1^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

ω_1 è detto pseudoperiodo;

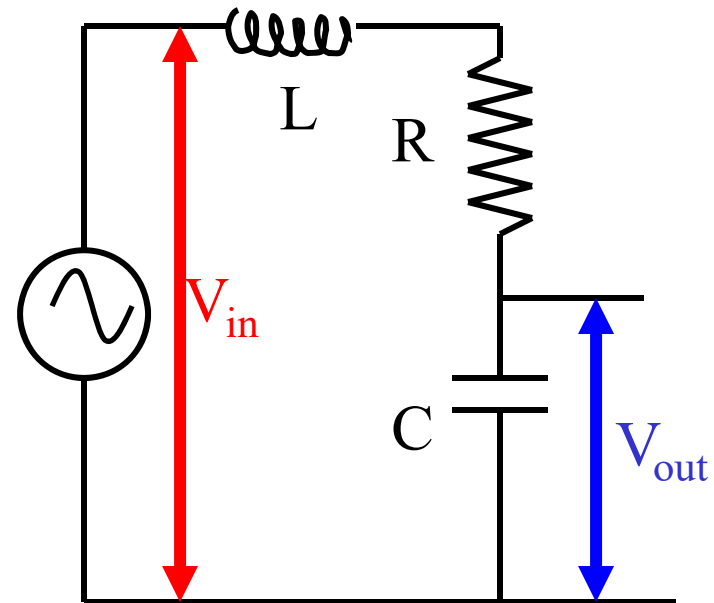
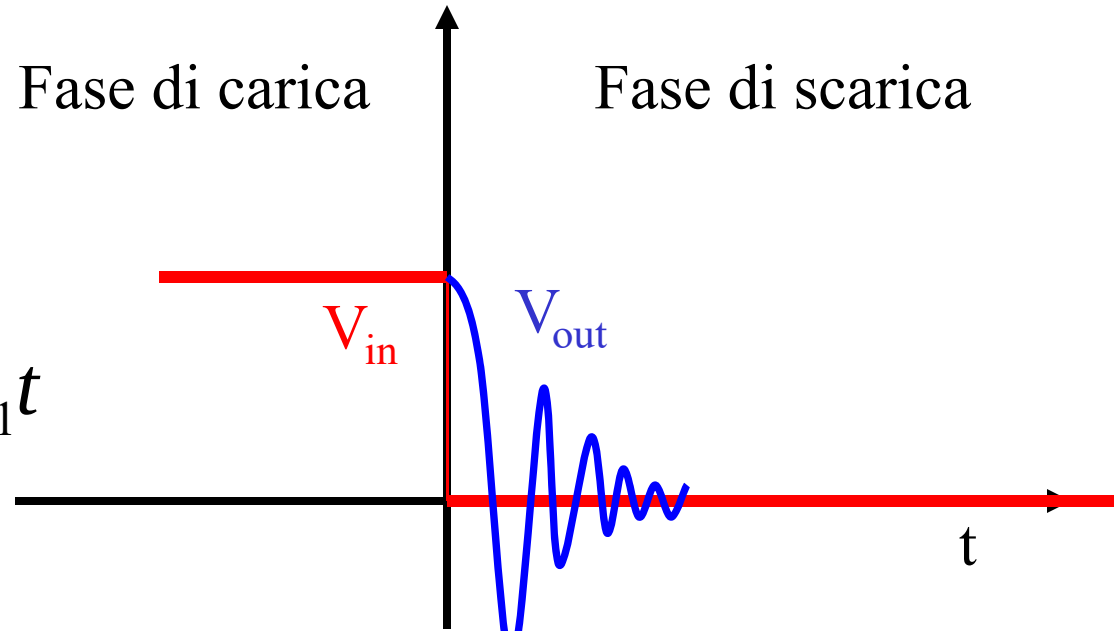
la soluzione è

$$Q = Q_o e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$$

$$Q = Q_o e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$$

$$V_{out}(t) = \frac{Q_o}{C} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$$

Nell'esperienza
sull'RLC
visualizzerete
questa forma
d'onda e
misurerete lo
pseudoperiodo



Esperienza 3 : circuiti RC e CR

Corso di Laboratorio di Elettromagnetismo e Circuiti, prof. S. Masi

1 MISURE DI RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN CIRCUITO RC

Si hanno a disposizione un generatore di tensione sinusoidale con frequenza f e ampiezza V_{in} variabili, un resistore di resistenza R e un condensatore di capacità C , un oscilloscopio.

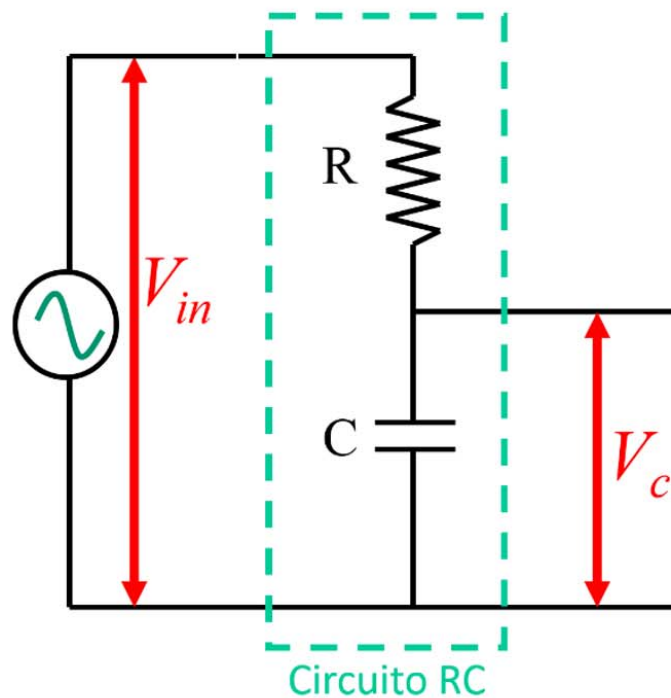
Lo scopo dell'esperienza è di misurare la risposta in frequenza del circuito RC visibile in figura, utilizzato come filtro passa-basso. Dalla teoria sappiamo che

$$\vec{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oC} = \frac{V_{oin}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi = \arctan(-\omega\tau)$$

Dove V_{oC} e V_{oin} sono i moduli delle due tensioni alternate, ω è la loro pulsazione ($f = \omega/2\pi$), e ϕ è lo sfasamento della V_c rispetto alla V_{in} . Per risposta in frequenza si intendono i grafici della funzione V_{oC}/V_{oin} in funzione di f , e della funzione ϕ in funzione di f . La costante di tempo τ è pari al prodotto RC.



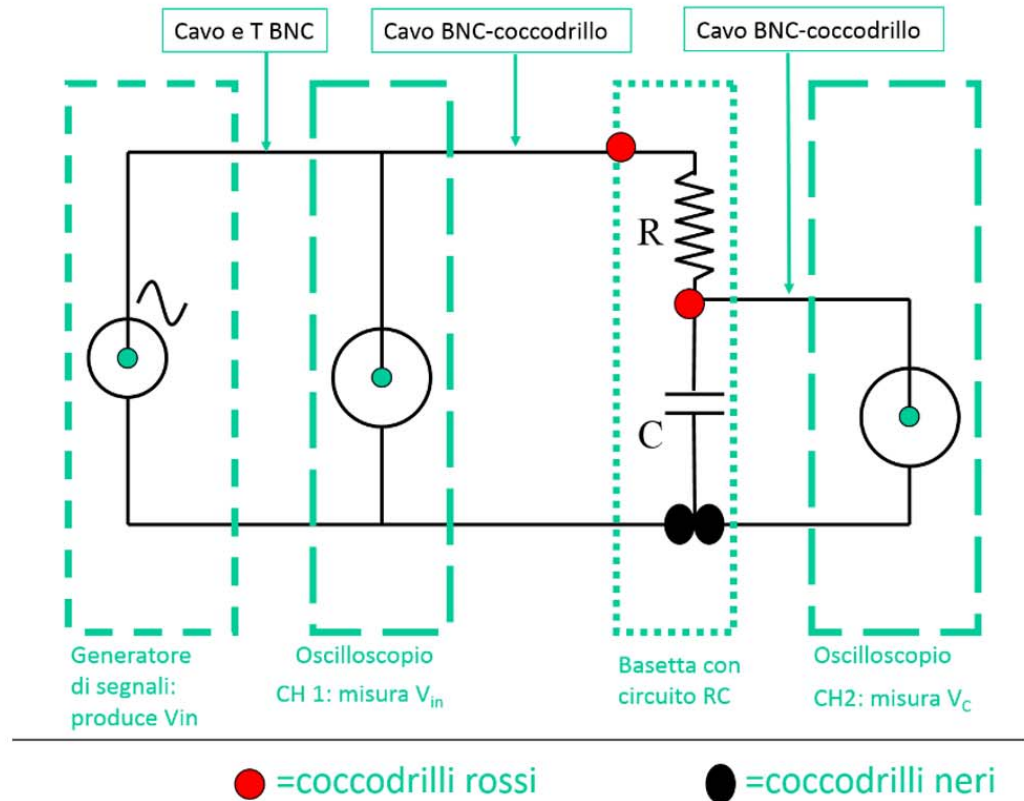
Consiglio una frequenza di taglio $f_o = \omega_o / 2\pi$ dell'

ordine di 1000 Hz, in modo da poter agevolmente impostare sul generatore di tensione sia frequenze più basse che frequenze più alte della frequenza di taglio del circuito. Qui ω_o è tale da rendere la risposta $V_{oc}/V_{oin} = 1/\sqrt{2}$, quindi $\omega_o = 1/\tau = 1/RC$ e $f_o = \omega_o / 2\pi = 1/(2\pi RC)$.

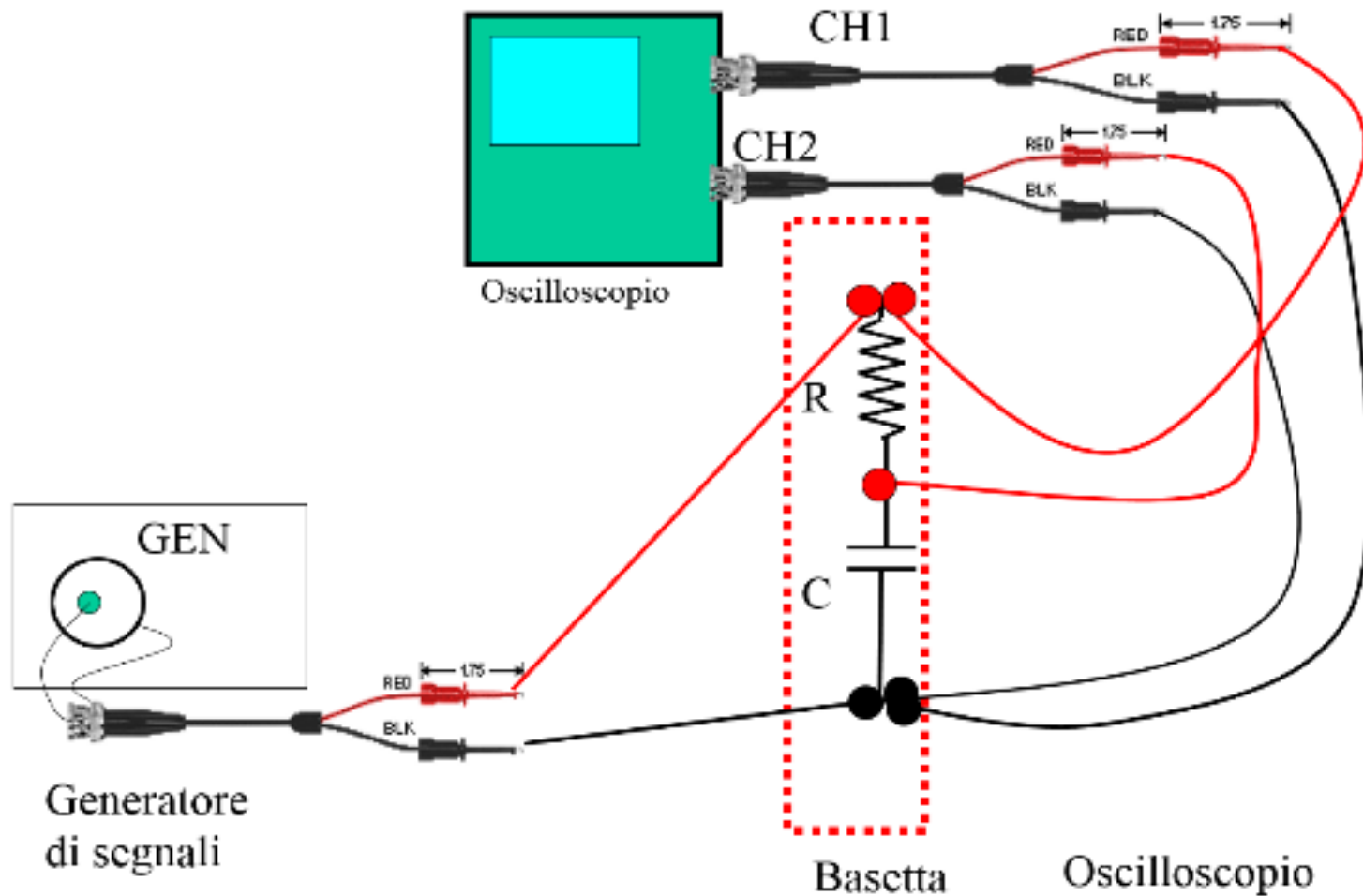
Ad esempio: $R=10k\Omega$, $C=10nF$, $f_o=1.6kHz$.

La prima cosa da fare è stimare la frequenza di taglio del circuito, f_o , dai valori di R e C, che si possono misurare con il ponte a disposizione.

Si passa poi al montaggio del circuito. Le connessioni da realizzare in pratica sono illustrate nella figura accanto.



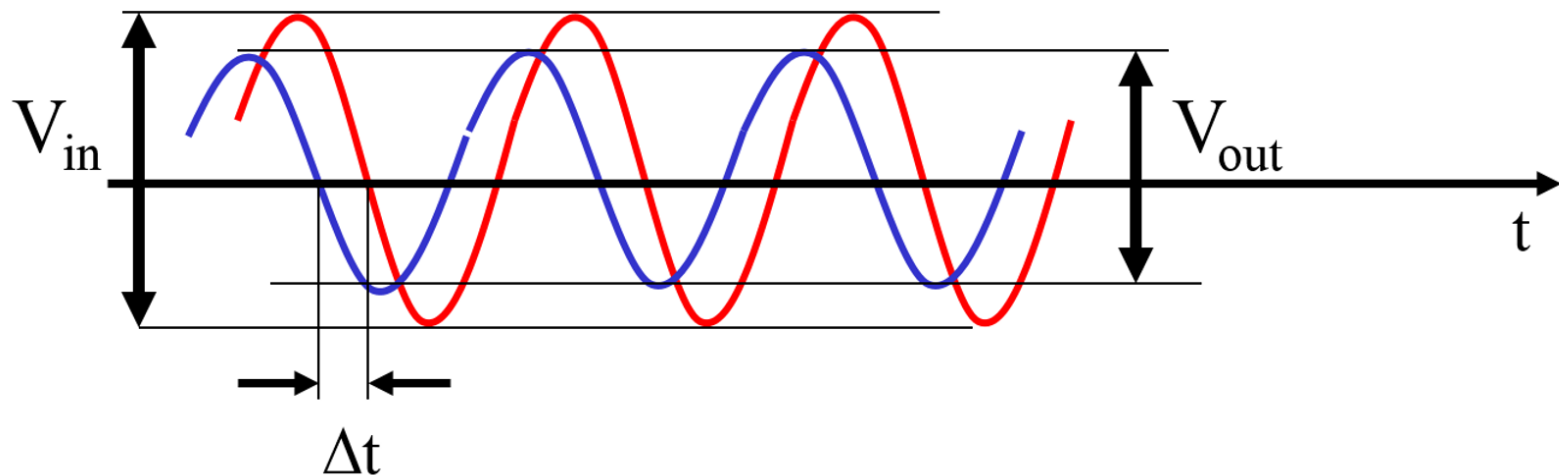
Montaggio pratico



Si deve poi fare una scansione veloce osservando l'ampiezza del segnale in uscita quando la frequenza del generatore varia da $0.1f_o$ a $10f_o$, in modo da vedere se c'è davvero una sua riduzione (taglio) al di sopra della frequenza di taglio, mentre l'ampiezza del segnale in ingresso deve rimanere costante. Se non c'è il taglio, il circuito non è stato montato bene, e quindi non si deve cominciare a fare le misure di risposta in frequenza finché non si trova l'errore nel montaggio. Quando succede quello che ci si aspetta, si procede alle misure.

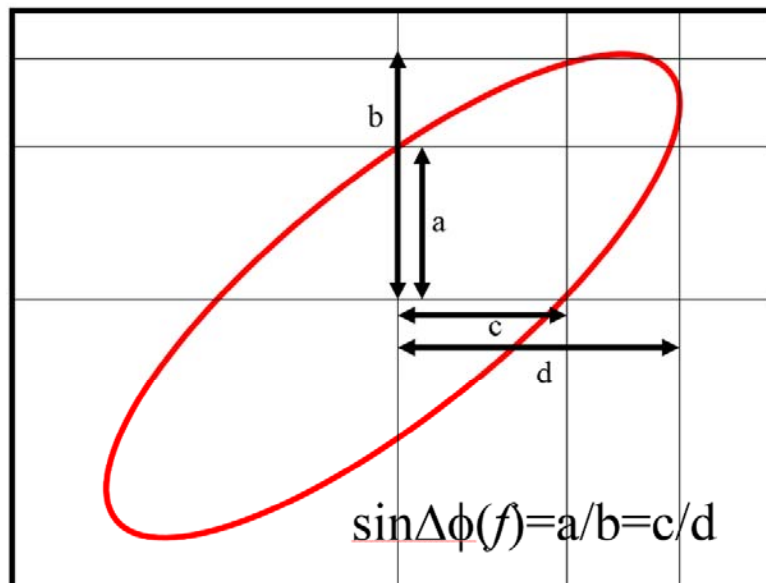
Le misure devono essere effettuate su un ampio intervallo di frequenze, possibilmente da $f_o/100$ a $f_o * 100$, in modo da evidenziare la forte riduzione dell'ampiezza ed il forte sfasamento del segnale in uscita a frequenze molto più alte di quella di taglio, e la pratica identità tra il segnale in uscita e quello in ingresso a frequenze molto più basse di quella di taglio.

Visualizzando V_C e V_{in} in funzione del tempo (vedi figura sotto, ricordarsi di azzerare le due tracce sulla metà dello schermo mettendo a GND i due ingressi) si costruisce una tabella di f , V_{in} , $V_C = V_{out}$, Δt . Da queste misure si ricavano le altre due colonne per $A(f) = V_{out}/V_{in}$ e $\phi(f) = 2\pi \Delta t/T$, sulle quali va propagato l'errore di lettura di V_{in} , V_C , Δt , e che vanno graficate.



Dai grafici si ricava il valore della frequenza di taglio: da quello del rapporto tra i moduli, stimando a che frequenza questo viene ridotto di 0.707; da quello dello sfasamento stimando a che frequenza è pari a 45°.

Visualizzando poi V_{out} in funzione di V_{in} (modalità XY, ricordarsi di centrare il puntino luminoso mettendo a GND i due ingressi all' inizio, vedi figura a lato) si costruisce una tabella di f , a , b . Si ricava poi $\phi(f) = \arcsin(a/b) = \arcsin(c/d)$, e si grafica, ottenendo un'ulteriore valutazione della frequenza di taglio.



2 MISURE DI RISPOSTA IN FREQUENZA DI UN CIRCUITO CR

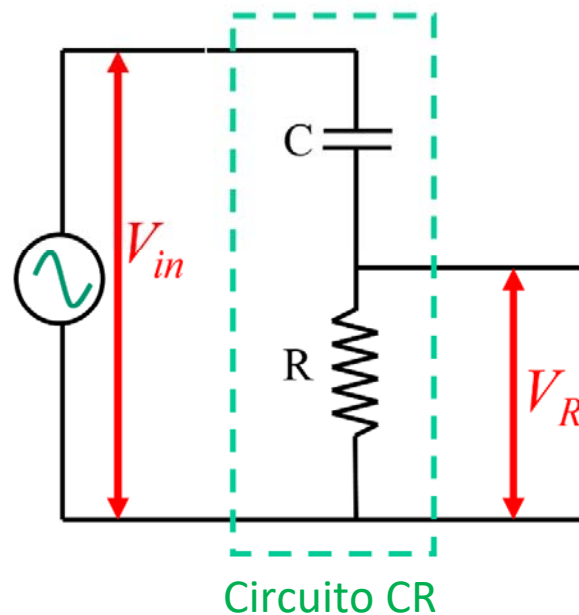
Questo circuito si ottiene dal precedente scambiando di posto R e C. Dalla teoria sappiamo che

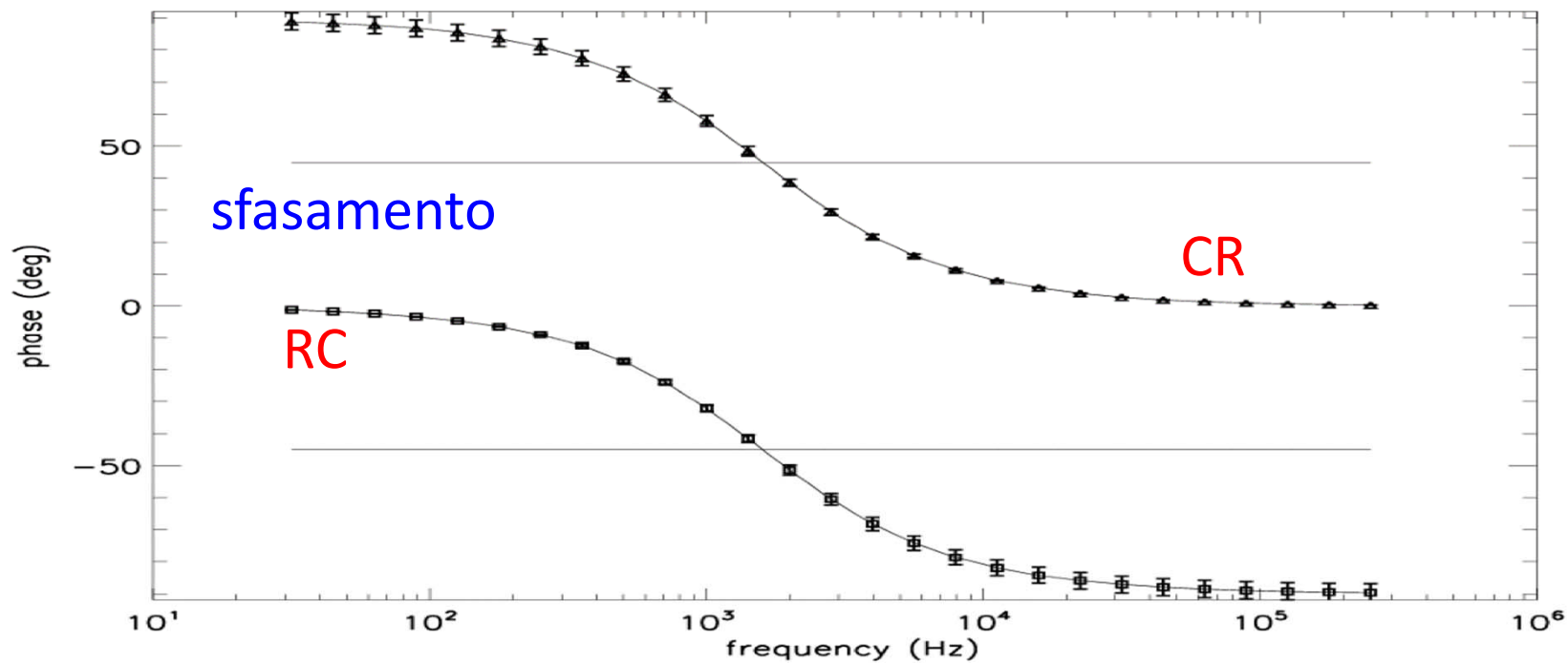
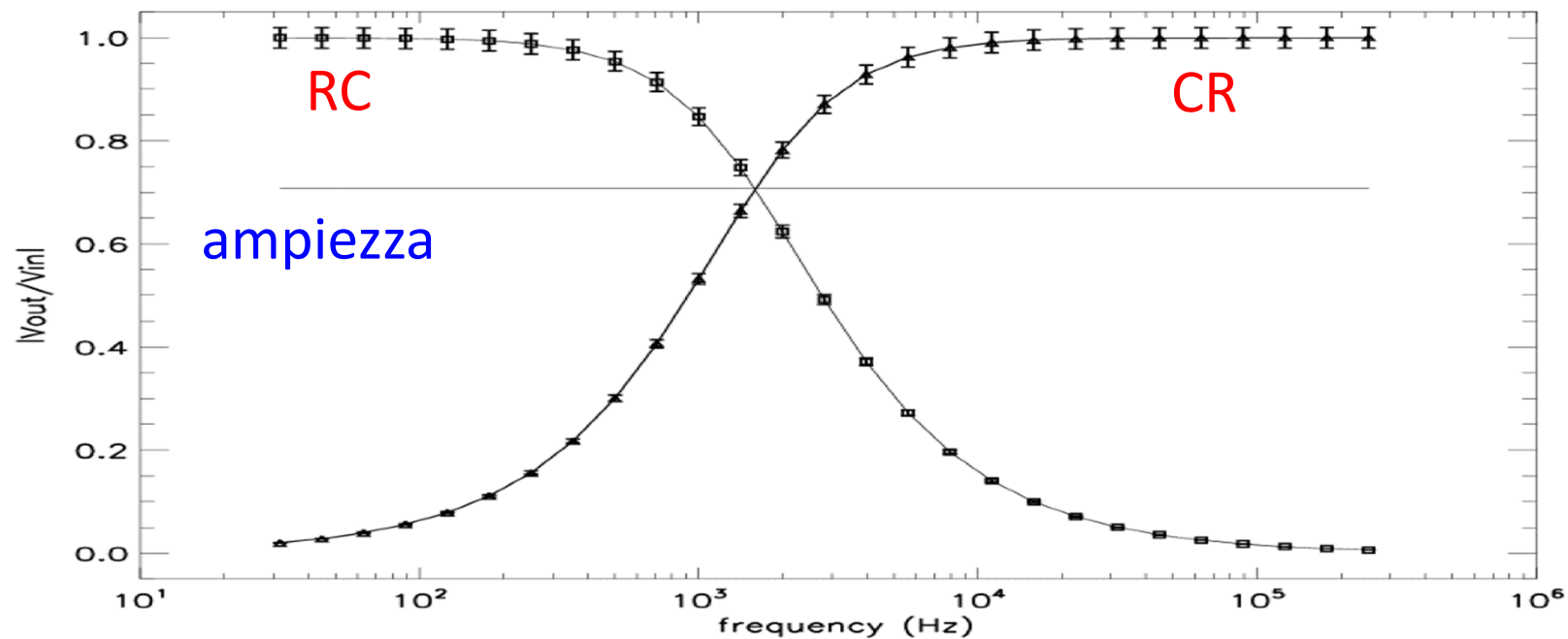
$$\vec{V}_R = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \vec{V}_{in}$$

$$V_{oR} = \frac{\tau\omega V_{oin}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

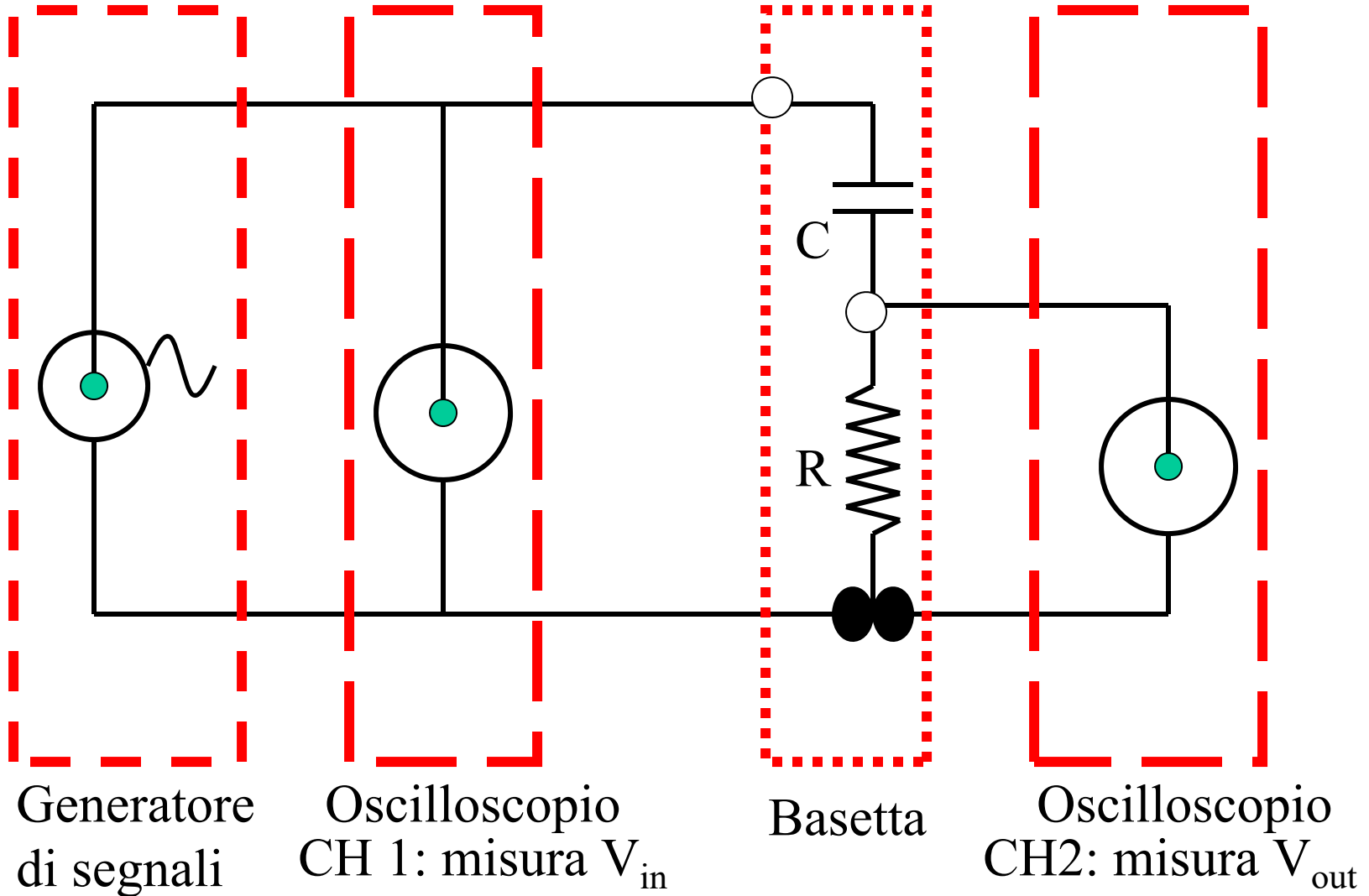
$$\varphi = \arctan(1/\omega\tau)$$

Per le misure e i grafici si procede esattamente come nel caso precedente. A titolo di esempio, riportiamo i grafici che si dovrebbero ottenere (sia RC che CR):





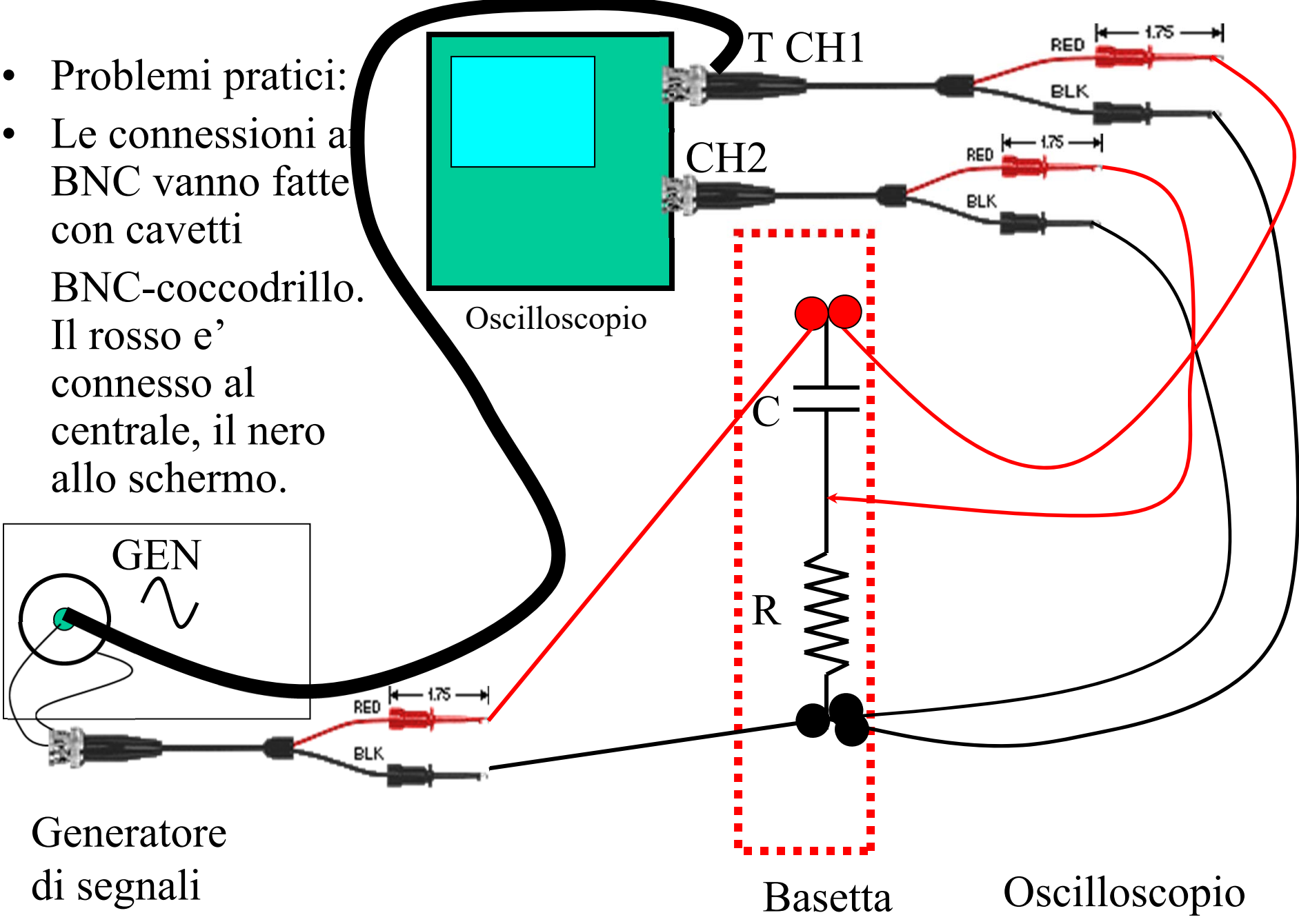
Circuito CR : schema di montaggio



○ = coccodrilli rossi

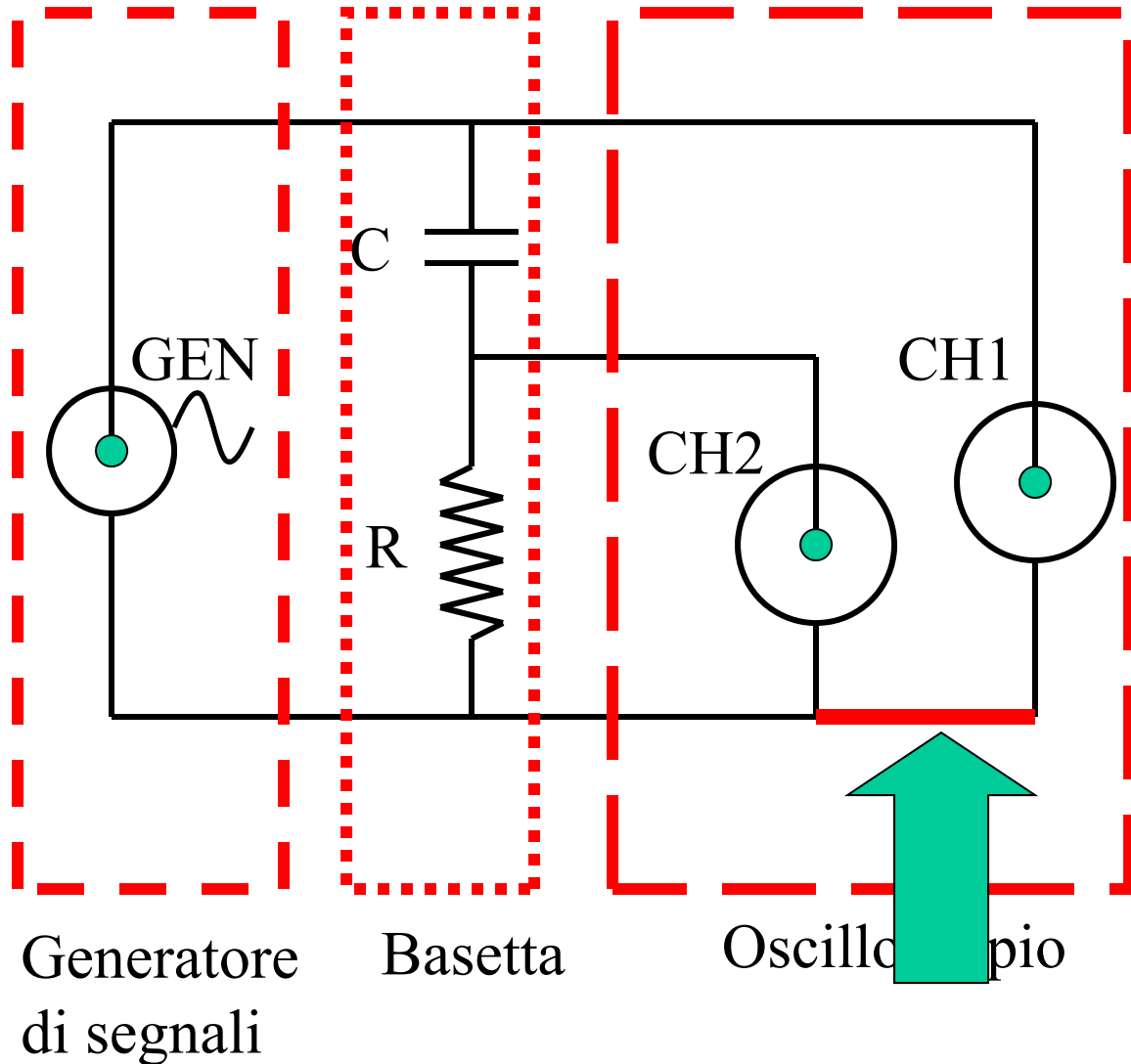
● = coccodrilli neri

- Problemi pratici:
- Le connessioni a BNC vanno fatte con cavetti BNC-coccodrillo. Il rosso e' connesso al centrale, il nero allo schermo.



Misure su circuiti RC e CR in regime sinusoidale

- La connessione tra la GND del CH1 e la GND del CH2 (cioe' tra gli schermi dei connettori BNC di ingresso) e' gia' presente all'interno dell'oscilloscopio.
- Ci si deve ricordare di questo quando si costruisce un qualsiasi circuito: la connessione di GND deve essere fatta sempre con questo punto.

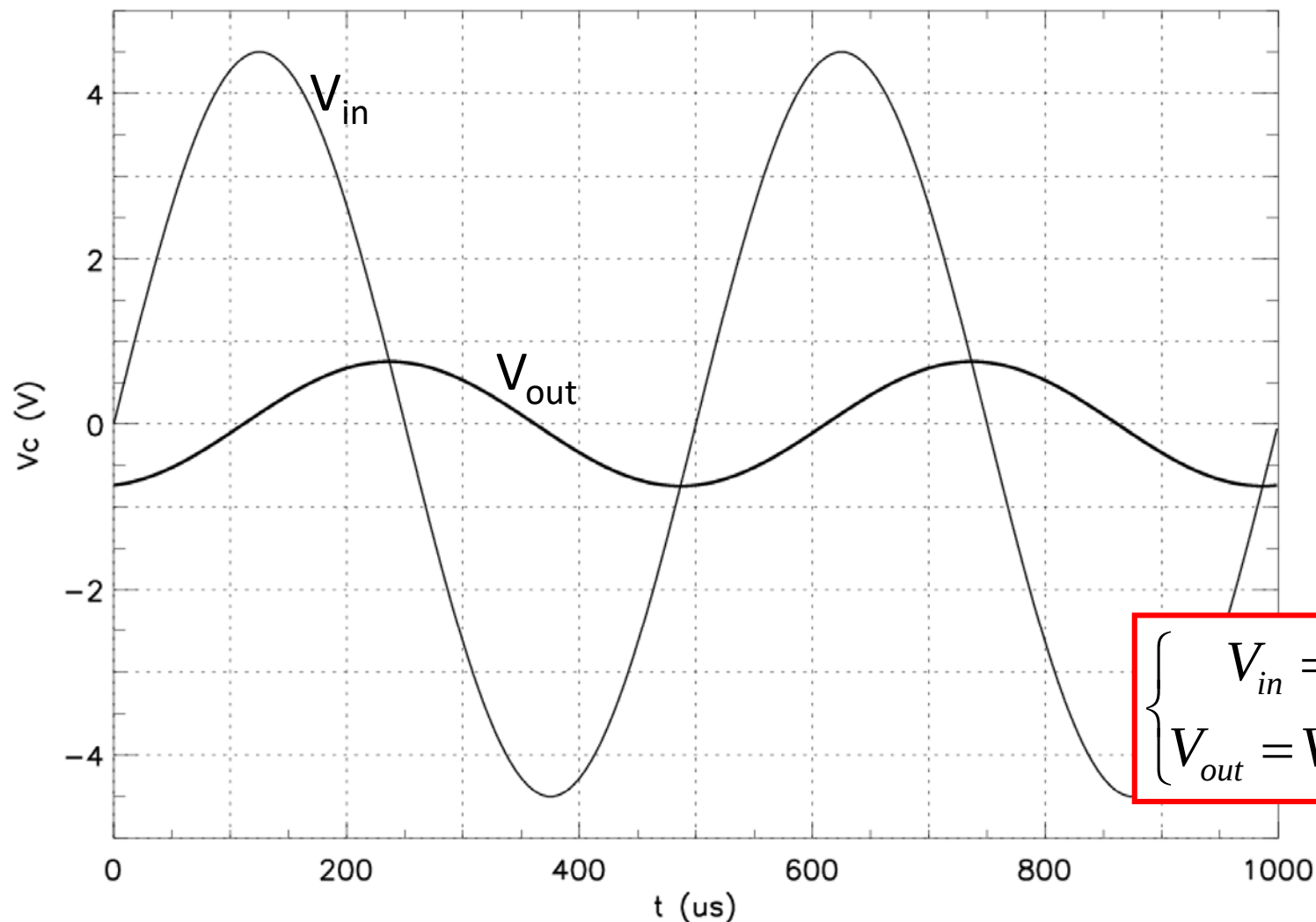


RC e CR in regime sinusoidale: l'esperienza.....

- 1): Trigger esterno e trigger interno: non ideale
funzionamento a basse frequenze del trigger esterno
- 2): Non idealità del funzionamento ad alte frequenze
del generatore di funzioni
- 3): Ellisse distorta a frequenze elevate

Come si misura lo sfasamento - addendum

Supponiamo di aver connesso V_{in} =CH1 V_{out} =CH2 e di vedere le forme d'onda seguenti:



V_{out} è in **RITARDO** rispetto a V_{in} (il massimo di V_{out} avviene **dopo** il massimo di V_{in}).

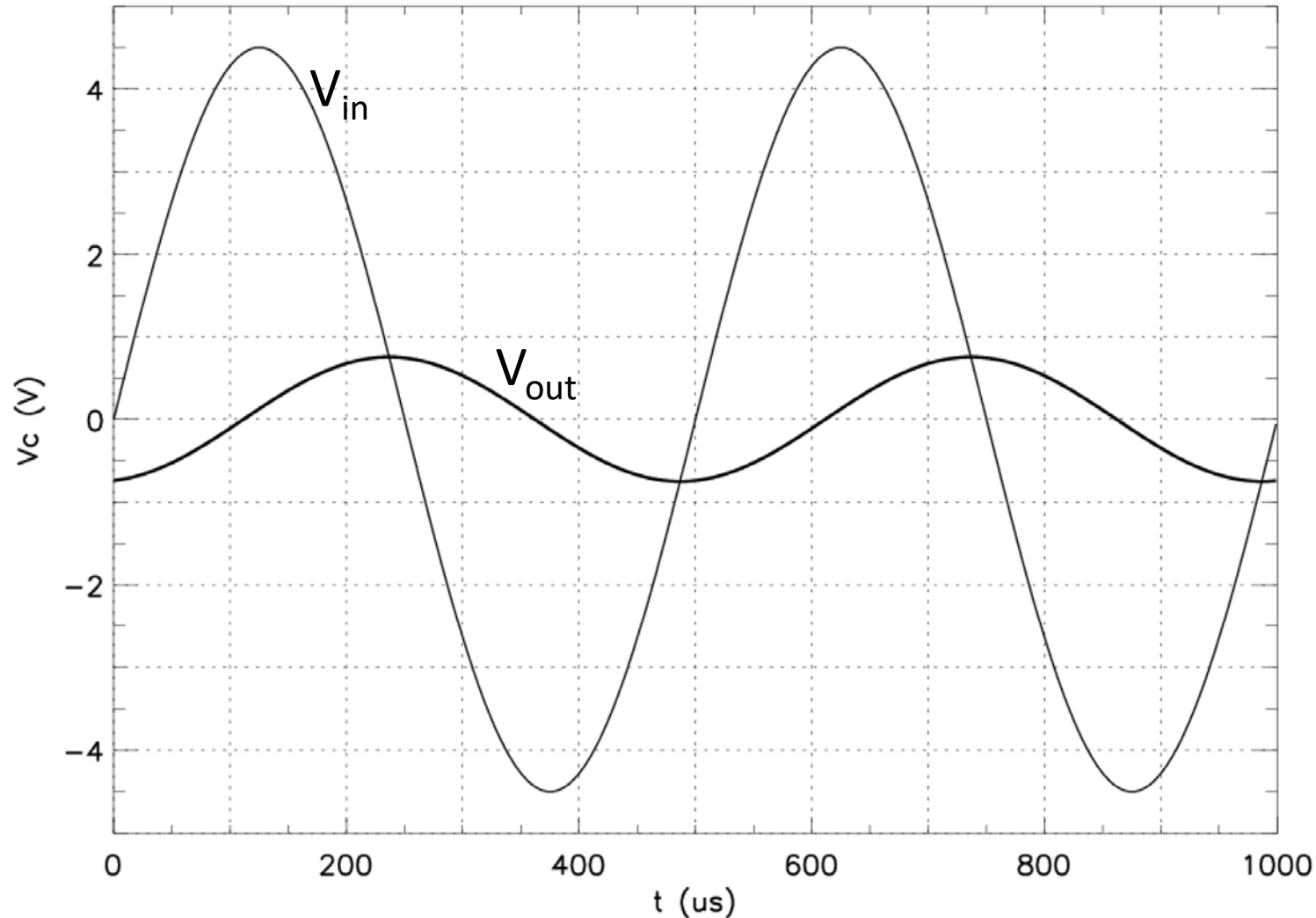
Quindi lo sfasamento di V_{out} rispetto a V_{in} è **NEGATIVO**: $\phi < 0$ nell'equazione

$$\begin{cases} V_{in} = V_{in0} \sin(\omega t) \\ V_{out} = V_{out0} \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Questo è il caso del circuito RC, con uscita ai capi di C

Come si misura lo sfasamento - addendum

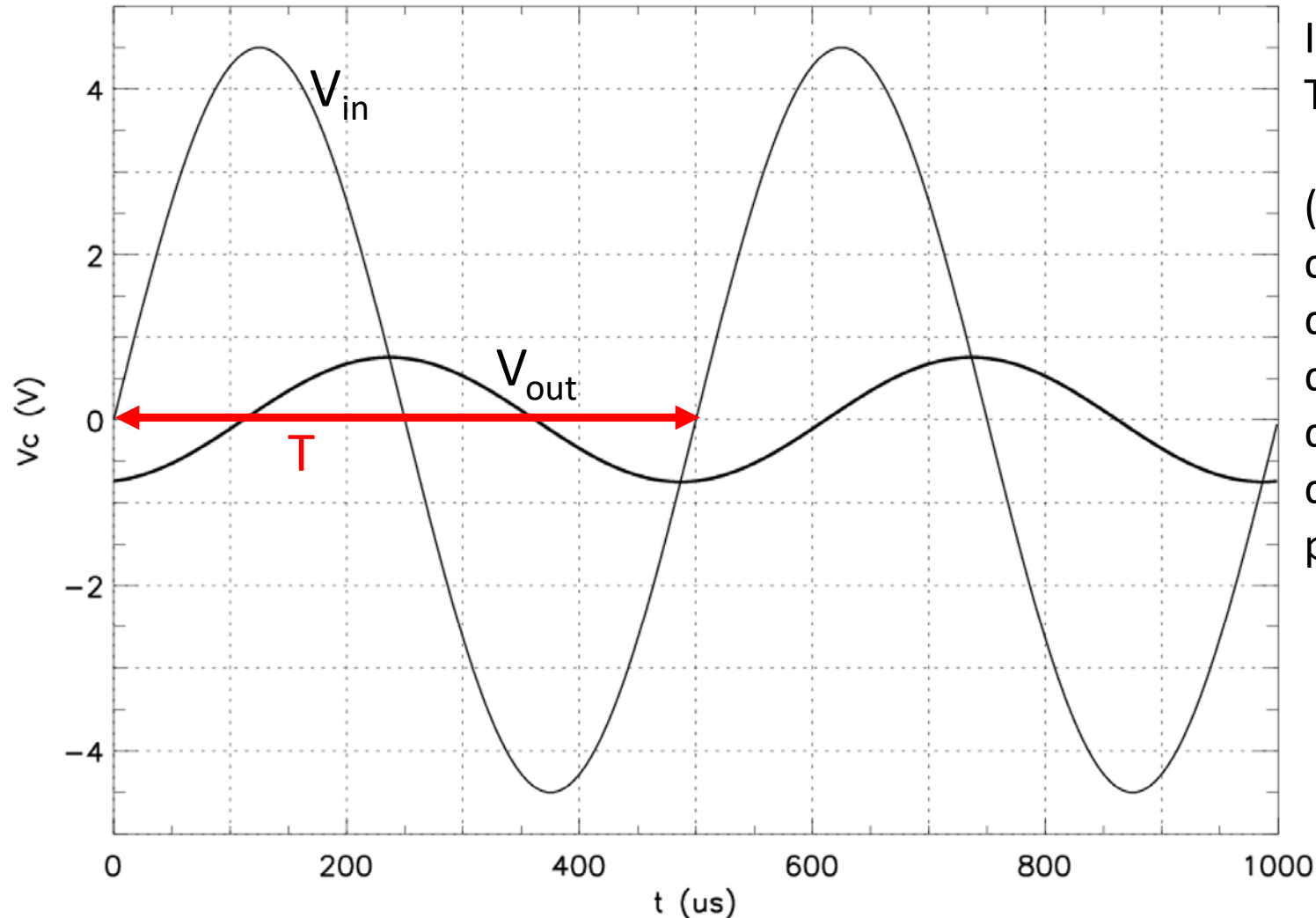
Una volta stabilito il segno dello sfasamento, si può trovare il valore. Si devono stimare il ritardo e il periodo.



Come si misura lo sfasamento - addendum

Una volta stabilito il segno dello sfasamento, si può trovare il valore.

Si devono stimare il ritardo e il periodo.



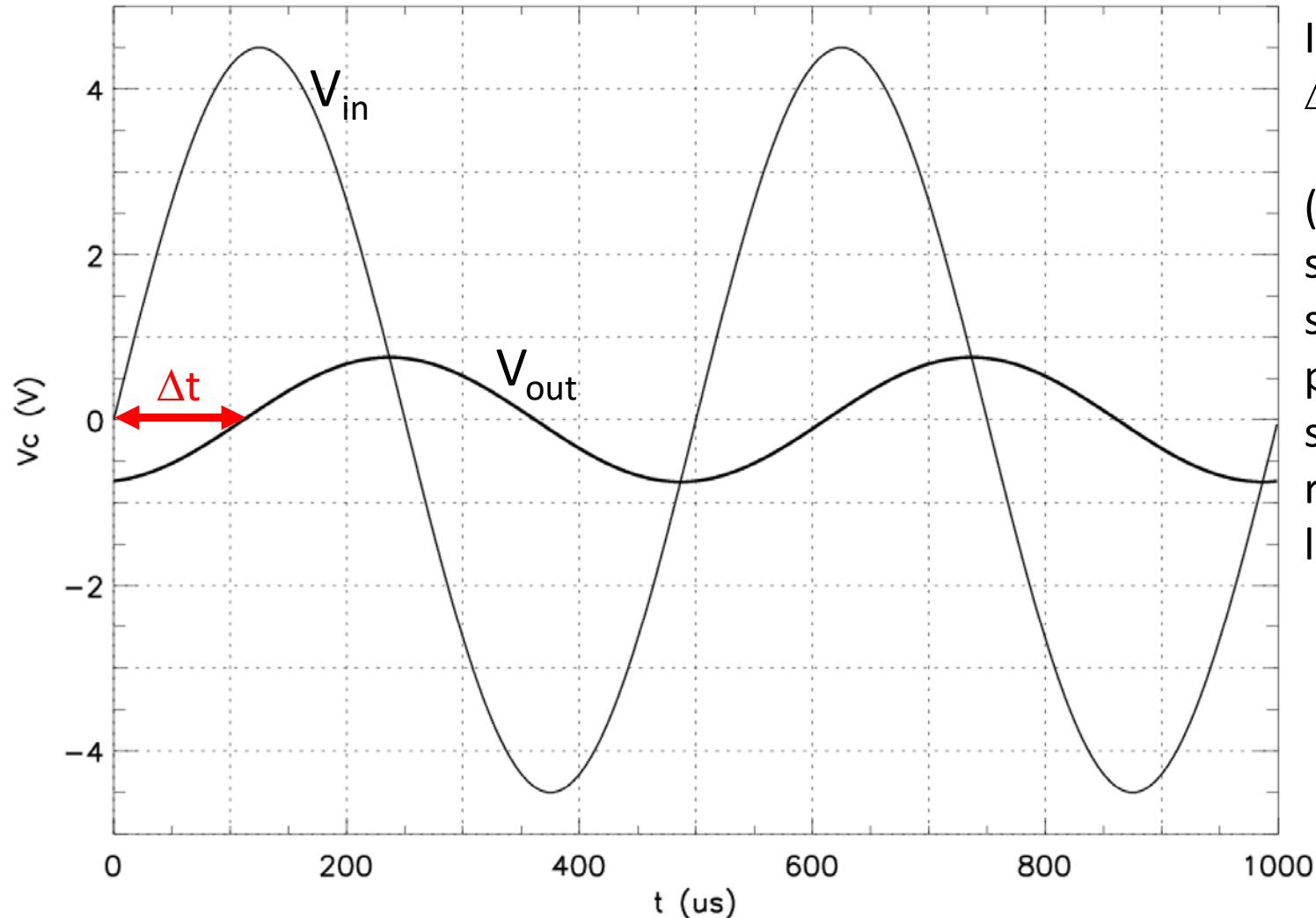
Il periodo è
 $T=500 \mu s$

(lunghezza di un ciclo completo, da zero a zero, o da max a max, o da min a min: da zero a zero è più preciso.)

Come si misura lo sfasamento - addendum

Una volta stabilito il segno dello sfasamento, si può trovare il valore.

Si devono stimare il ritardo e il periodo.



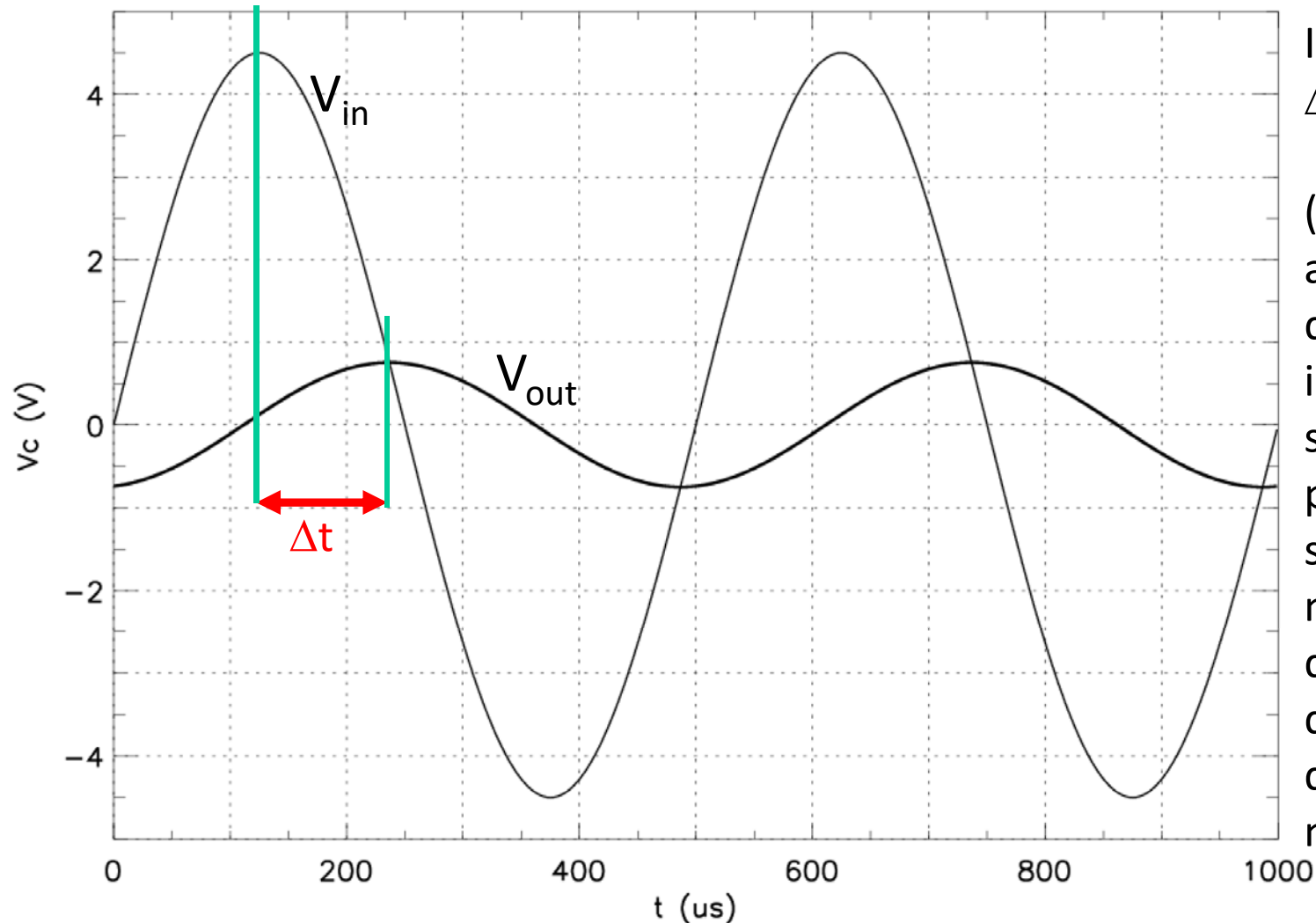
Il ritardo è
 $\Delta t = 120 \mu s$

(da zero a zero,
se le due
sinusoidi sono
perfettamente
simmetriche
rispetto alla
linea dello zero)

Come si misura lo sfasamento - addendum

Una volta stabilito il segno dello sfasamento, si può trovare il valore.

Si devono stimare il ritardo e il periodo.



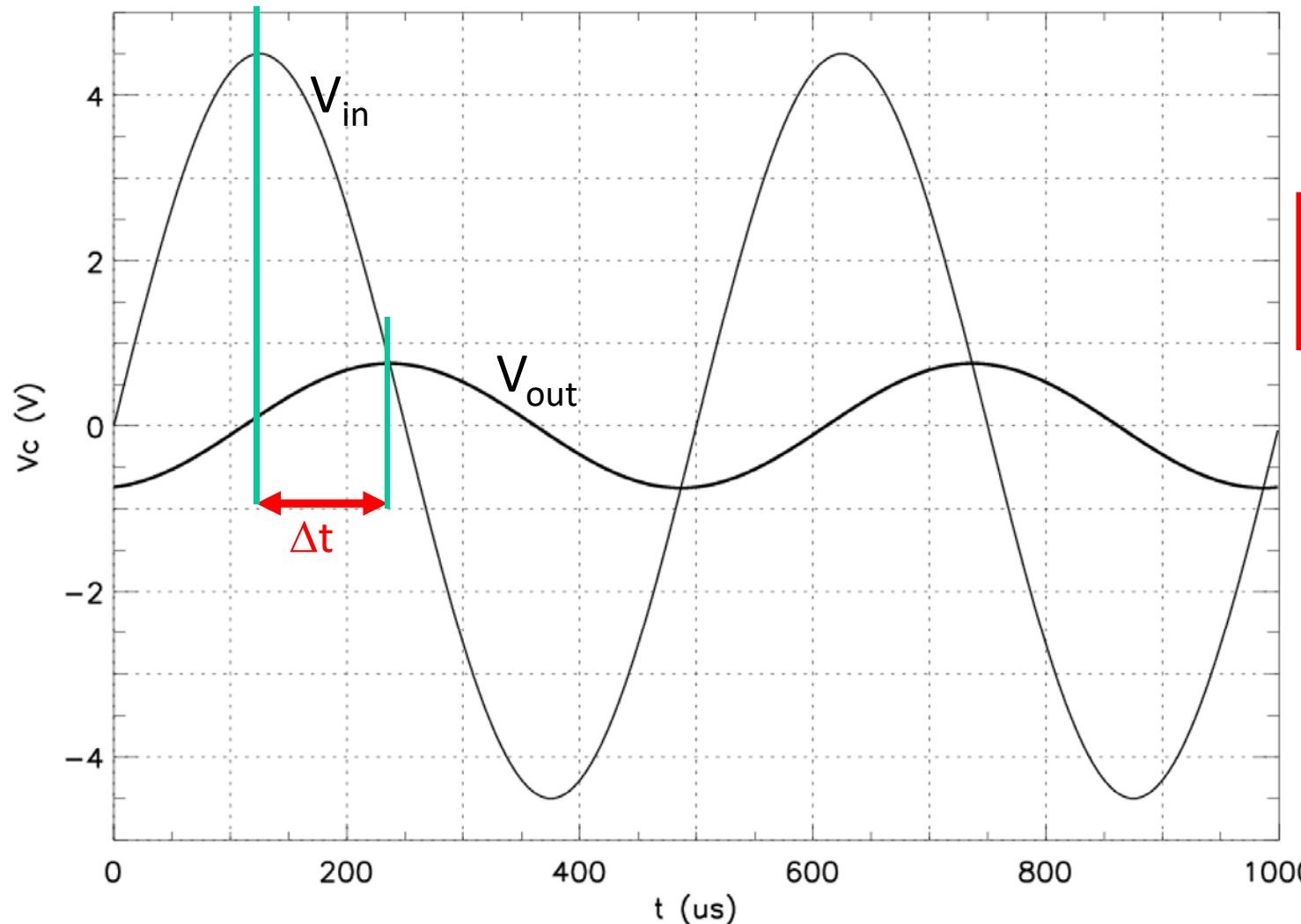
Il ritardo è
 $\Delta t = 120 \mu s$

(oppure da max
a max, e in
questo caso non
importa che
siano
perfettamente
simmetriche,
ma l'errore di
determinazione
della posizione
del max è
maggiore)

Come si misura lo sfasamento - addendum

Una volta stabilito il segno dello sfasamento, si può trovare il valore.

Si devono stimare il ritardo e il periodo.



A questo punto
si ricava lo
sfasamento:

$$\phi = \pm \frac{2\pi\Delta t}{T}$$

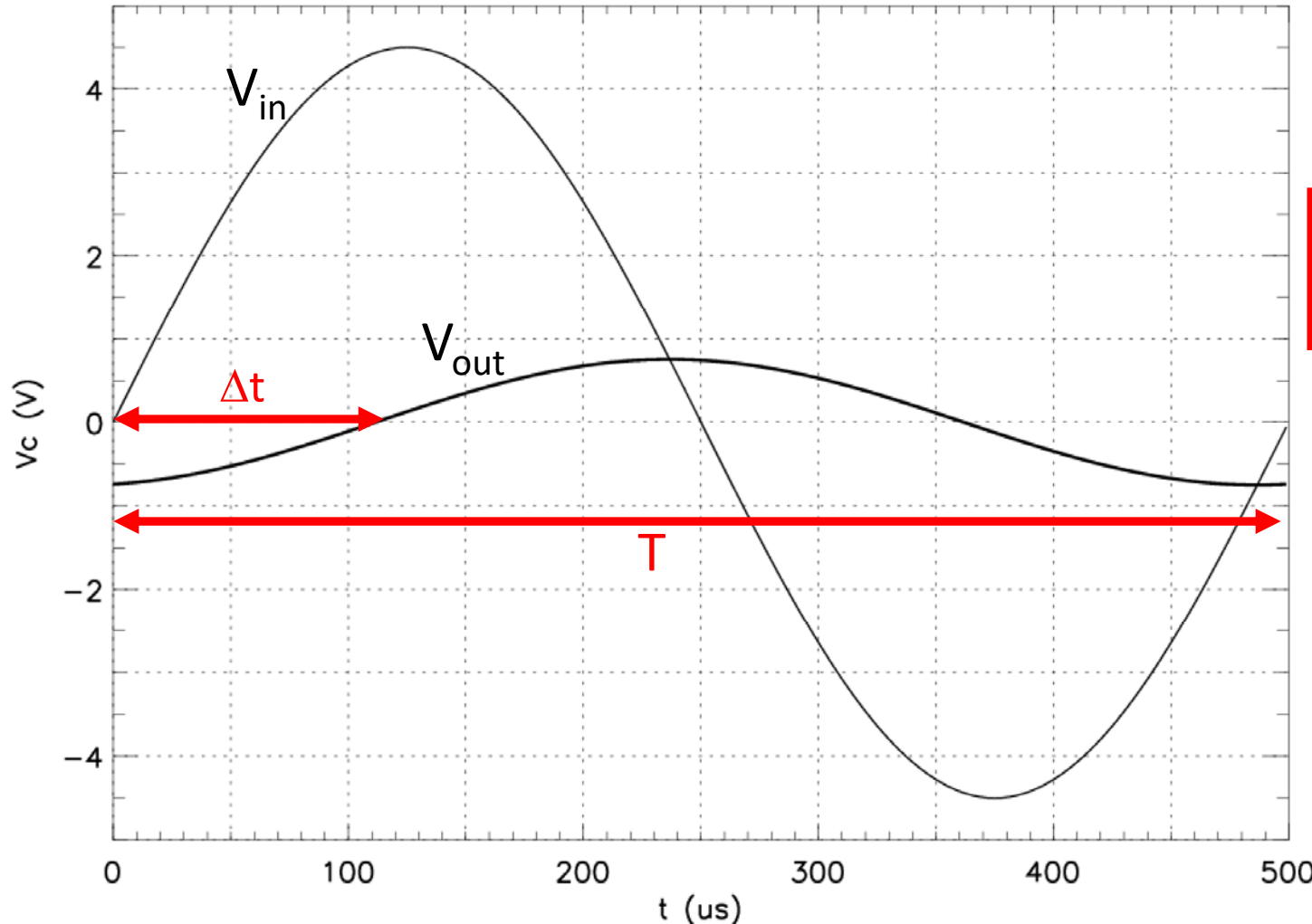
Con il segno + o
- deciso in
precedenza.

Nel nostro caso

$$\phi = -\frac{2\pi 120}{500} \rightarrow$$
$$\phi = -86^\circ$$

Come si misura lo sfasamento - addendum

Ovviamente per una misura precisa del ritardo e del periodo conviene ampliare la scala dei tempi il più possibile:



A questo punto si ricava lo sfasamento:

$$\phi = \pm \frac{2\pi\Delta t}{T}$$

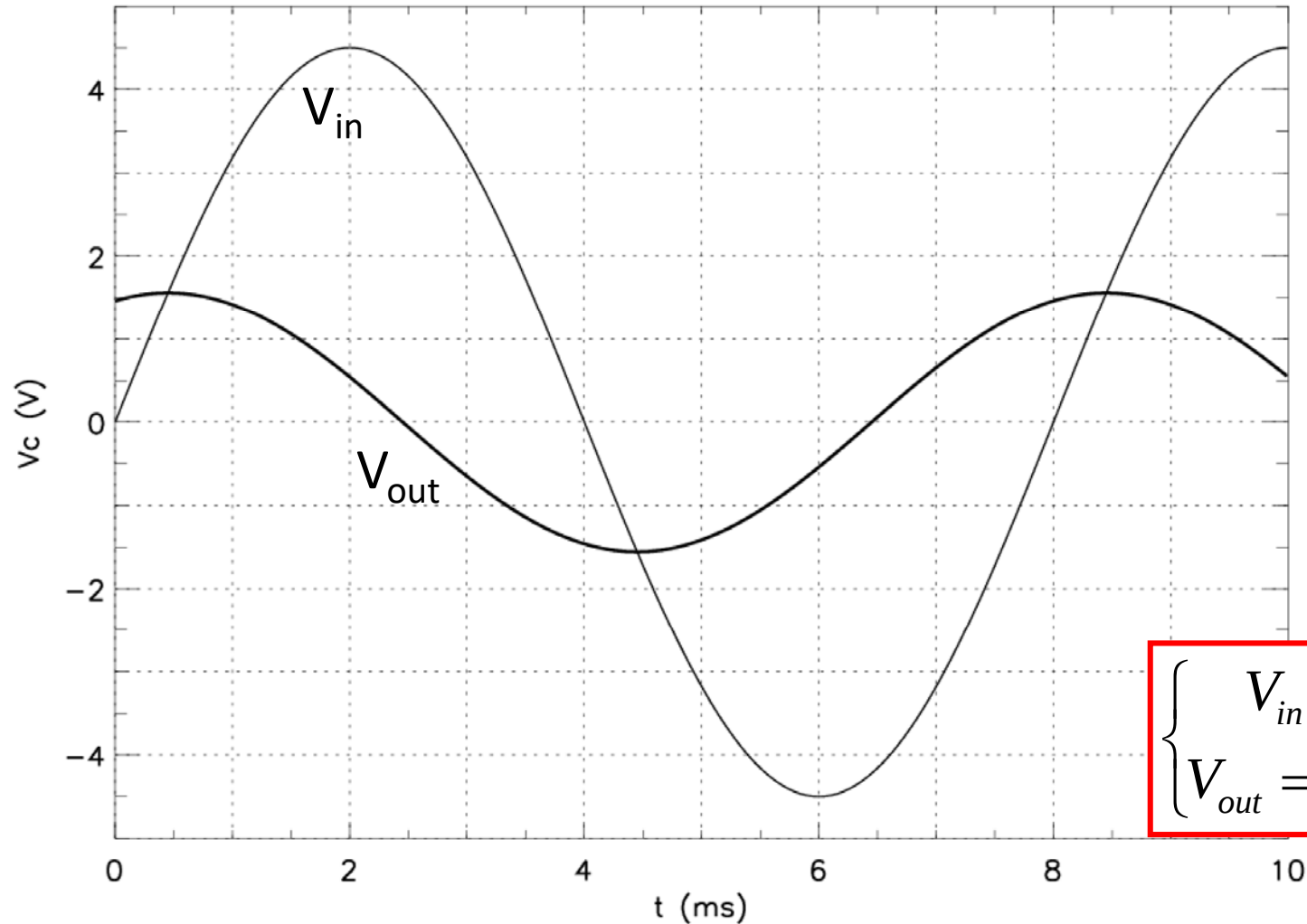
Con il segno + o - deciso in precedenza.

Nel nostro caso

$$\phi = -\frac{2\pi 120}{500} \rightarrow \phi = -86^\circ$$

Come si misura lo sfasamento - addendum

Supponiamo di aver connesso $V_{in}=CH1$ $V_{out}=CH2$ e di vedere le forme d'onda seguenti:



V_{out} è in **ANTICIPO** rispetto a V_{in} (il massimo di V_{out} avviene **prima** del massimo di V_{in}).

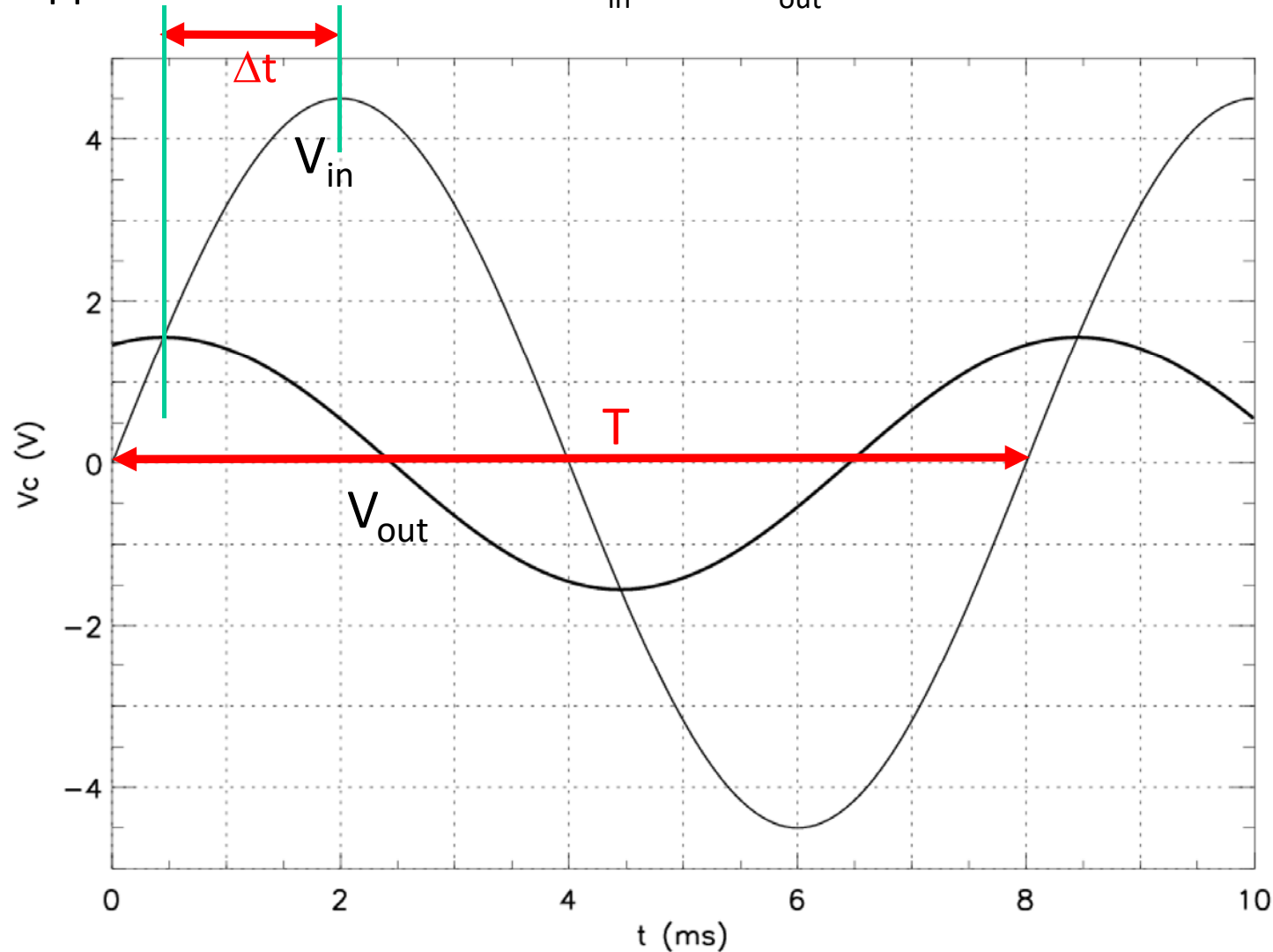
Quindi lo sfasamento di V_{out} rispetto a V_{in} è **POSITIVO**: $\phi > 0$ nell'equazione

$$\begin{cases} V_{in} = V_{in0} \sin(\omega t) \\ V_{out} = V_{out0} \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Questo è il caso del circuito CR, con uscita ai capi di R

Come si misura lo sfasamento - addendum

Supponiamo di aver connesso $V_{in}=CH1$ $V_{out}=CH2$ e di vedere le forme d'onda seguenti:



Quindi qui lo sfasamento:

$$\phi = \pm \frac{2\pi\Delta t}{T}$$

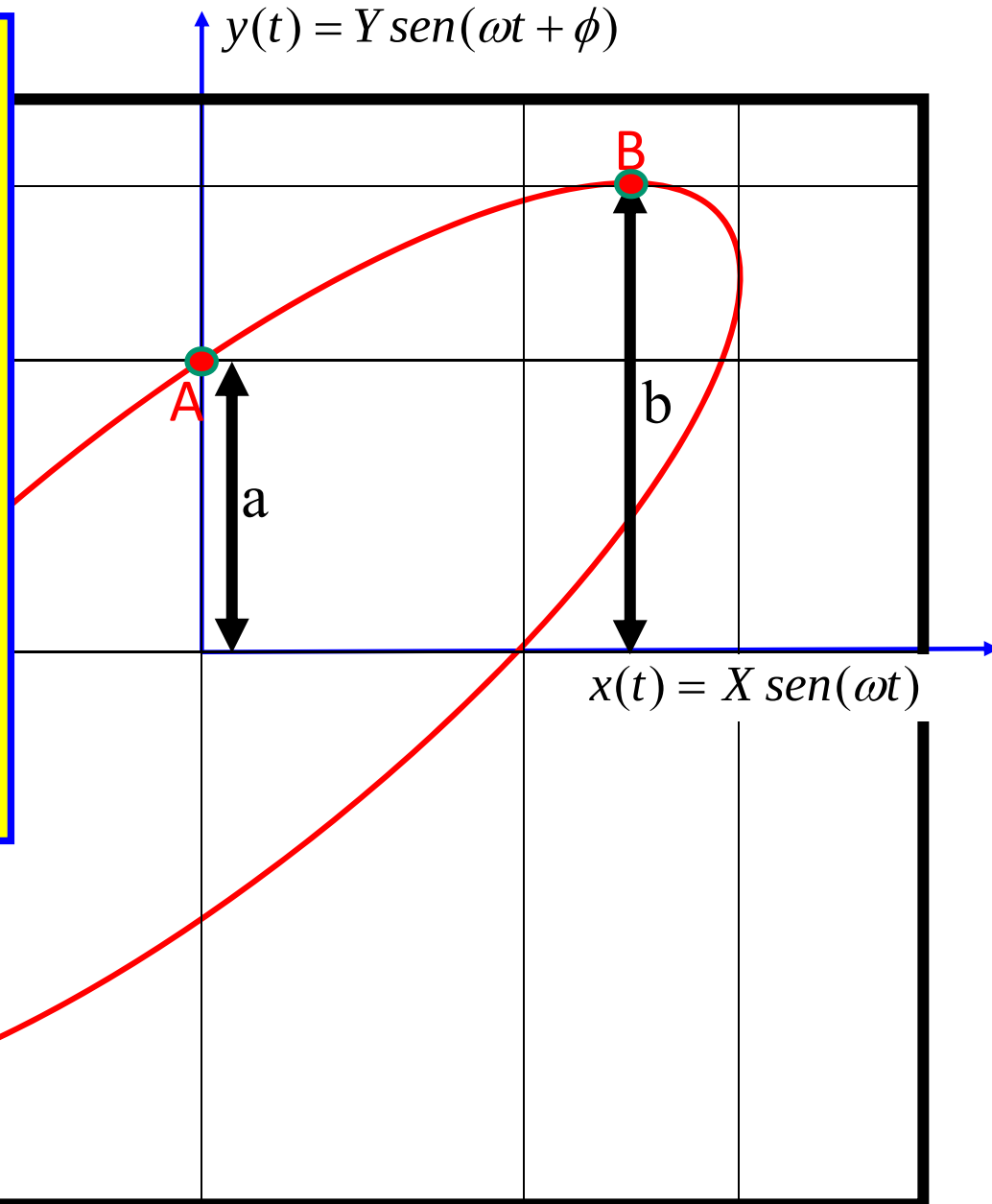
vale

$$\phi = + \frac{2\pi 1.6}{8} \rightarrow$$
$$\phi = +72^\circ$$

Questo è il caso del circuito CR, con uscita ai capi di R

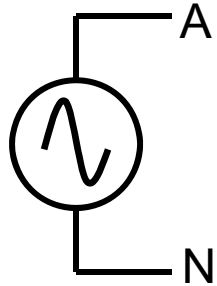
Come si ricava lo sfasamento dall'ellisse ?

- Quando si usa il metodo dell'ellisse, **NON** si può ricavare il **segno** dello sfasamento.
- Infatti l'unica differenza tra sfasamento ϕ e sfasamento $-\phi$ è che il puntino luminoso percorre l'ellisse in senso orario o antiorario. Ma percorre gli stessi punti, anche se in istanti diversi.
- Ed è troppo veloce perché si possa stabilire il senso di percorrenza !

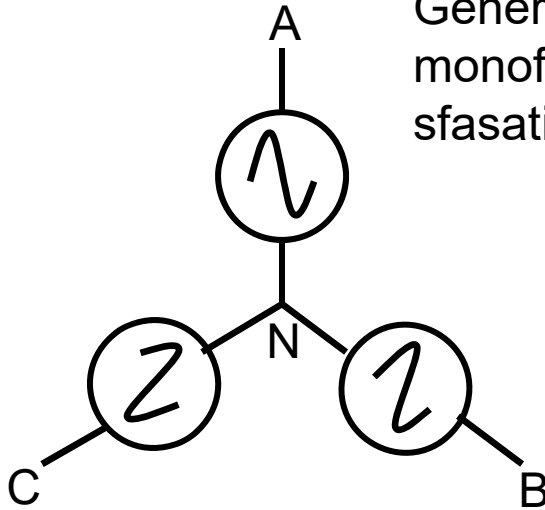


Esempio sui fasori:

Generatori Monofase e Trifase



Generatore monofase : $V(t) = V_A - V_N = V_o e^{j\omega t}$



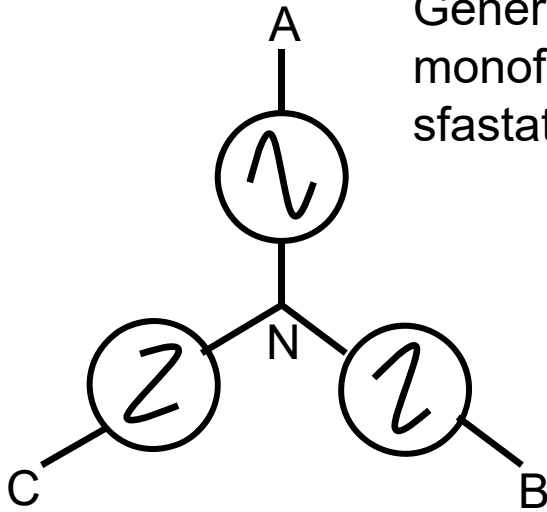
Generatore trifase (a stella) : insieme di tre generatori monofase, con un estremo in comune, stessa ampiezza, e sfasati 120° uno dall' altro:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{AN}(t) = V_A - V_N = V_o e^{j\omega t} \\ V_{BN}(t) = V_B - V_N = V_o e^{j(\omega t - 2\pi/3)} \\ V_{CN}(t) = V_C - V_N = V_o e^{j(\omega t - 4\pi/3)} \end{array} \right.$$

Esempio sui fasori:

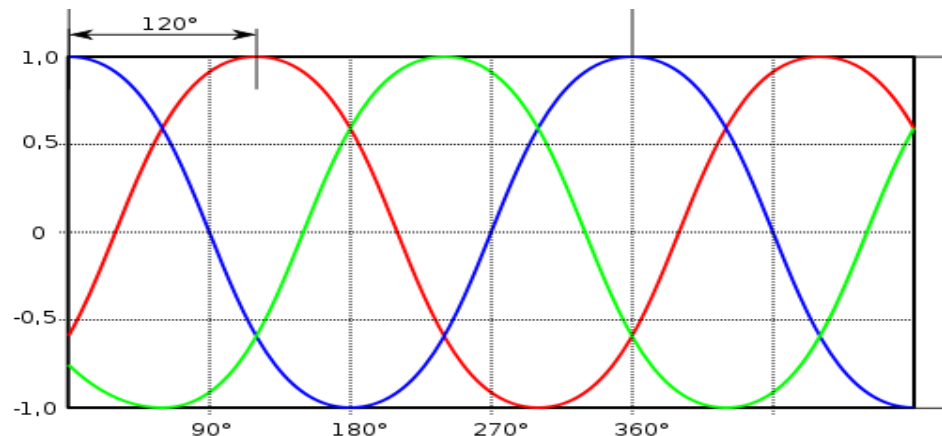
Generatori Monofase e Trifase

Generatore trifase (a stella) : insieme di tre generatori monofase, con un estremo in comune, stessa ampiezza, e sfasati 120° uno dall' altro:



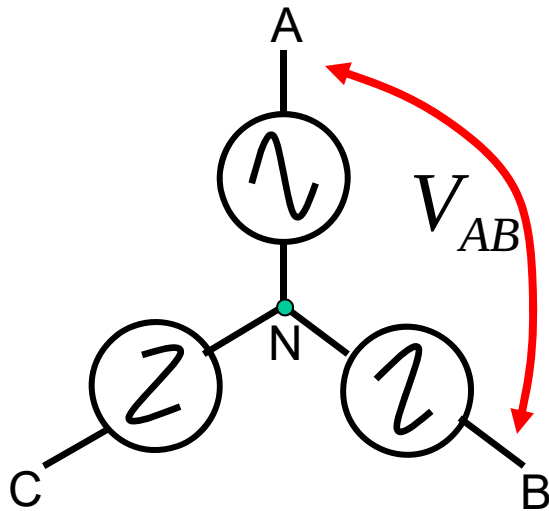
$$\begin{cases} V_{AN}(t) = V_A - V_N = V_o e^{j\omega t} & \text{— blue —} \\ V_{BN}(t) = V_B - V_N = V_o e^{j(\omega t - 2\pi/3)} & \text{— green —} \\ V_{CN}(t) = V_C - V_N = V_o e^{j(\omega t - 4\pi/3)} & \text{— red —} \end{cases}$$

Che tensione c'è, istante per istante, tra A e B, tra B e C, tra C ed A ?



Esempio sui fasori:

Generatori Monofase e Trifase



$$\begin{cases} V_{AN}(t) = V_A - V_N = V_o e^{j\omega t} \\ V_{BN}(t) = V_B - V_N = V_o e^{j(\omega t - 2\pi/3)} \\ V_{CN}(t) = V_C - V_N = V_o e^{j(\omega t - 4\pi/3)} \end{cases}$$

Che tensione c'è, istante per istante, tra A e B, tra B e C, tra C ed A ?

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_{AN} - V_{BN} = V_o [e^{j\omega t} - e^{j(\omega t - 2\pi/3)}] = V_o e^{j\omega t} (1 - e^{-2\pi/3j}) = \\ &= V_o e^{j\omega t} [1 - \cos(-2\pi/3) - j \sin(-2\pi/3)] = V_o e^{j\omega t} \left[1 + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \\ &= V_o e^{j\omega t} \left[\frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \sqrt{3} V_o e^{j\omega t} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right] = \sqrt{3} V_o e^{j\omega t} e^{-j\pi/6} = \\ &= \sqrt{3} V_o e^{j(\omega t - \pi/6)} \end{aligned}$$

V_{AB} è $\sqrt{3}$ volte maggiore di quella dei generatori, ed è sfasata di $\pi/6$ rispetto a V_{AN} . Analogamente per V_{BC} e V_{CA} .

Esempio sui fasori:

Generatori Monofase e Trifase

- In Italia oggi $V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} = \sqrt{2} 230V$ e
 $V_{AB} = V_{BC} = V_{CA} = \sqrt{2} 400V$
- Per lungo tempo avevamo avuto
 $V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} = \sqrt{2} 220V$ e
 $V_{AB} = V_{BC} = V_{CA} = \sqrt{2} 380V$



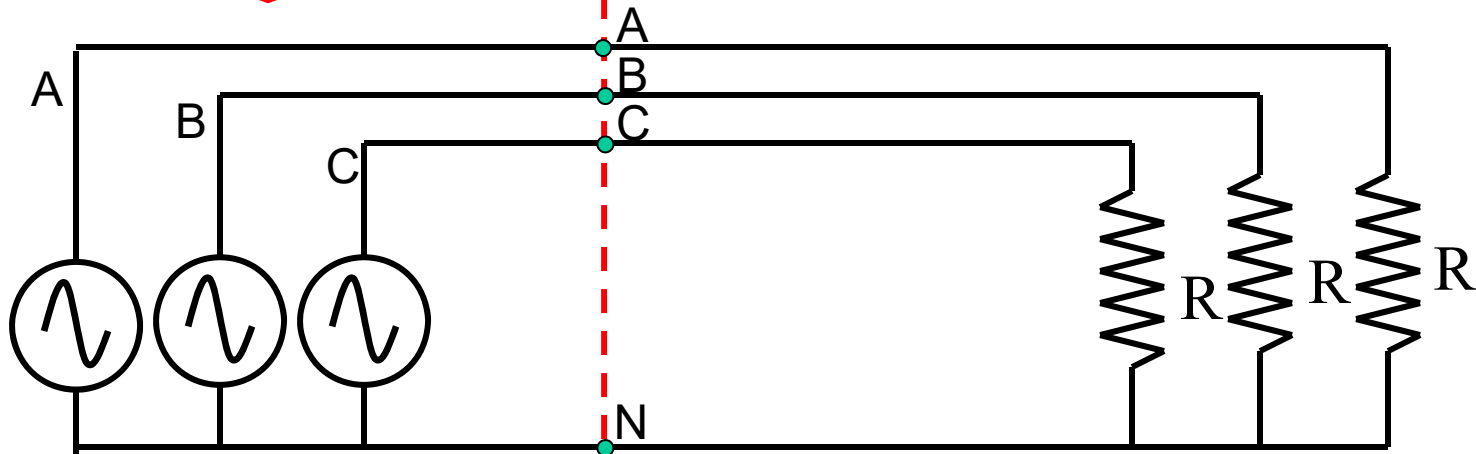
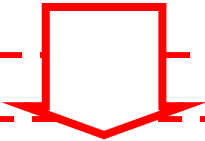
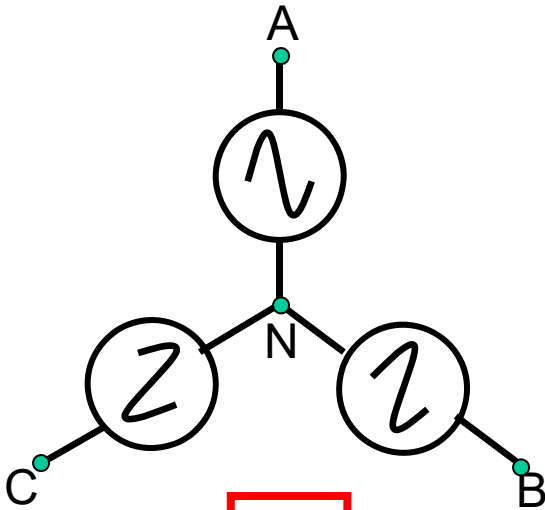
Presse trifase standard a 5 contatti :

- 3 fasi (A,B,C),
- neutro (N),
- terra (connessa alla scatola dello strumento utilizzatore, per motivi di sicurezza)

Esempio sui fasori:

Generatori Monofase e Trifase

Supponiamo ora di collegare 3 carichi uguali al generatore trifase:



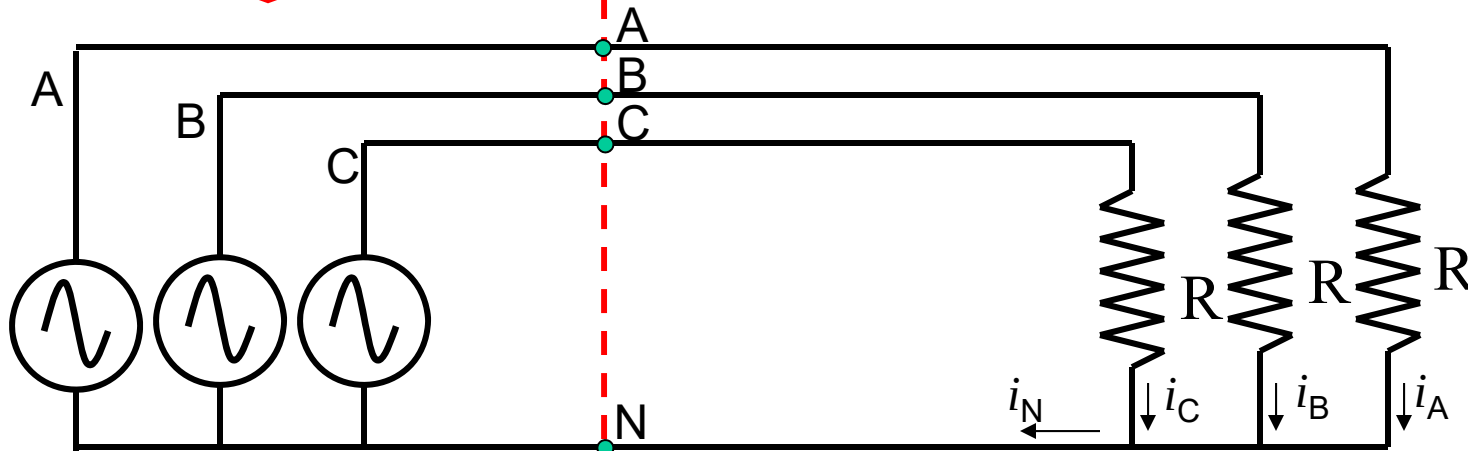
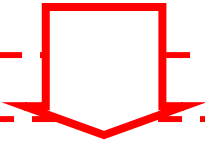
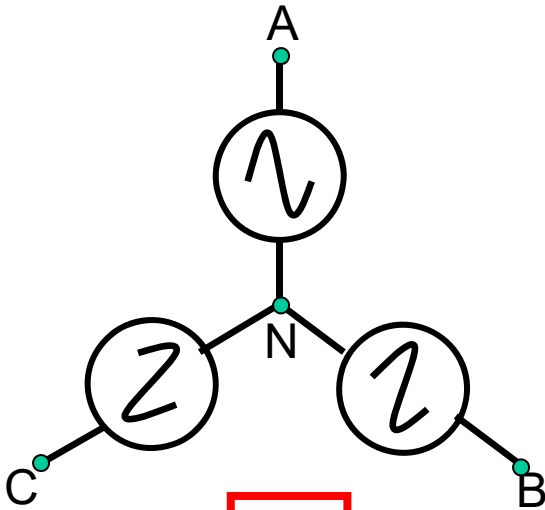
Esempio sui fasori:

Generatori Monofase e Trifase

Supponiamo ora di collegare 3 carichi uguali al generatore trifase:

Che corrente scorre nel conduttore N ???
(N sta per neutro..)

$$i_N = i_A + i_B + i_C$$



Esempio sui fasori:

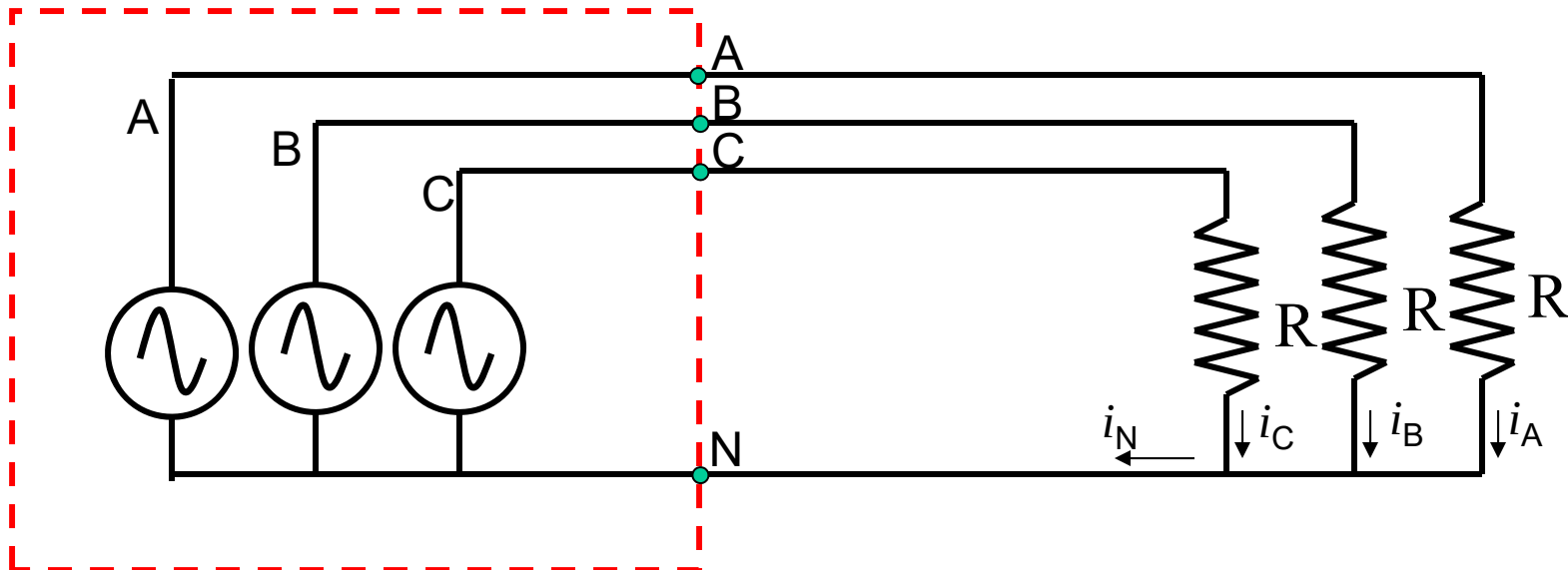
Generatori Monofase e Trifase

$$i_N = i_A + i_B + i_C$$

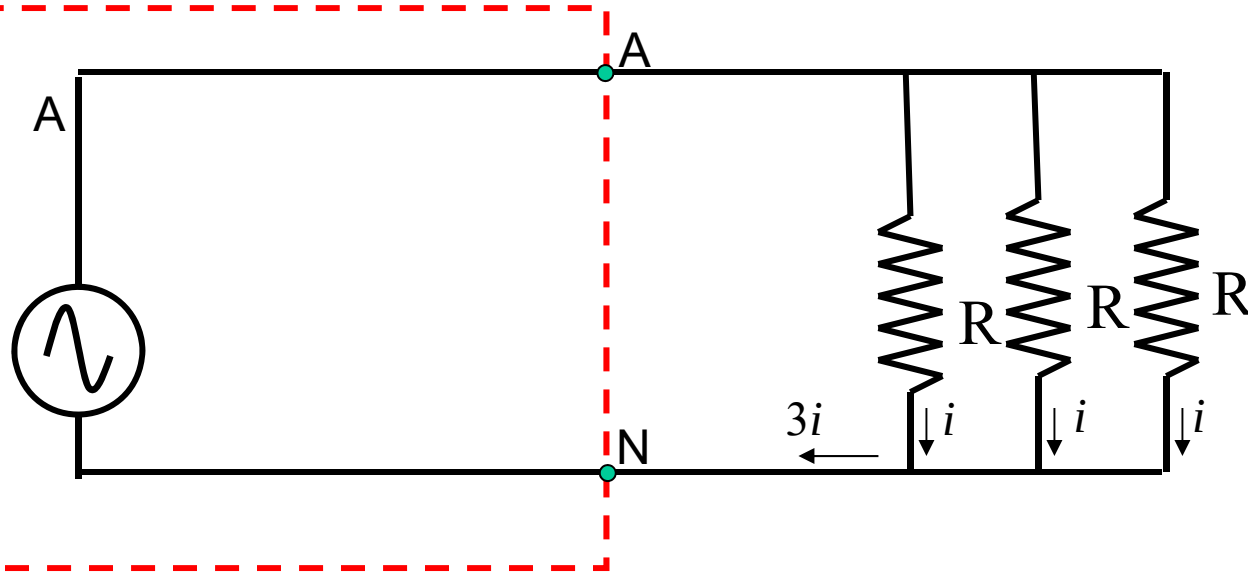
$$i_N = \frac{V_o}{R} [e^{j\omega t} + e^{j(\omega t - 2\pi/3)} + e^{j(\omega t - 4\pi/3)}] = \frac{V_o}{R} e^{j\omega t} (1 + e^{-2\pi/3j} + e^{-4\pi/3j}) =$$

$$= \frac{V_o}{R} e^{j\omega t} (1 + \cos(-2\pi/3) + j\sin(-2\pi/3) + \cos(-4\pi/3) + j\sin(-4\pi/3)) =$$

$$= \frac{V_o}{R} e^{j\omega t} (1 + (-1/2) + j(-\sqrt{3}/2) + (-1/2) + j(\sqrt{3}/2)) = 0!!!$$

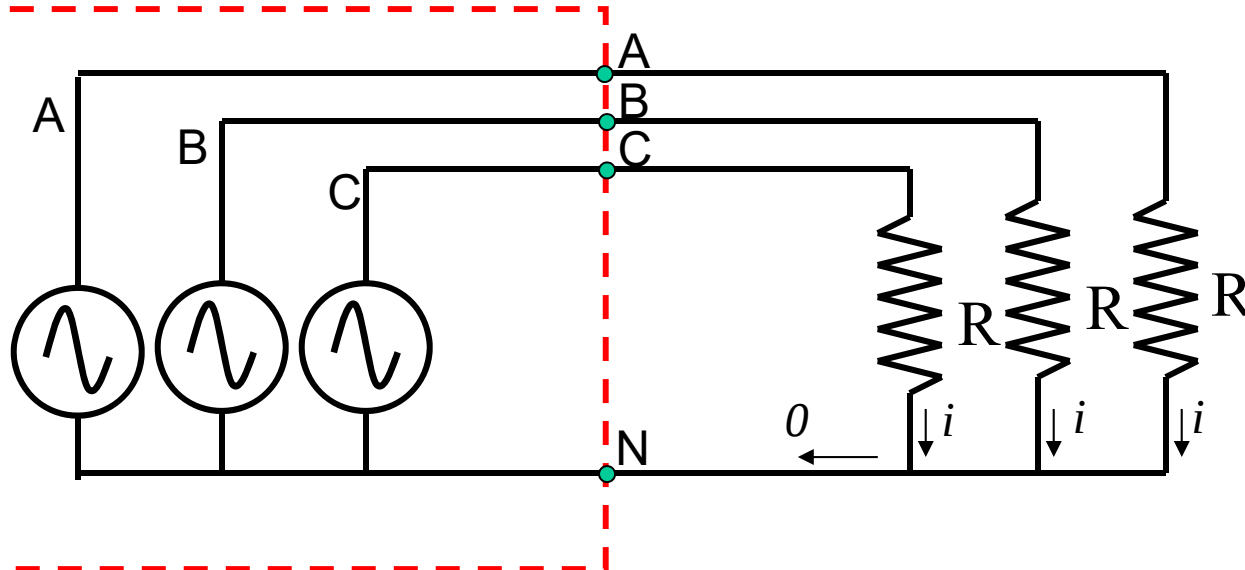


Vantaggi della distribuzione trifase rispetto alla monofase



Supponiamo di dover far scorrere una corrente i in 3 carichi R . (i carichi nella grande distribuzione sono molti di più, ma si possono riunire sempre in 3 gruppi equivalenti.)

Con un generatore monofase scorrerà una corrente $3i$ sia nel filo A che nel filo N



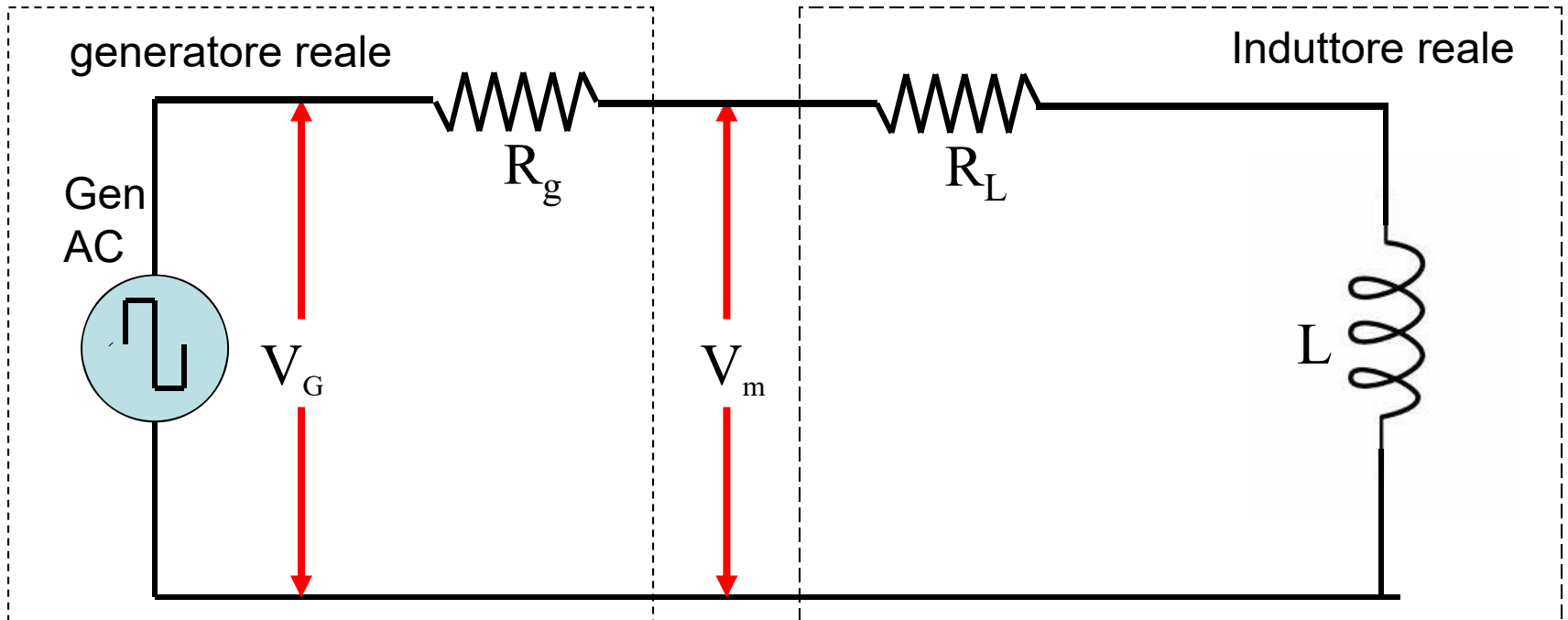
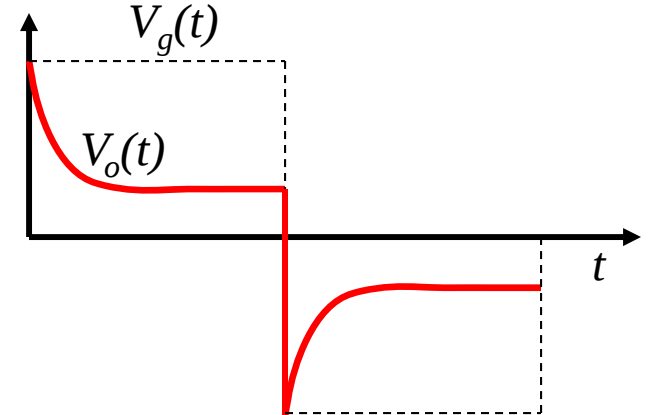
Con un generatore trifase scorrerà una corrente i in ciascuno dei tre cavi A,B,C. Quindi si devono usare 4 cavi al posto di 2, ma possono avere una sezione 3 volte più piccola, a parità di resistenza dei cavi e quindi di perdite ohmiche

- Ecco perché la distribuzione dell'energia elettrica, con linee lunghe centinaia di chilometri e quindi con perdite ohmiche non trascurabili, viene sempre fatta con linee trifase.



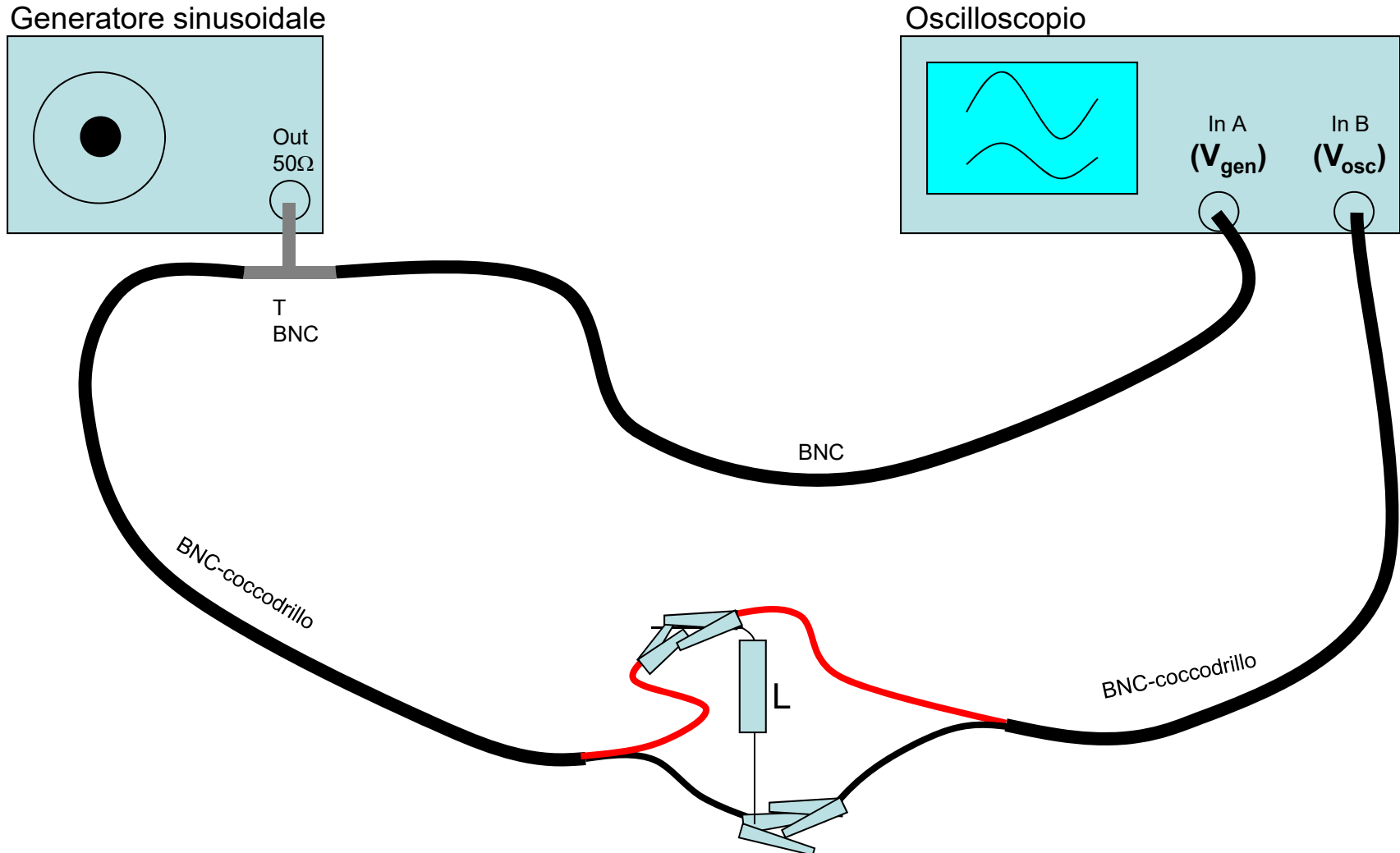
Induttore alimentato da onda quadra

- Si consideri il circuito mostrato in figura.
- Alimentato da un generatore di onda quadra, l'induttore produce impulsi con decadimento esponenziale come in figura.
- Si vogliono misurare la resistenza interna e l'induttanza dell'induttore.



Induttore alimentato da onda quadra

- Realizzazione pratica :



Induttore alimentato da onda quadra

- Partendo dall'istante $t=0$ in cui la tensione dell'onda quadra diventa $+V_g$, per tutto il tempo in cui rimane costante a tale valore l'equazione del circuito è :

$$V_g = (R_g + R_L)i(t) + L \frac{di}{dt}(t) \rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{V_g}{L} \quad ; \quad \tau = \frac{L}{R_g + R_L}$$

- La soluzione per la corrente è

$$i(t) = \frac{V_g}{R_g + R_L} (1 - e^{-t/\tau})$$

- E quindi la tensione misurata dall'oscilloscopio è

$$V_m(t) = R_L i(t) + L \frac{di}{dt}(t) = V_g \left[\frac{R_L}{R_g + R_L} + \frac{R_g}{R_g + R_L} e^{-t/\tau} \right]$$

- Quindi, se il periodo dell'onda quadra è $T \gg \tau$, durante la parte positiva dell'onda quadra la tensione misurata dall'oscilloscopio parte con il valore V_g e decresce esponenzialmente fino al valore

$$V_m(t \gg \tau) = V_g \frac{R_L}{R_g + R_L}$$

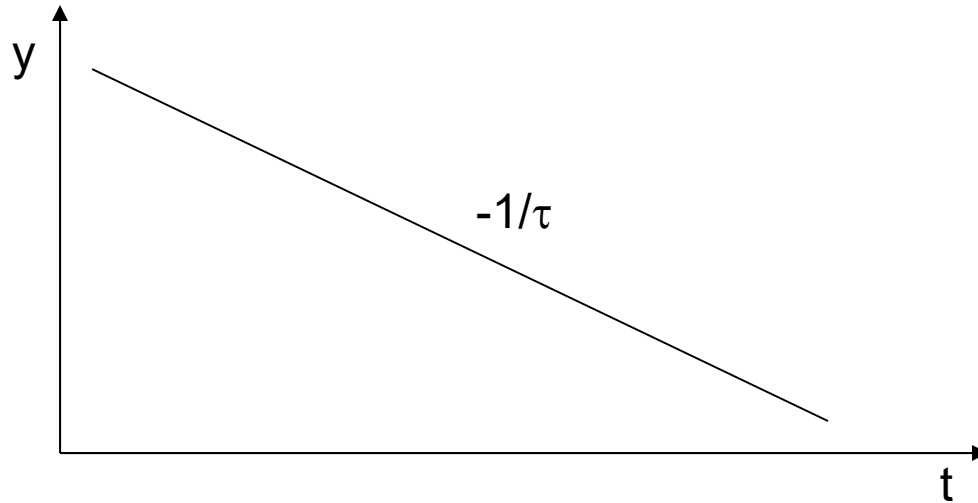
- Dal confronto tra valore iniziale e finale si può ricavare R_L , sapendo che $R_g = 50\Omega$.

Induttore alimentato da onda quadra

- Graficando poi la quantità

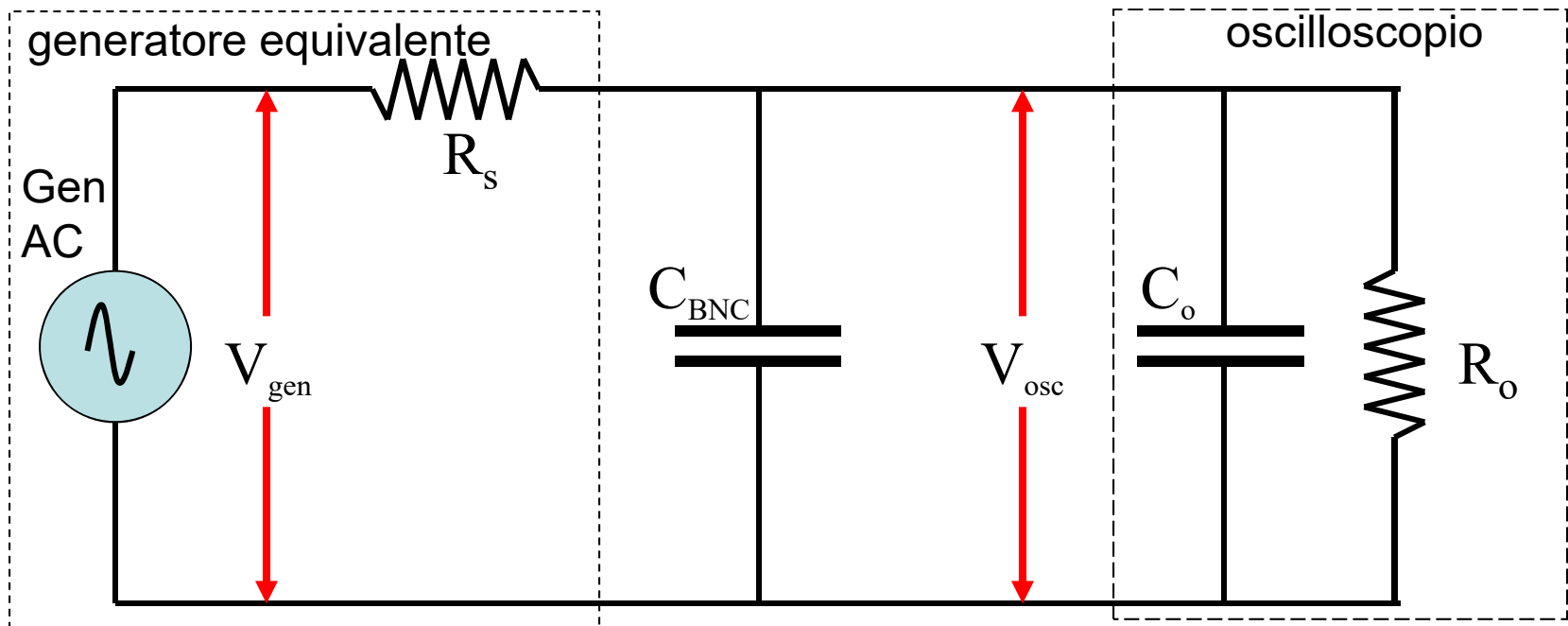
$$y = \ln \left[\frac{V_m(t)(R_g + R_L) - V_g R_L}{V_g R_g} \right] = -\frac{t}{\tau}$$

- Si ottiene una retta decrescente, la cui pendenza permette di ricavare τ e quindi L .



Misura dell' impedenza di ingresso dell' oscilloscopio

- Il manuale dell' oscilloscopio ISR622 fornisce tra le specifiche tecniche una impedenza di ingresso equivalente ad una resistenza di $1\text{ M}\Omega \pm 2\%$ con in parallelo una capacità di *circa* 25 pF
- Lo scopo di questa esperienza è evidenziare in quali casi tale impedenza sia ininfluenza sulle misure eseguite con l' oscilloscopio, e in quali casi invece se ne debba tenere conto.
- L' esperienza si basa sulla misura della risposta in frequenza di un circuito formato da un generatore di tensioni sinusoidali, una resistenza serie di valore R_s , il cavo BNC, e l' oscilloscopio, schematizzato nella figura sotto.
- La resistenza R_s viene inserita allo scopo di elevare artificialmente l' impedenza di uscita del generatore (originariamente pari a 50Ω), in modo da realizzare un *generatore equivalente* con impedenza di uscita che può essere resa non trascurabile rispetto all' impedenza di ingresso dell' oscilloscopio, evidenziando così l' effetto di tale impedenza.



Misura dell' impedenza di ingresso dell' oscilloscopio

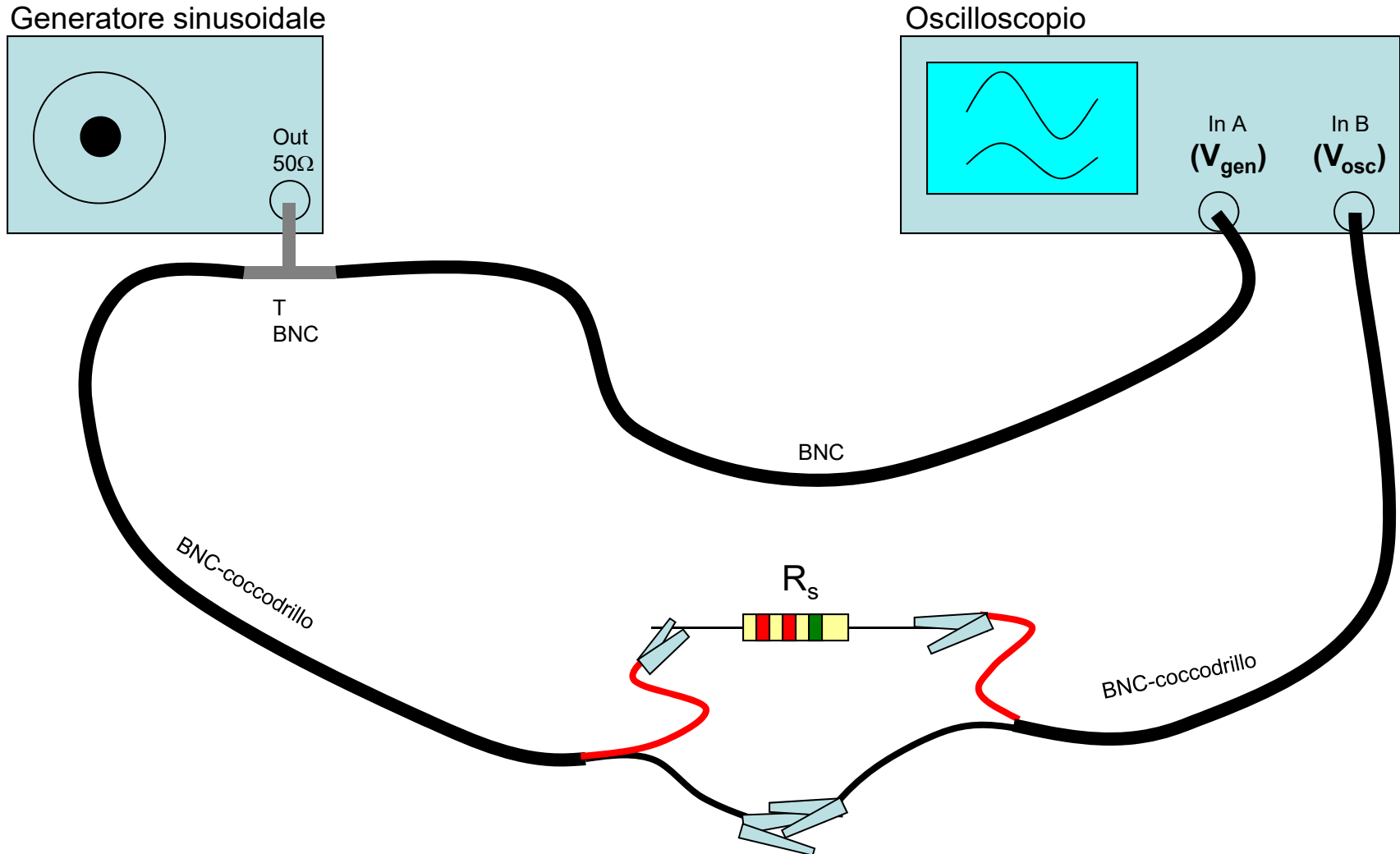
- l' analisi del circuito col metodo delle impedenze complesse dimostra che

$$\frac{V_{osc}}{V_{gen}} = \frac{R_o}{R_o + R_s} \frac{1}{1 + j\omega \left[\frac{R_o R_s}{R_o + R_s} \right] (C_o + C_{BNC})}$$

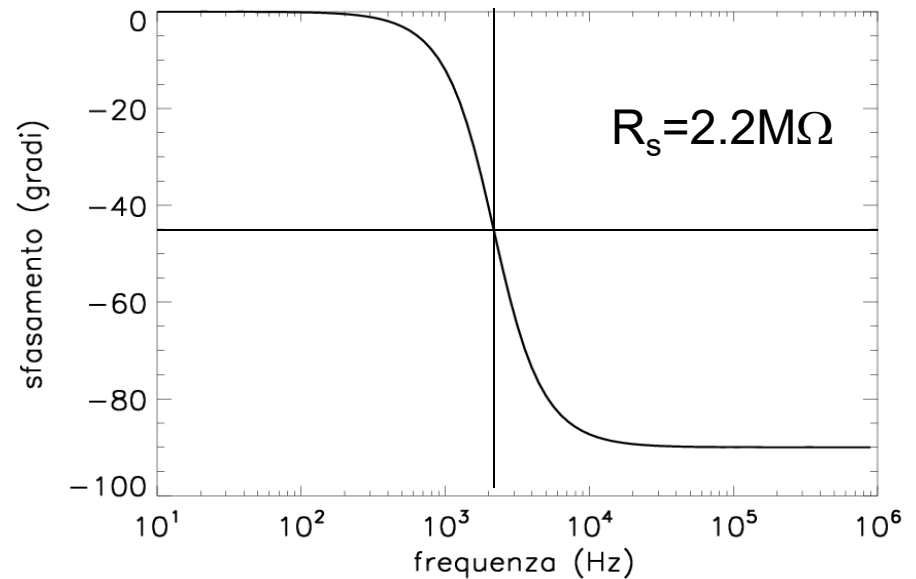
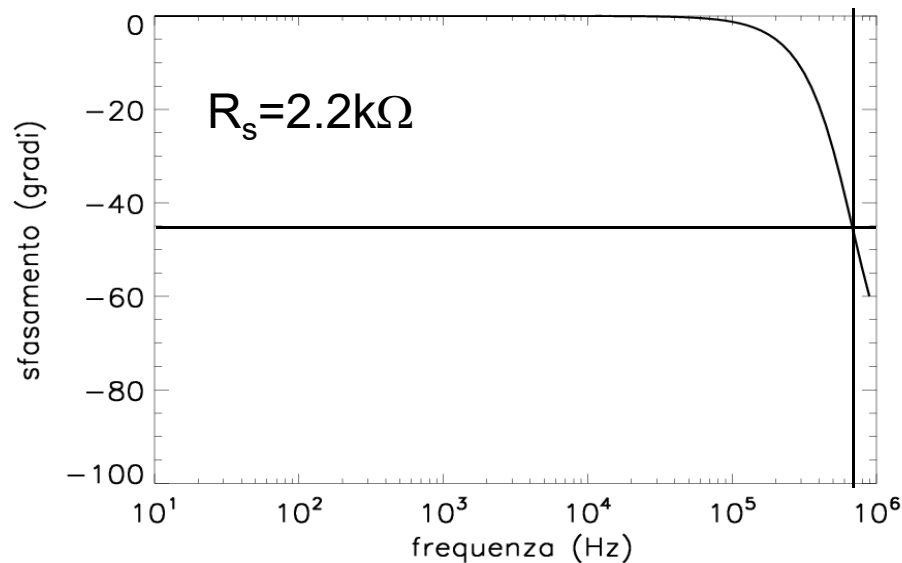
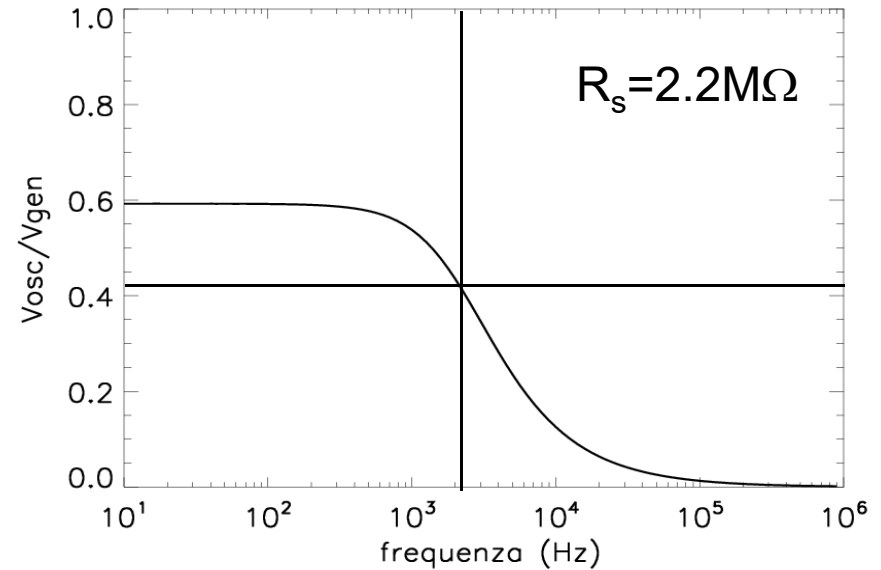
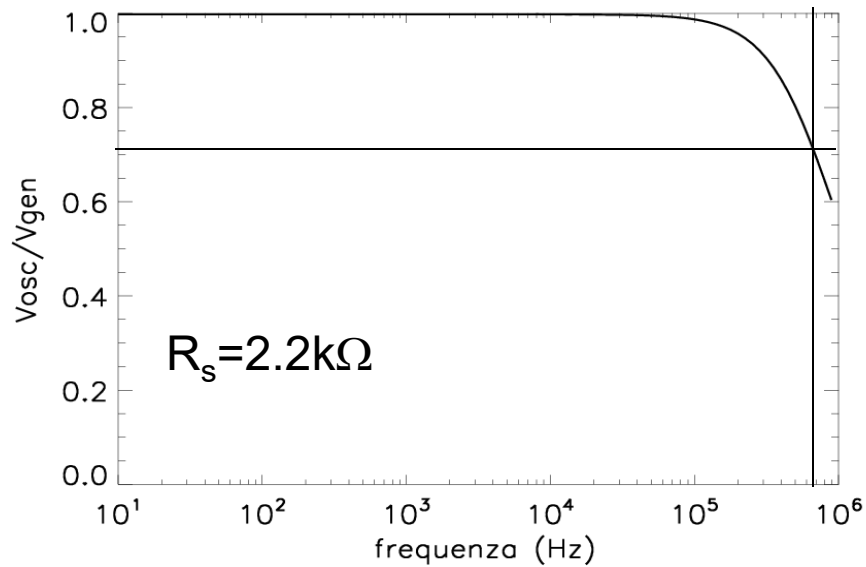
- Il circuito è quindi equivalente ad un semplice circuito RC con una ulteriore riduzione dell' ampiezza in uscita di un fattore $R_o/(R_o+R_s)$, e con una costante di tempo data dal prodotto tra il parallelo di R_s e R_o e il parallelo di C_o e C_{BNC} .
- La misura si esegue quindi in due casi: resistenza R_s molto minore della resistenza di ingresso dell' oscilloscopio (ad es. $R_s=2.2 \text{ k}\Omega$) e resistenza R_s maggiore della resistenza di ingresso dell' oscilloscopio (ad es. $R_s=2.2 \text{ M}\Omega$).
- In ambedue i casi, l' ampiezza del rapporto tra i segnali per frequenze tendenti a zero consente di ricavare la resistenza di ingresso dell' oscilloscopio R_o , poi la misura della frequenza di taglio consente di ricavare C_o+C_{BNC} . Sapendo la lunghezza del cavo BNC se ne può stimare la capacità (che per il coassiale RG58 è di 82 pF/m) e quindi per differenza trovare C_o .
- La precisione della misura è molto migliore nel caso in cui l' effetto dell' impedenza di ingresso sia considerevole, ovvero quando la resistenza serie è maggiore della resistenza di ingresso dell' oscilloscopio.

Misura dell' impedenza di ingresso dell' oscilloscopio

- Realizzazione pratica :



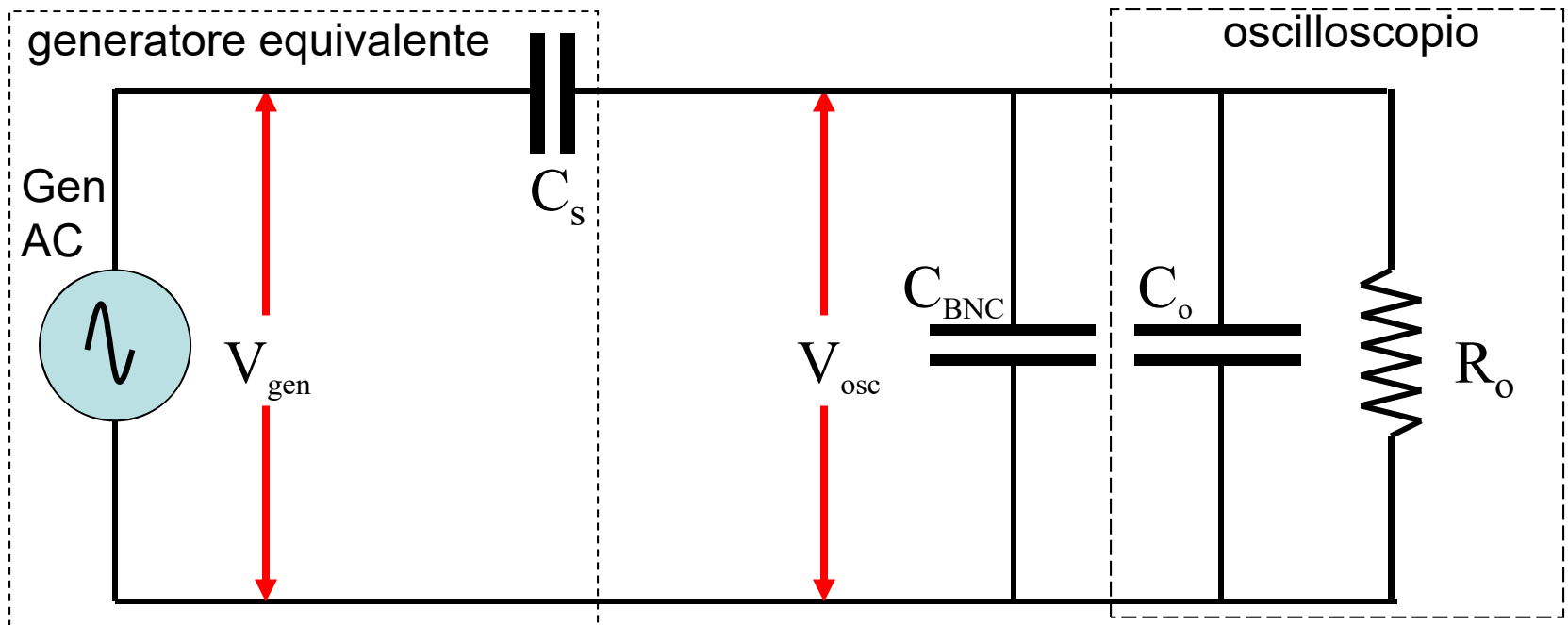
Misura dell' impedenza di ingresso dell' oscilloscopio



Tipici andamenti e frequenze di taglio aspettate

Misura della capacità di ingresso dell' oscilloscopio

- Il manuale dell' oscilloscopio ISR622 fornisce tra le specifiche tecniche una impedenza di ingresso equivalente ad una resistenza di $1\text{ M}\Omega \pm 2\%$ con in parallelo una capacità di *circa* 25 pF
- Nella precedente esperienza si misura con buona precisione la resistenza di ingresso, mentre è più problematica la misura precisa della capacità di ingresso.
- Si può migliorare la precisione della misura di C_o inserendo, al posto della resistenza serie, una capacità, in modo da realizzare un partitore capacitivo, come schematizzato in figura.



Misura della capacità di ingresso dell' oscilloscopio

- l' analisi del circuito col metodo delle impedenze complesse dimostra che

$$\frac{V_{osc}}{V_{gen}} = \frac{C_s}{C_o + C_{BNC} + C_s} \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{j\omega R_o (C_o + C_{BNC} + C_s)} \right]}$$

- Per frequenze sufficientemente alte (scoprire quali !), il circuito è un partitore capacitivo ideale, e la somma di capacità di ingresso e capacità del BNC si può ricavare dalla formula

$$C_o + C_{BNC} = C_s \frac{1 - \left. \frac{V_{osc}}{V_{gen}} \right|_{\omega \rightarrow \infty}}{\left. \frac{V_{osc}}{V_{gen}} \right|_{\omega \rightarrow \infty}}$$

- Per ricavare la capacità di ingresso del solo oscilloscopio, va stimata la capacità del BNC connesso all' ingresso dell' oscilloscopio. Questo si può fare misurandone la lunghezza e assumendo 82 pF/m di capacità per unità di lunghezza del cavo RG58.

Misura della capacità di ingresso dell' oscilloscopio

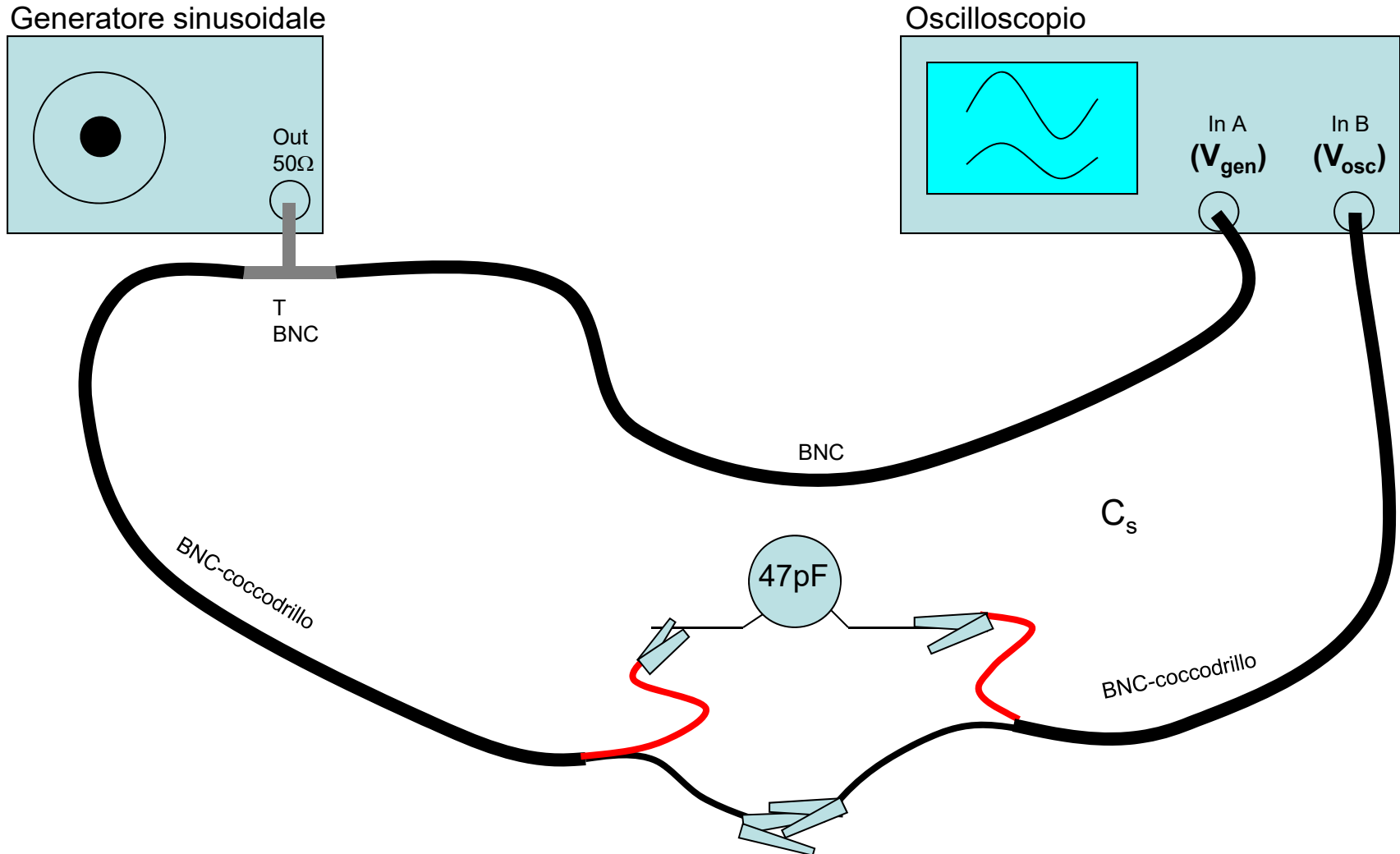
- Una ulteriore possibilità è allungare il cavo BNC aggiungendone un altro spezzone di lunghezza nota, e rimisurare $C_{BNC} + C_o$. Siccome la capacità del cavo è proporzionale alla lunghezza, si può scrivere un sistema che descrive le due misure:

$$\begin{cases} (C_{BNC} + C_o)_{Misura1} = c_{BNC} \ell_1 + C_o \\ (C_{BNC} + C_o)_{Misura2} = c_{BNC} \ell_2 + C_o \end{cases}$$

- Da questo si ricava sia la capacità per unità di lunghezza c_{BNC} che il valore di C_o .

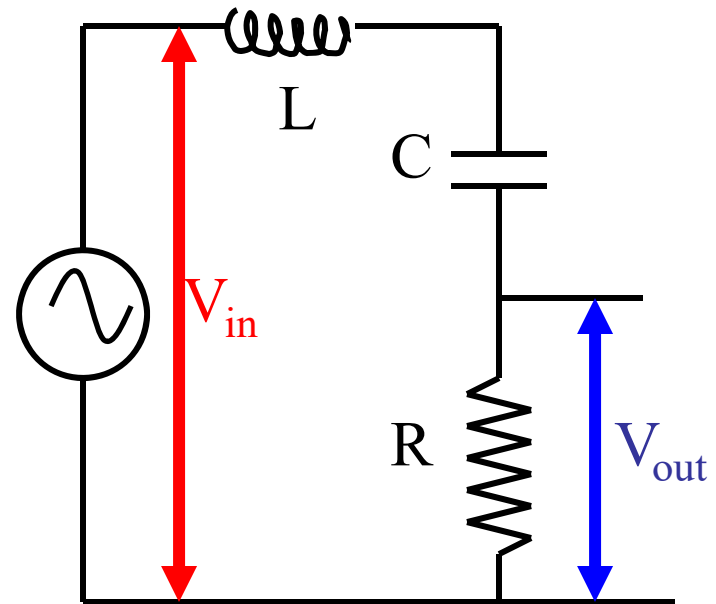
Misura della capacità di ingresso dell' oscilloscopio

- Realizzazione pratica :



Come costruire un RLC con un buon Q_o (esperienza RLC)

- Il filtro RLC serve a selezionare una banda di frequenze intorno a una particolare frequenza di risonanza, dove normalmente c'è il segnale che interessa, mentre alle altre frequenze c'è solo rumore.
- Se Q_o è alto, la banda selezionata è stretta, e si elimina piu' rumore.

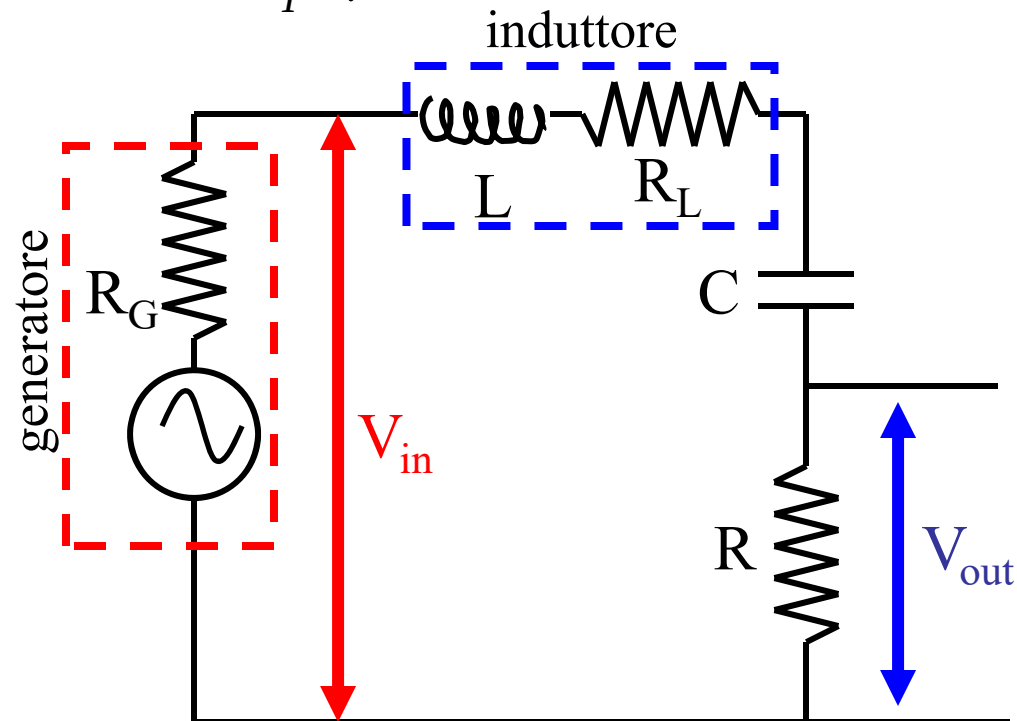


Come costruire un RLC con un buon Q_o

- Per ottenere un Q_o alto per una data f_o , R_T deve essere piccola.
- R_T è la somma di tutte le R in serie nel circuito:
 - La R_G interna del generatore
 - La R da cui si preleva il segnale in uscita
 - La R_L interna all'induttore.
- $R_T = R_G + R_L + R$

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



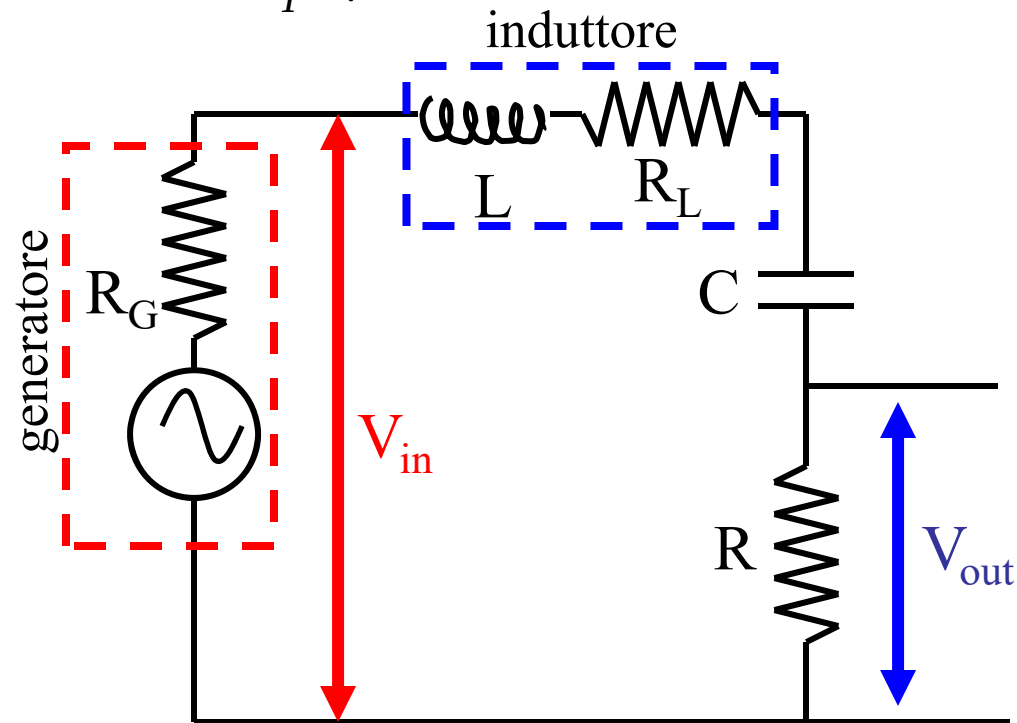
Come costruire un RLC con un buon Q_o

- R non può essere troppo piccola, altrimenti il segnale in uscita $V_{out}=RI$ è piccolo. Un buon compromesso si ha per **$R=10\Omega$**

- R_L dipende dalla qualità dell'induttore. Valori ragionevoli sono **$R_L=10\Omega$** per $L=10\text{mH}$. Il valore di R_L può essere misurato con un ohmetro in continua.

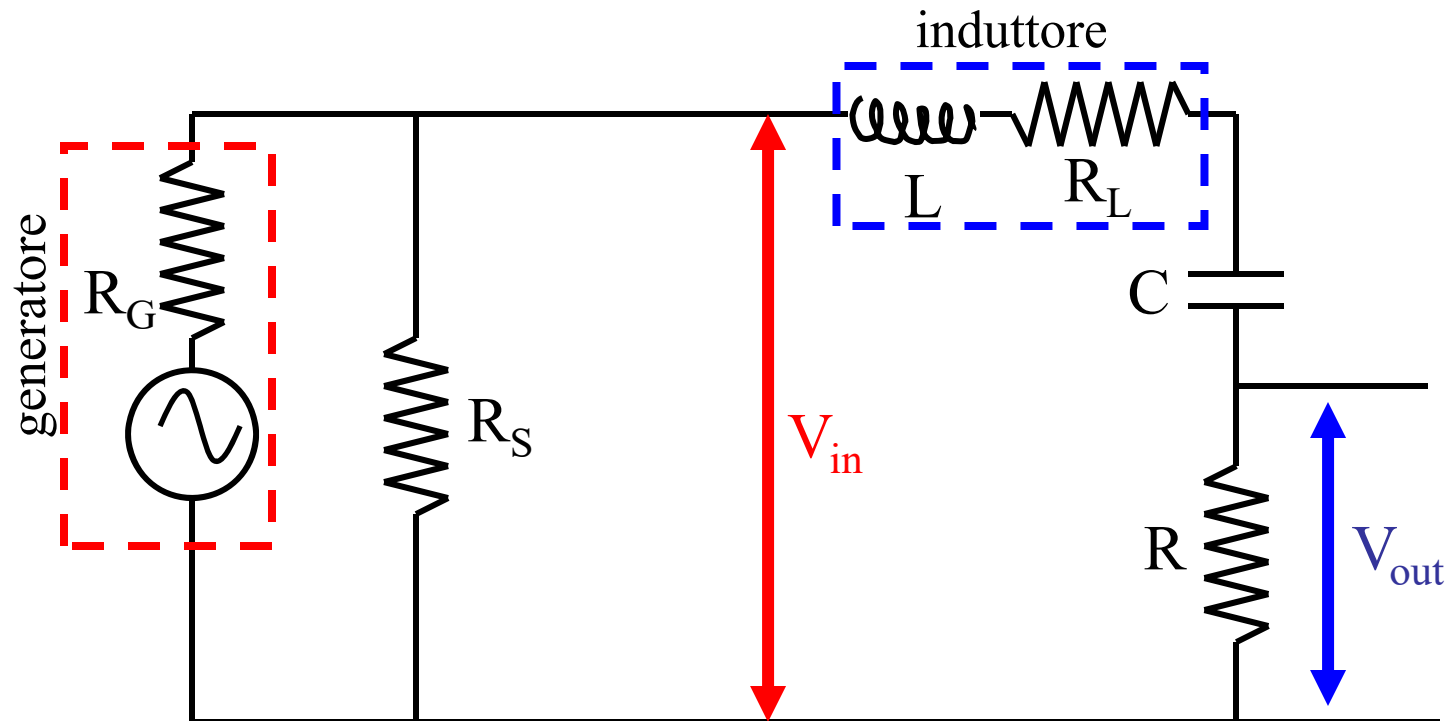
$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



Come costruire un RLC con un buon Q_o

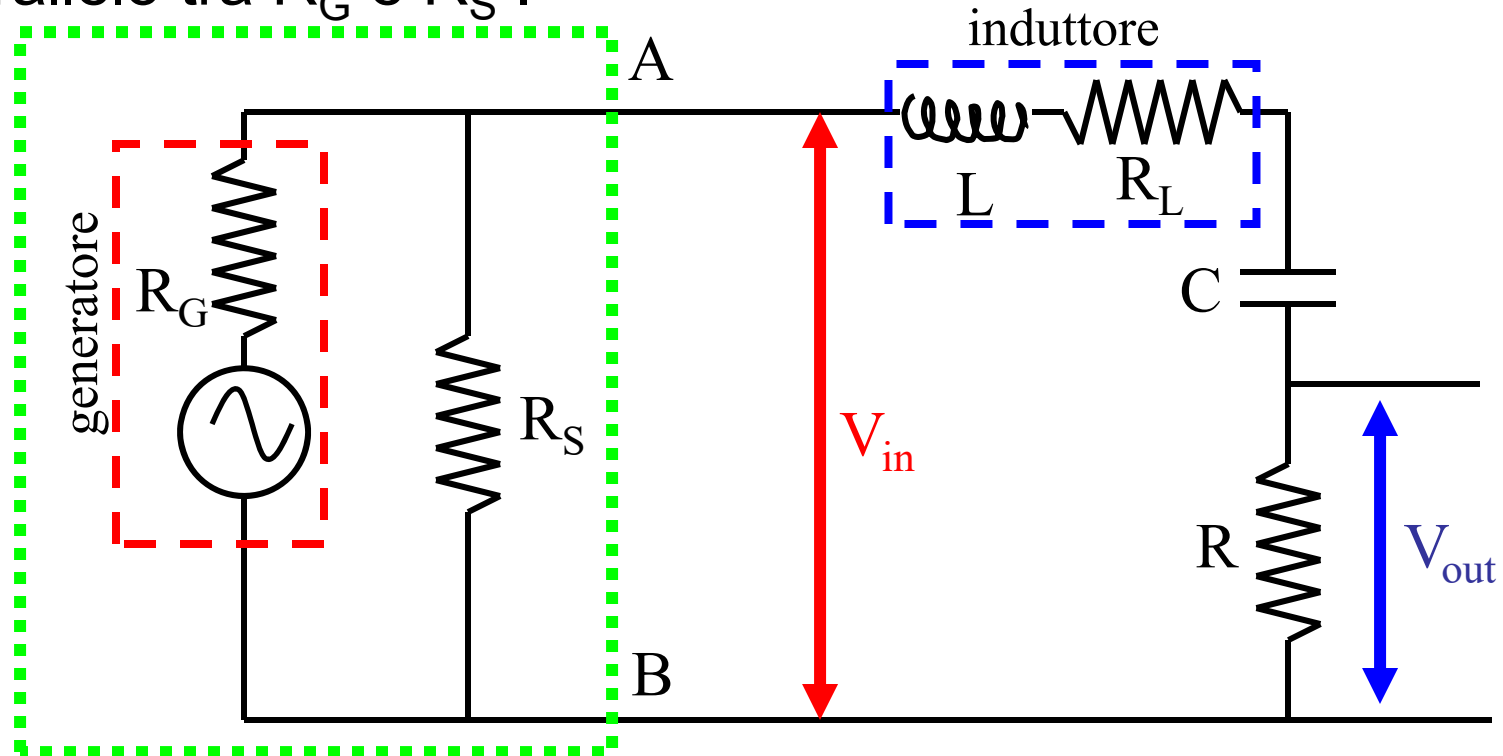
- R_G è normalmente di 50Ω , quindi non è trascurabile rispetto alle altre. Un buon compromesso consiste nell'inserire una resistenza di **shunt** $R_S = 10\Omega$ in parallelo al generatore.



Come costruire un RLC con un buon Q_o

- Secondo il teorema di Thevenin il nuovo generatore (ottenuto tra i punti A e B del circuito, riquadro verde) ha una resistenza interna pari al parallelo tra R_G e R_S .

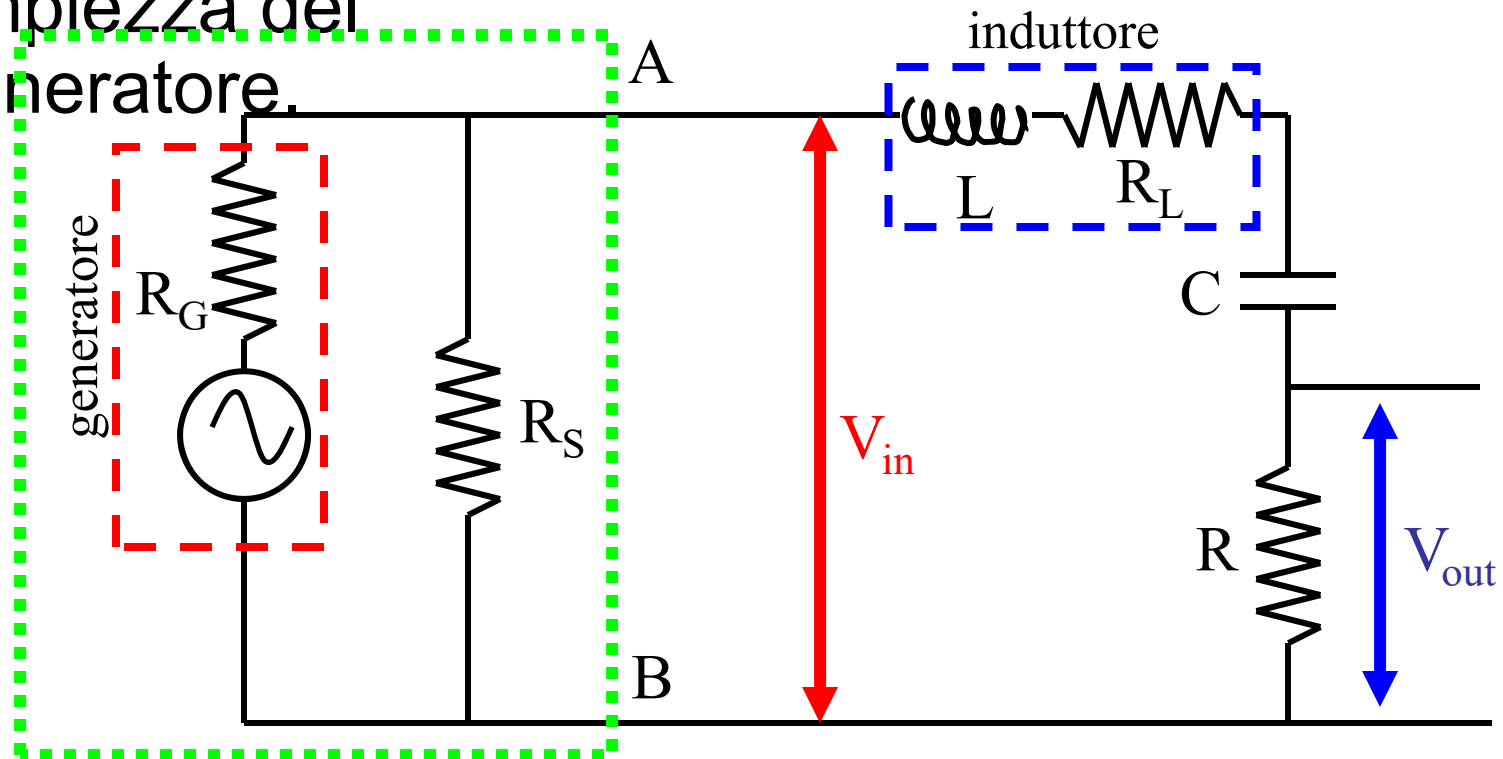
$$R'_G = \frac{R_G R_S}{R_G + R_S} = \frac{50 \times 10}{50 + 10} \cong 8.3 \, \Omega$$



Come costruire un RLC con un buon Q_o

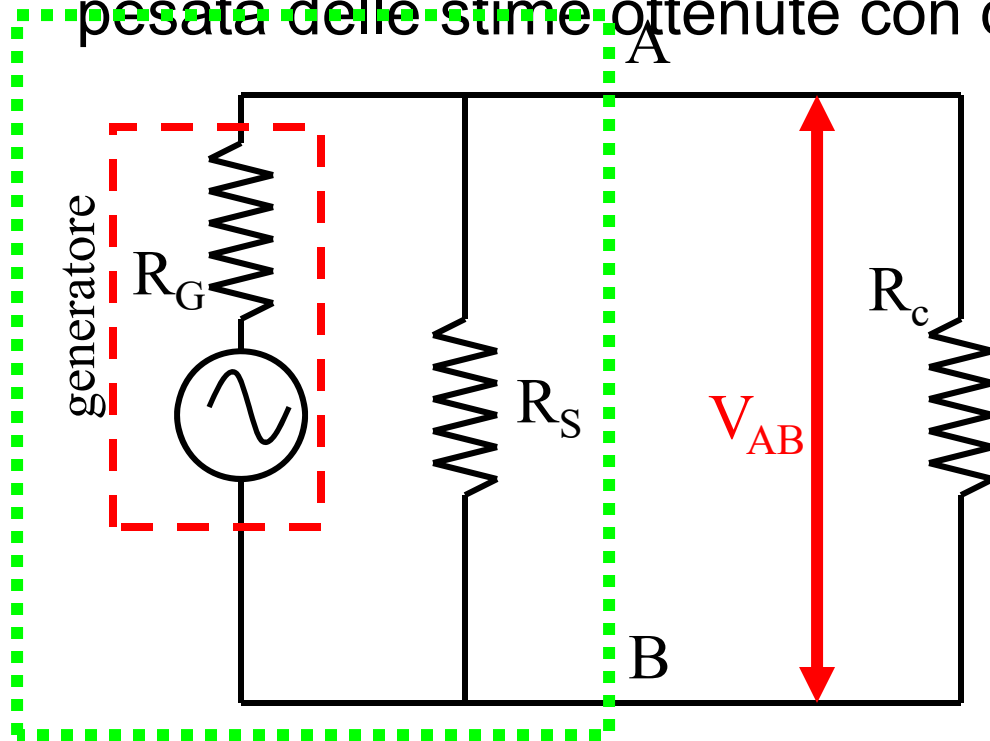
- La V_{in} sarà inferiore a quella che avremmo in assenza di R_s , ma questo si può rimediare agendo sul potenziometro di ampiezza del generatore.

$$R'_G = \frac{R_G R_s}{R_G + R_s} = \frac{50 \times 10}{50 + 10} \cong 8.3 \, \Omega$$



Verifica dell'impedenza d' uscita del generatore

- La prima cosa da fare sarà collegare il generatore alla resistenza di shunt e misurare la resistenza interna equivalente.
- Si usa l'oscilloscopio e si misura l'ampiezza della tensione tra A e B al variare del carico R_c che connettiamo tra A e B. Si parte dall' ampiezza in assenza di carico $R_c = \infty$ e si varia poi R_c tra 20Ω e 1Ω . R_G si ottiene facendo la media pesata delle stime ottenute con diversi R_c .



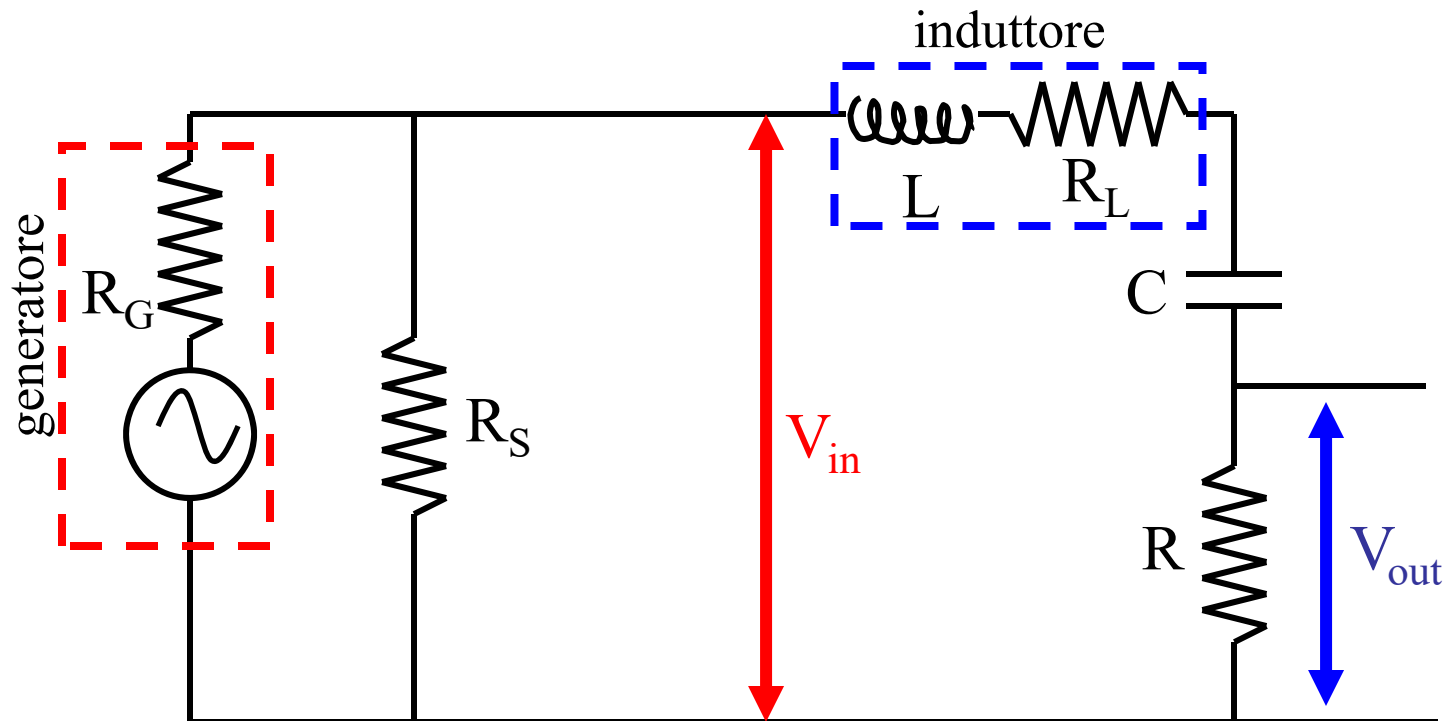
$$V_{AB}(R_c) = V_{AB}(\infty) \frac{R_c}{R_c + R'_G}$$

$$R'_G = R_c \left[\frac{V_{AB}(\infty)}{V_{AB}(R_c)} - 1 \right]$$

Come costruire un RLC con un buon Q_o

- In totale otteniamo una $R_T = R_G + R_L + R$ dell'ordine di 30Ω .
- Per avere un buon Q_o conviene scegliere una f_o abbastanza alta:

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_o \frac{L}{R_T}$$



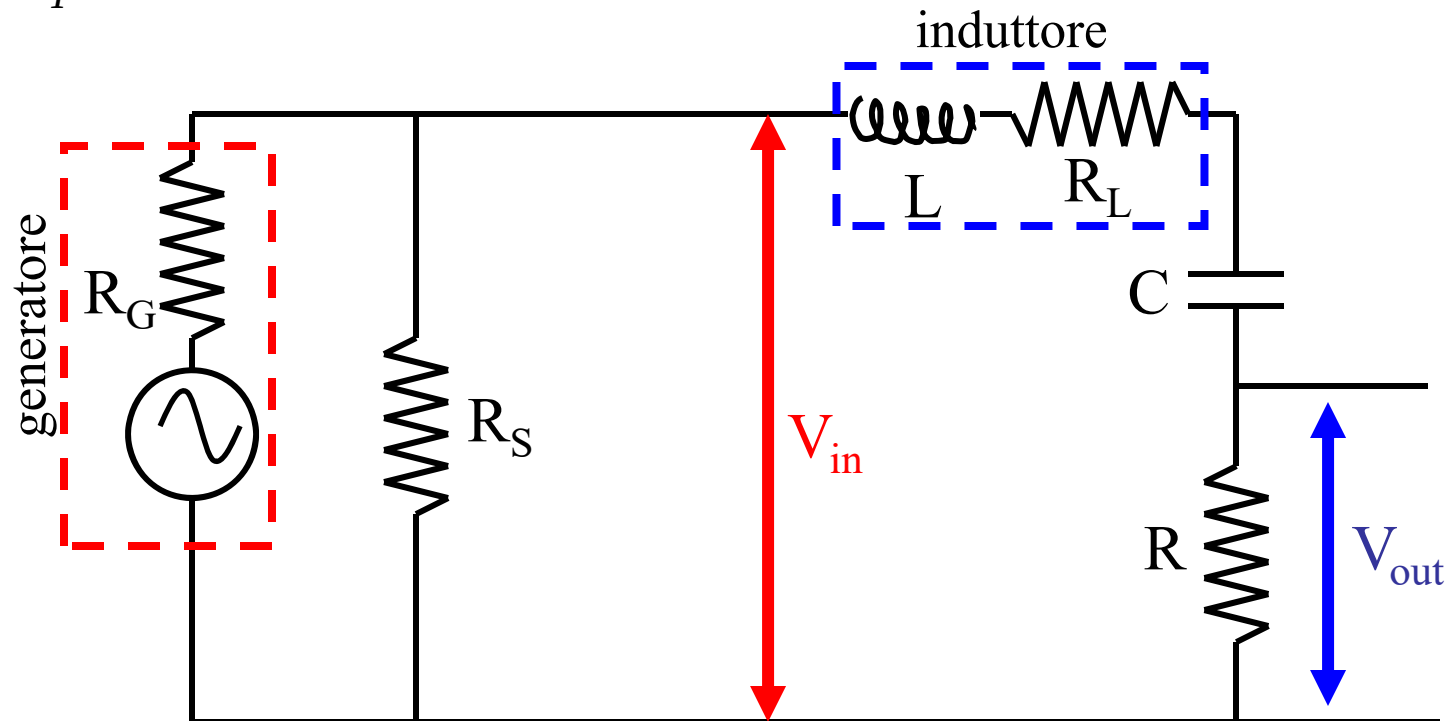
Come costruire un RLC con un buon Q_o

- Con $C=47\text{nF}$ e $L=1\text{mH}$ si

ottiene

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-3}47 \cdot 10^{-9}}} \text{ Hz} \cong 23\text{kHz}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{30} \sqrt{\frac{10^{-3}}{47 \cdot 10^{-9}}} \cong 4.9$$



Come costruire un RLC con un buon Q_o

La risposta si calcola con le solite formule:

$$\frac{V_{out}}{R} = I_o = \frac{V_{gen} / R_T}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

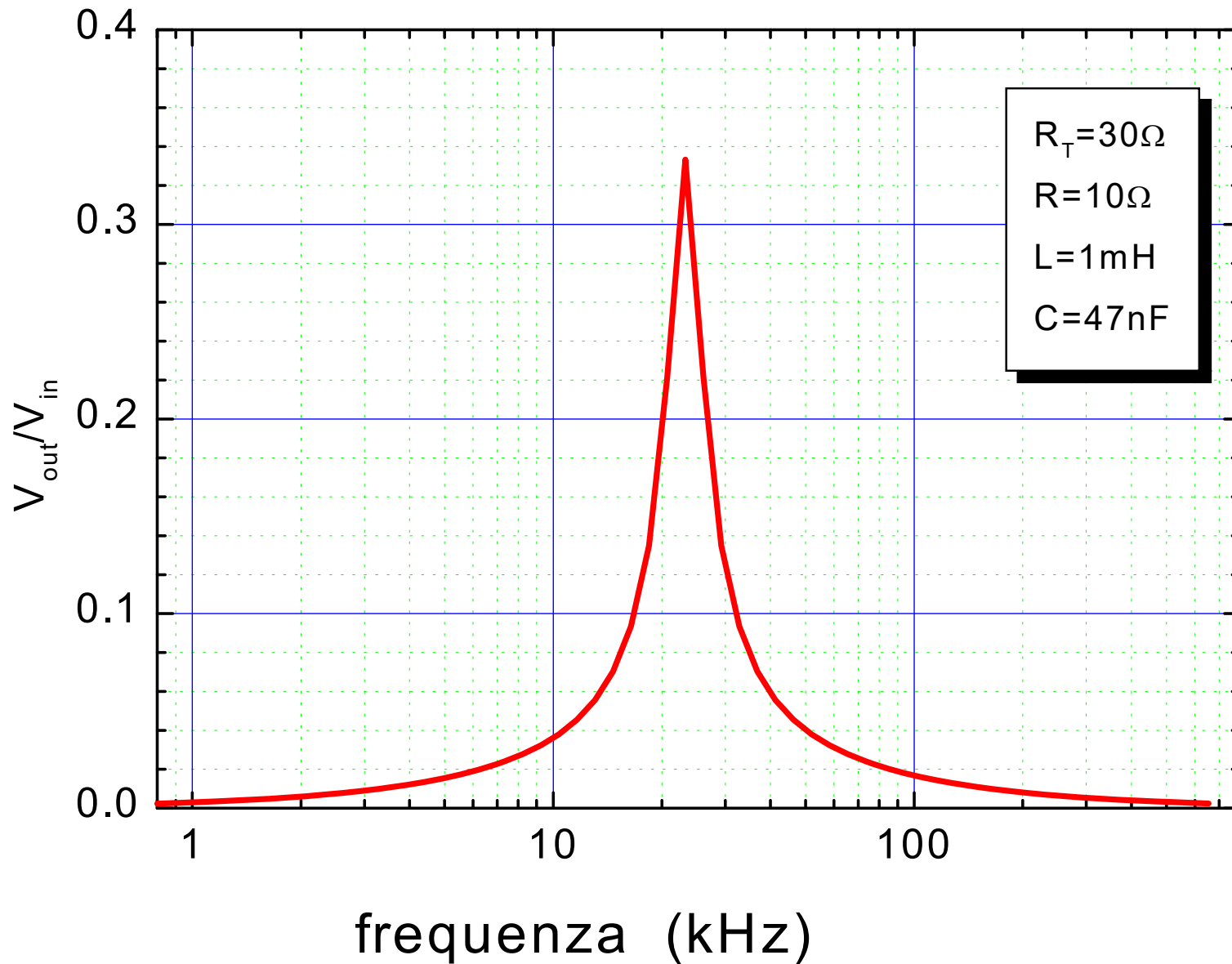
$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

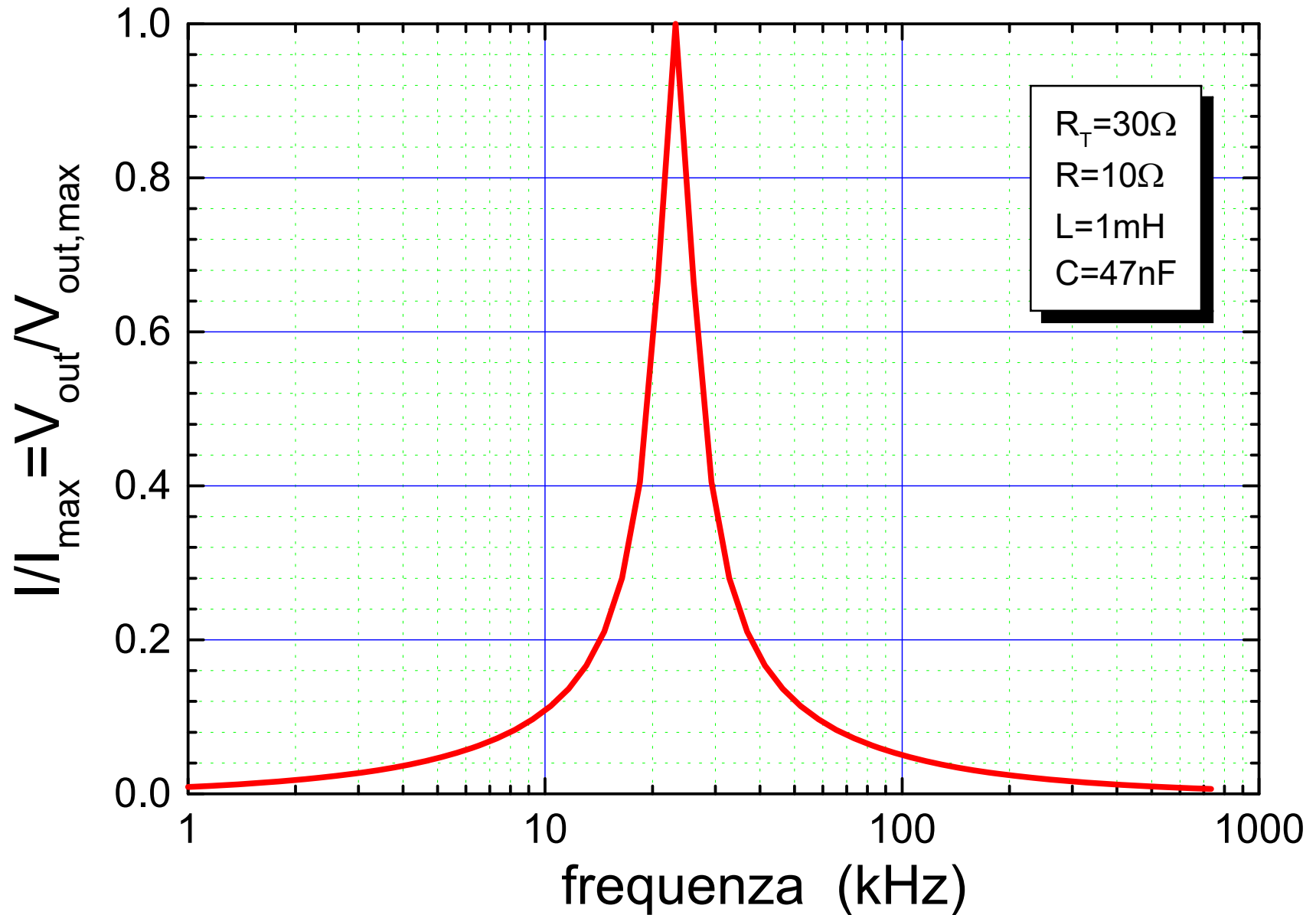
$$\frac{I_o}{I_{o,MAX}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

$$\varphi = \arctan \left[Q_o \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right) \right]$$

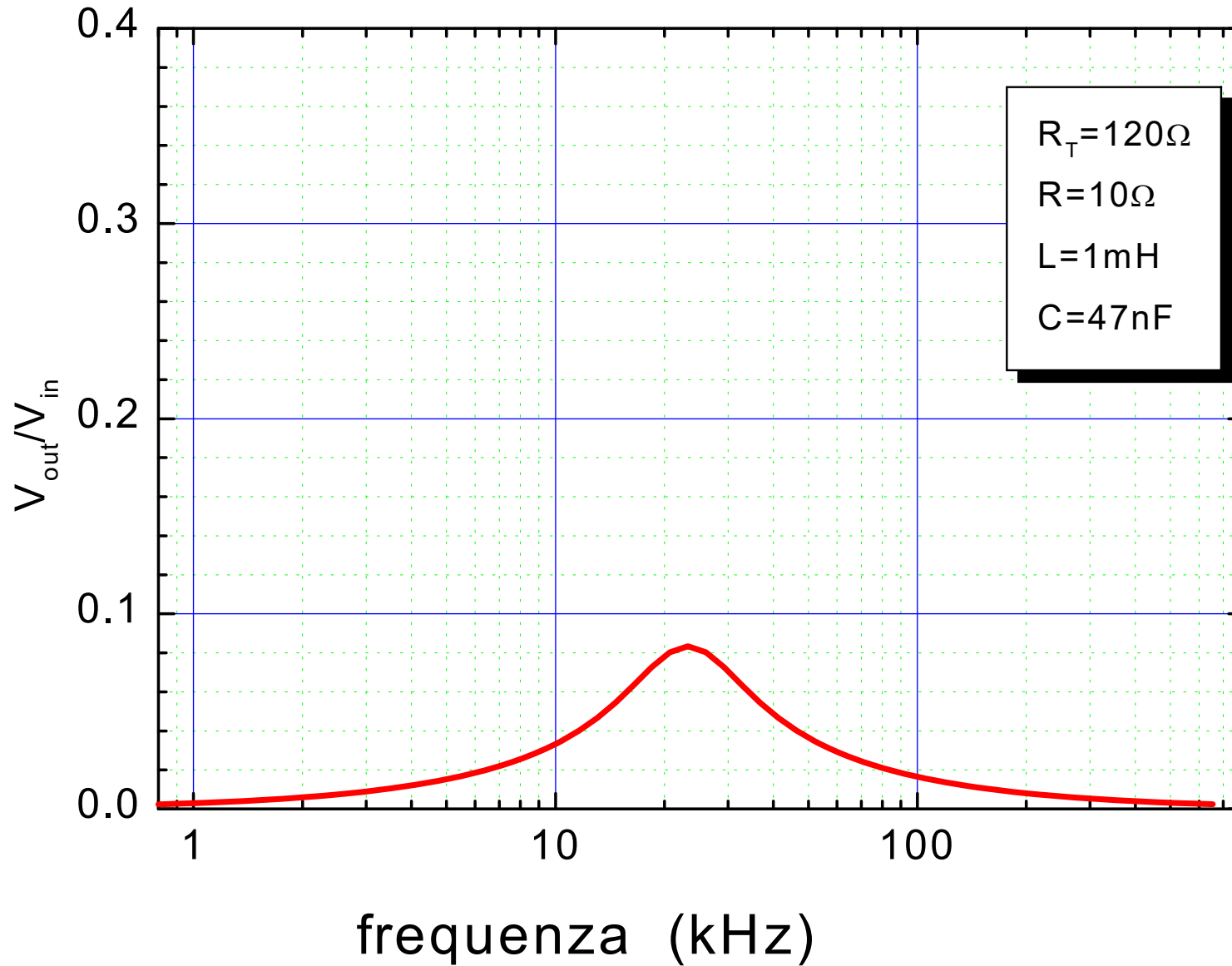
Con un induttore di buona qualità ($L=1\text{mH}$, $R_L=10\Omega$) :



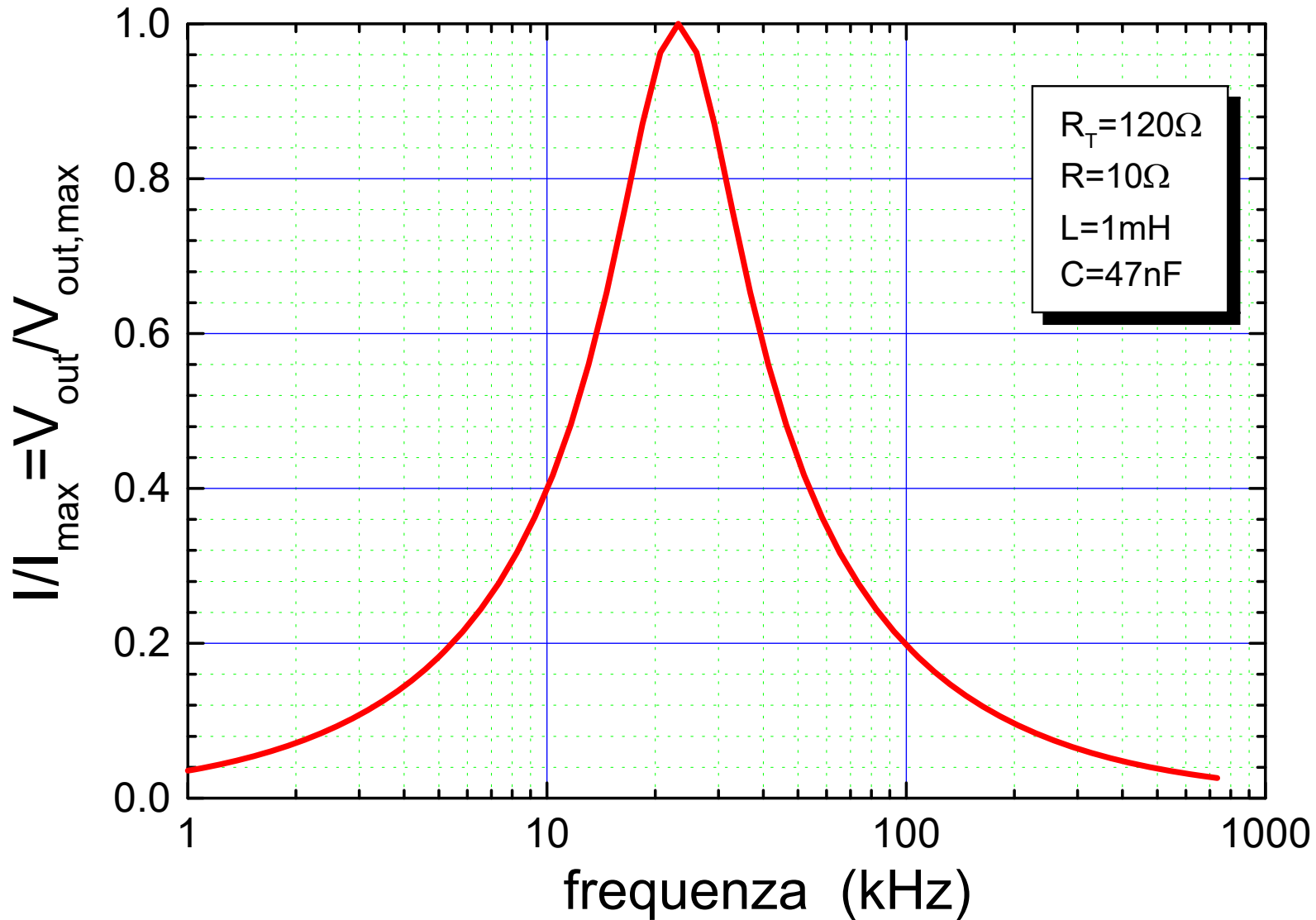
Con un induttore di buona qualità ($L=1\text{mH}$, $R_L=10\Omega$) :

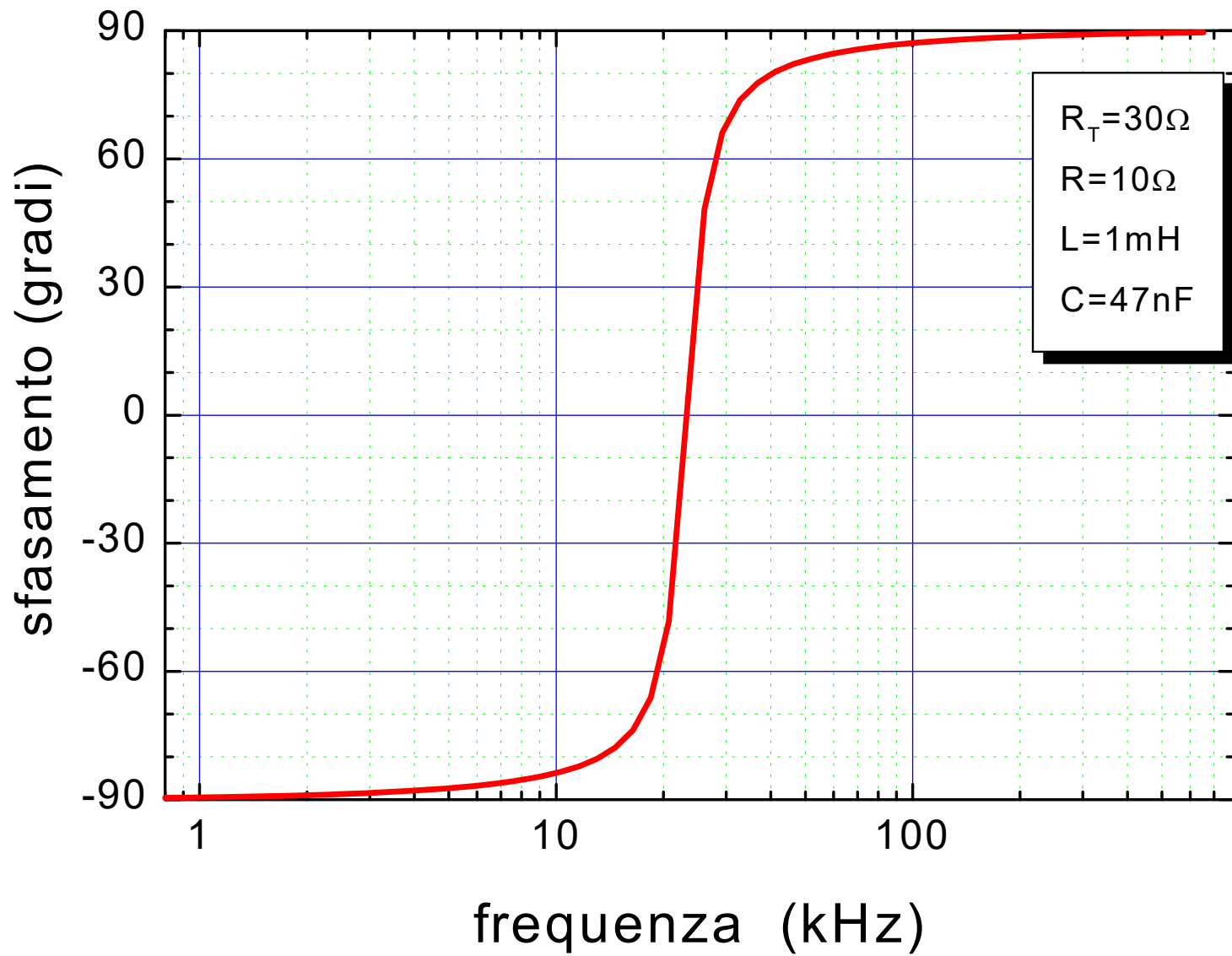


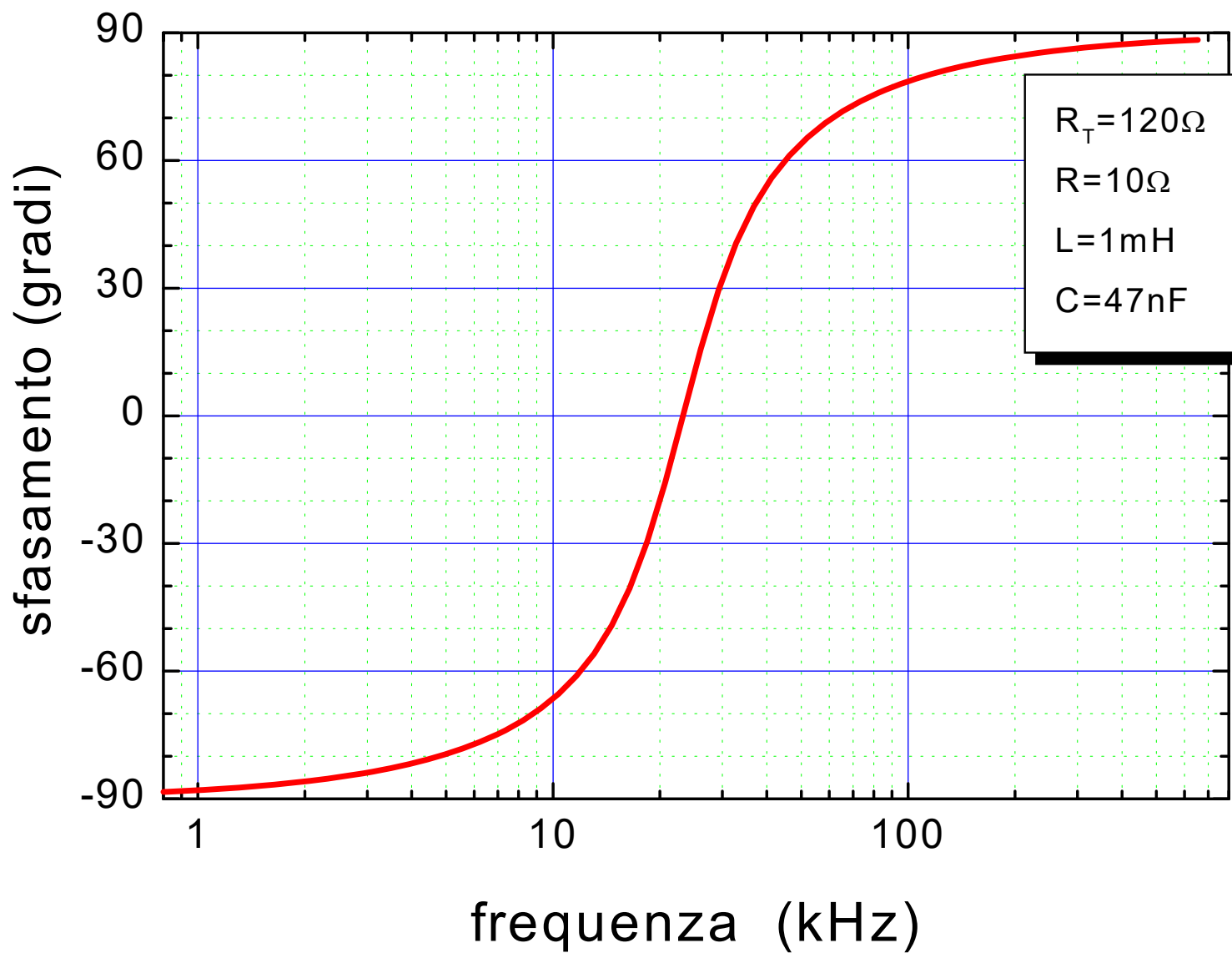
Con un induttore di cattiva qualità ($L=1\text{mH}$, $R_L=100\Omega$) :



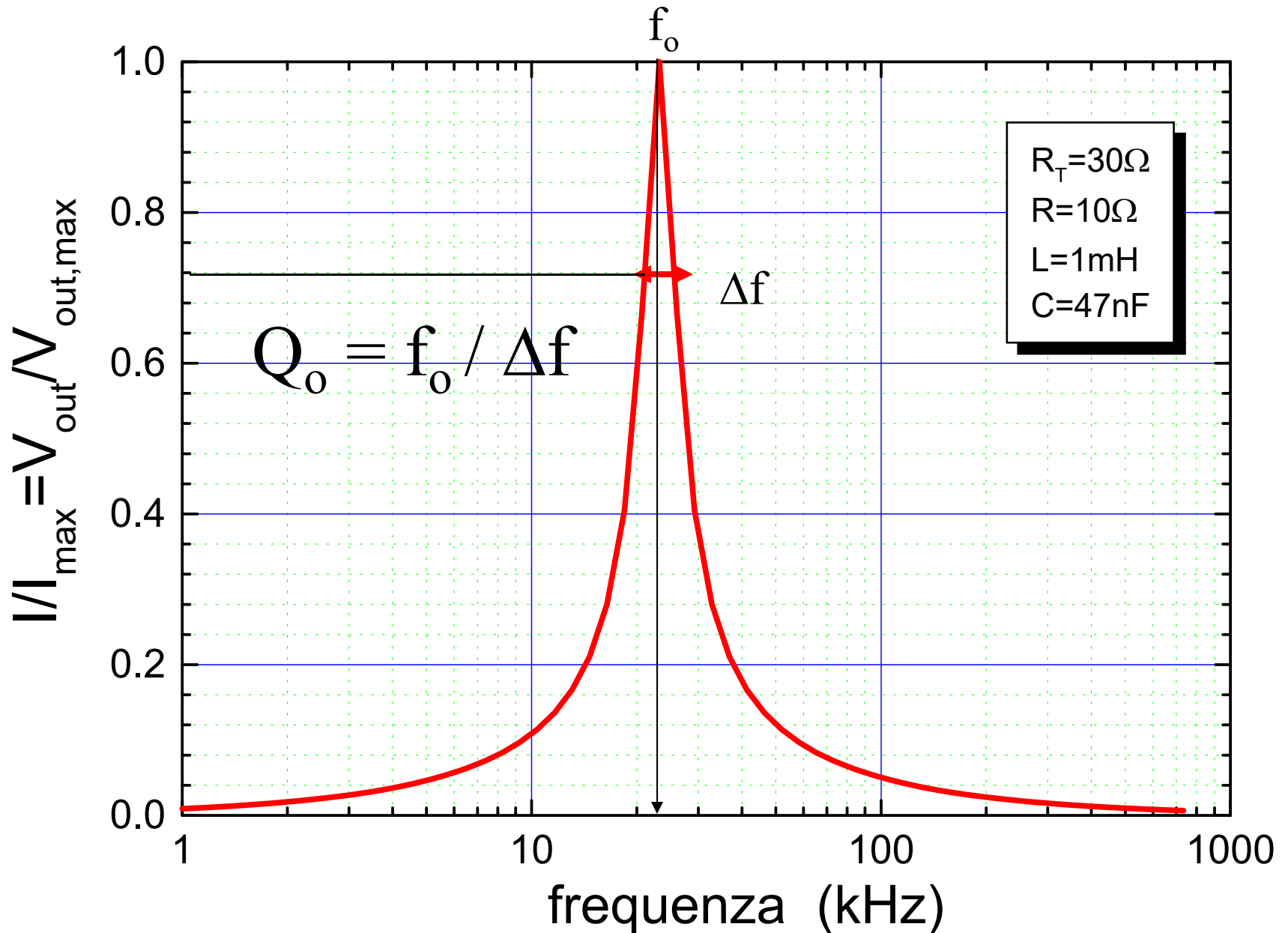
Con un induttore di cattiva qualità ($L=1\text{mH}$, $R_L=100\Omega$) :



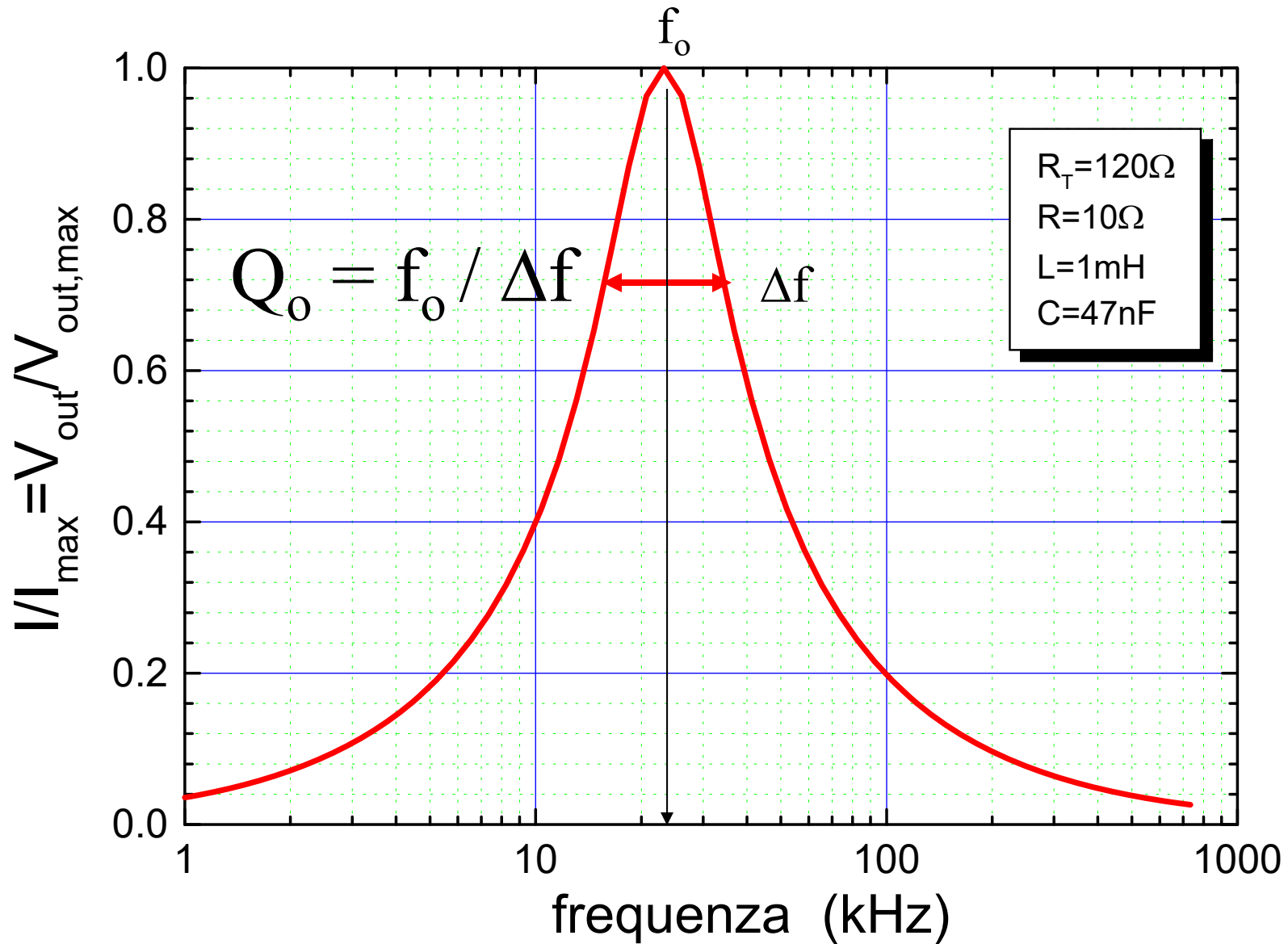




Con un induttore di buona qualità ($L=1\text{mH}$, $R_L=10\Omega$) :

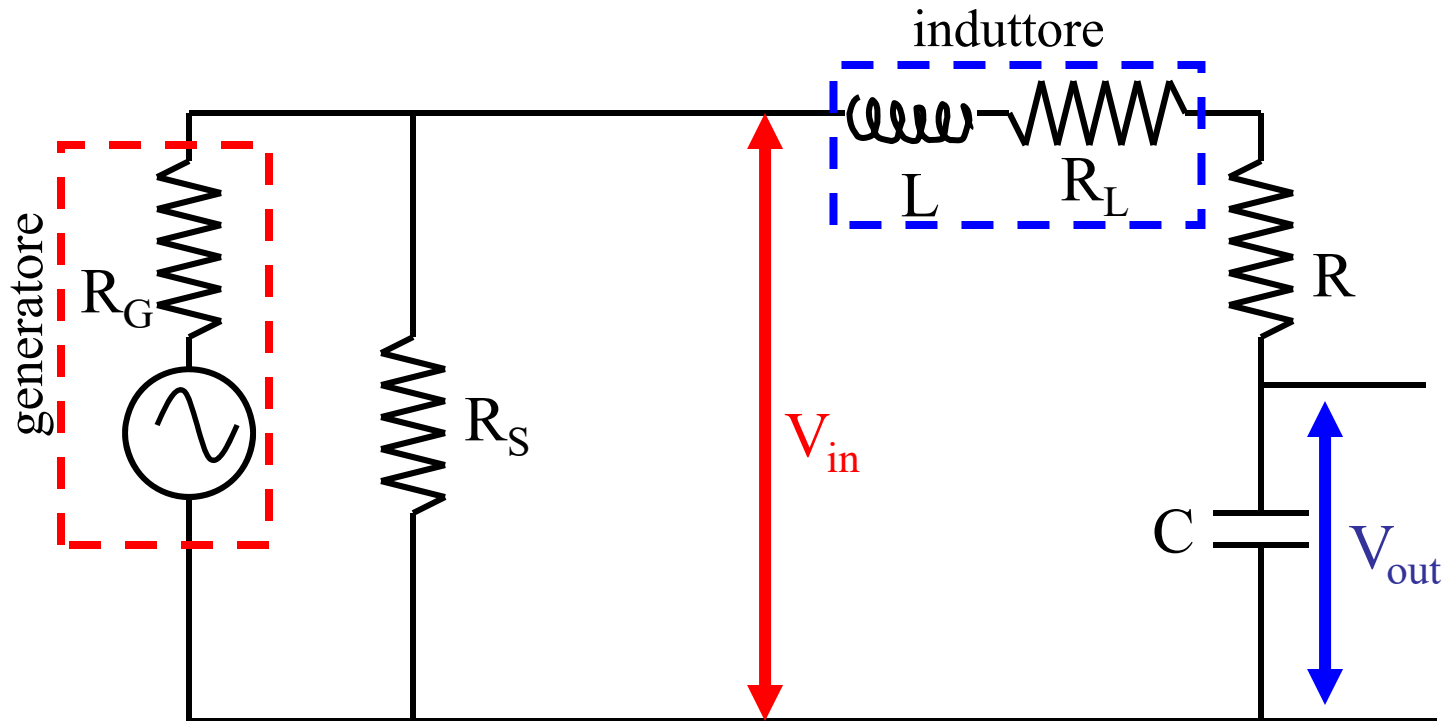


Con un induttore di cattiva qualità ($L=1\text{mH}$, $R_L=100\Omega$) :



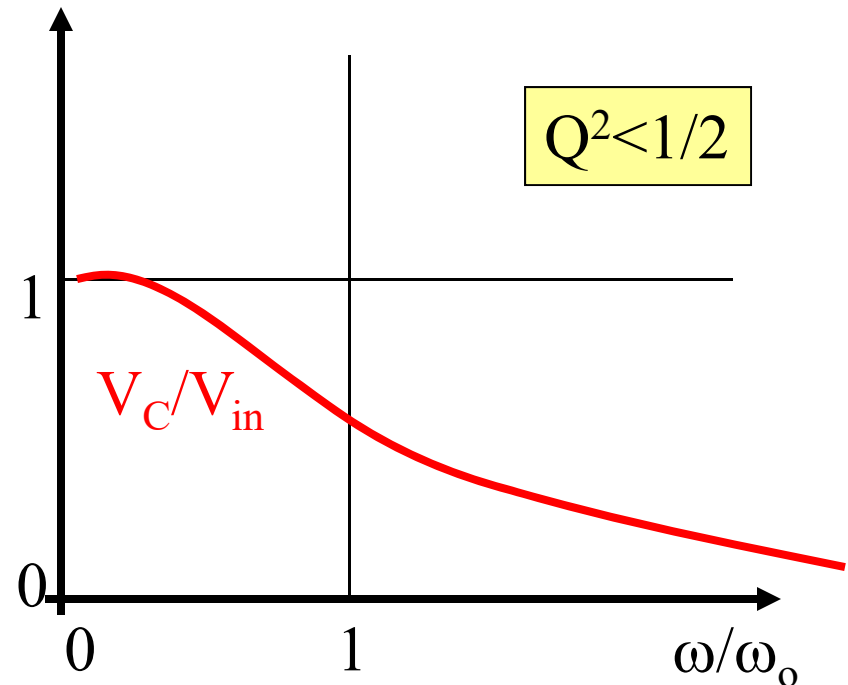
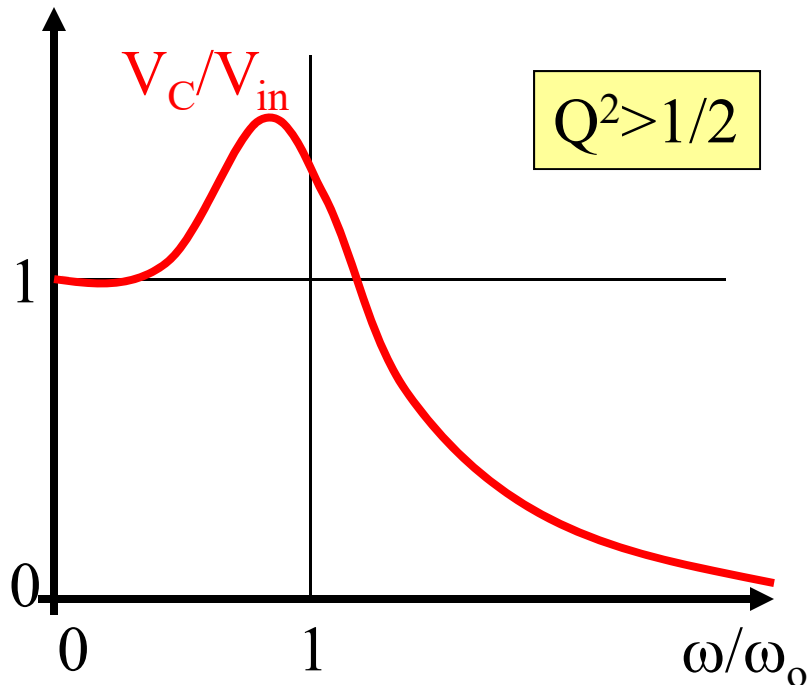
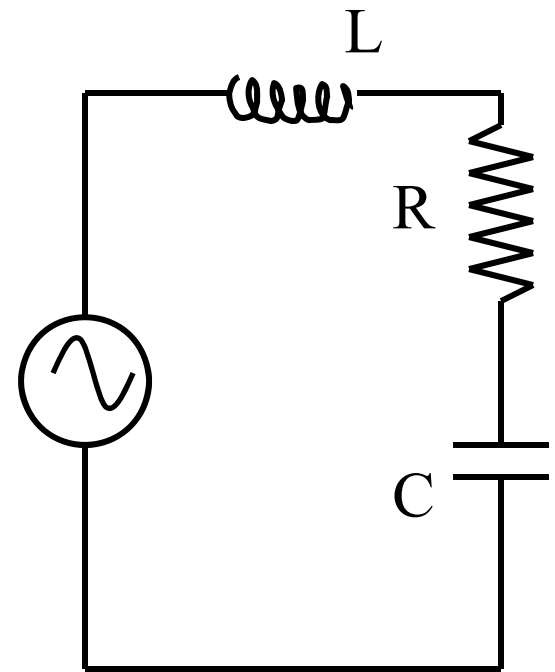
Studio delle extratensioni

- Si modifica il circuito prendendo il segnale d'uscita ai capi di C.
- Si graficano $V_{out}/V_{in}(f)$ e $\phi(f)$



Studio delle extratensioni

$$\frac{V_C}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$



RLC serie in regime sinusoidale

1. Scelta dei componenti. Si suggerisce: $R=10\Omega$, $L=1$ mH, $C=47$ nF, $R_{\text{shunt}}=10\Omega$. Si accettano (e apprezzano) comunque scelte diverse, a patto che producano un Q maggiore (e misurabile con la strumentazione a disposizione).
2. Misure dei componenti con l'ohmetro e il capacimetro MITEK. Ricordarsi di misurare la resistenza interna dell'induttanza. Ricordarsi di valutare l'errore. Stima teorica di f_o e Q (e delle relative incertezze) dalle formule:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
$$Q = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

RLC serie in regime sinusoidale

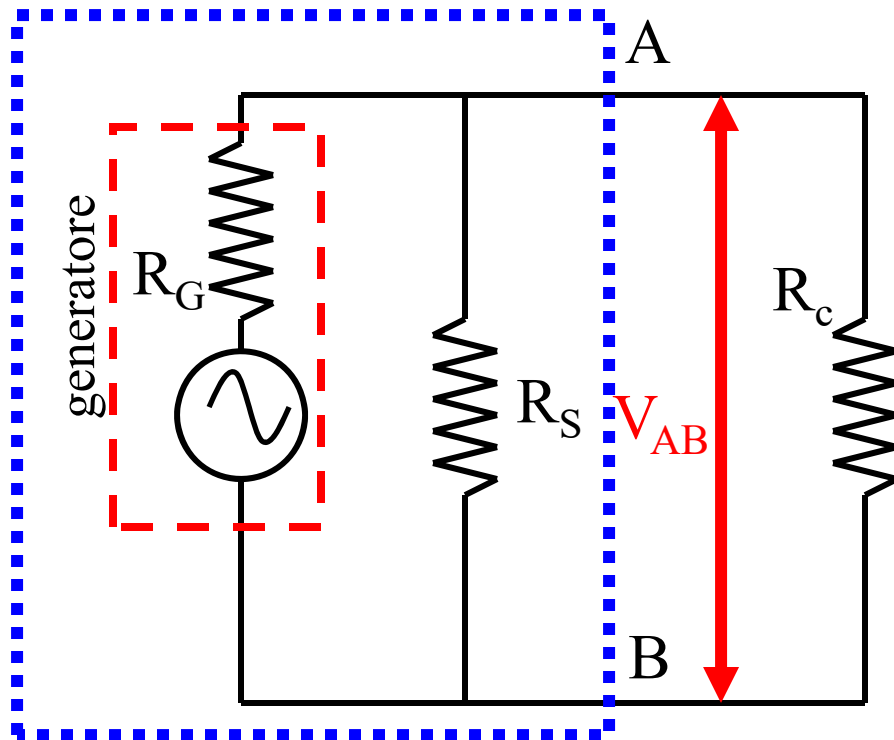
- :
3. Verifica della impedenza di uscita del generatore “shuntato” confrontando l’ampiezza del segnale in uscita con e senza resistenza di carico (10Ω e’ una buona scelta). La formula e’

$$V_{AB}(R_c) = V_{AB}(\infty) \frac{R_c}{R_c + R'_G}$$

$$R'_G = R_c \left[\frac{V_{AB}(\infty)}{V_{AB}(R_c)} - 1 \right]$$

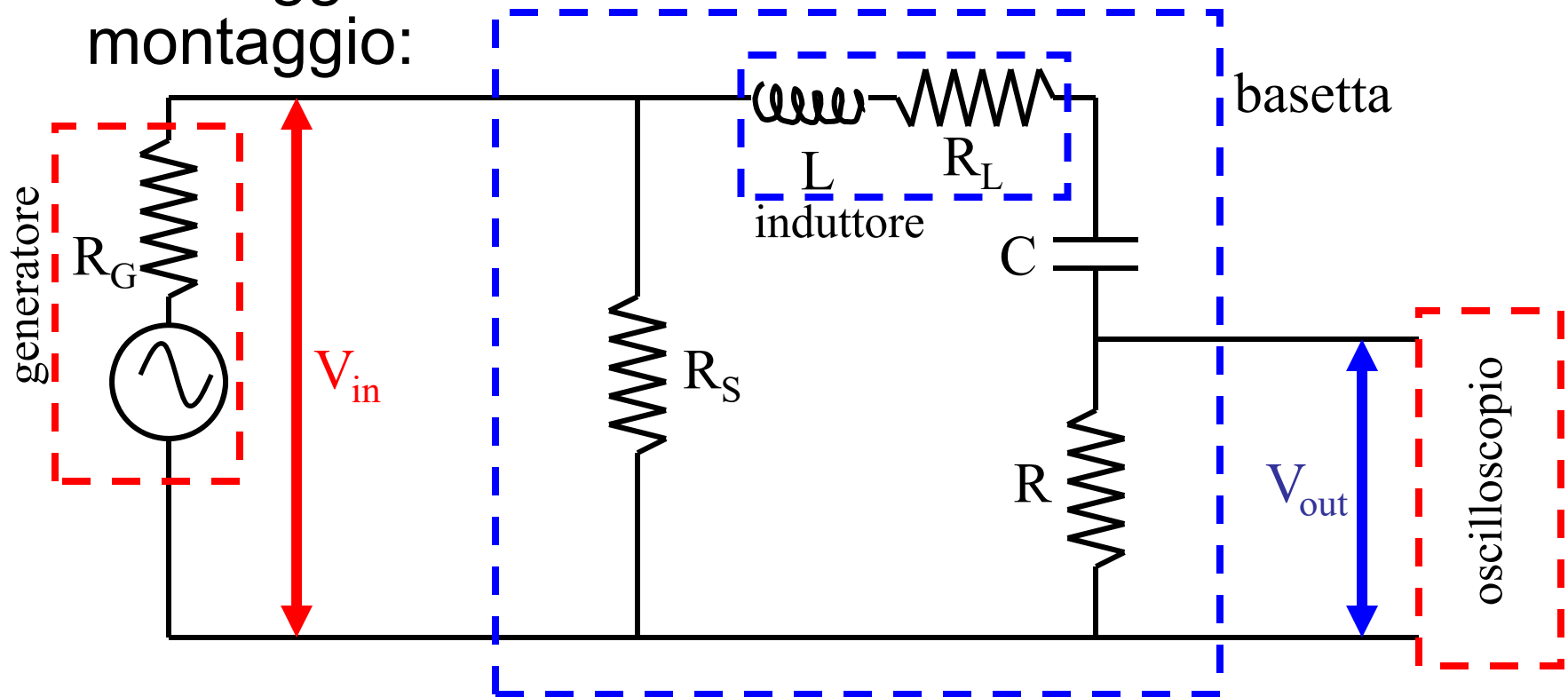
Con i componenti suggeriti dovrebbe venire:

$$R'_G = \frac{R_G R_S}{R_G + R_S} = \frac{50 \times 10}{50 + 10} \cong 8.3 \Omega$$



RLC serie in regime sinusoidale

4. Montaggio del circuito sulla basetta. Schema di montaggio:

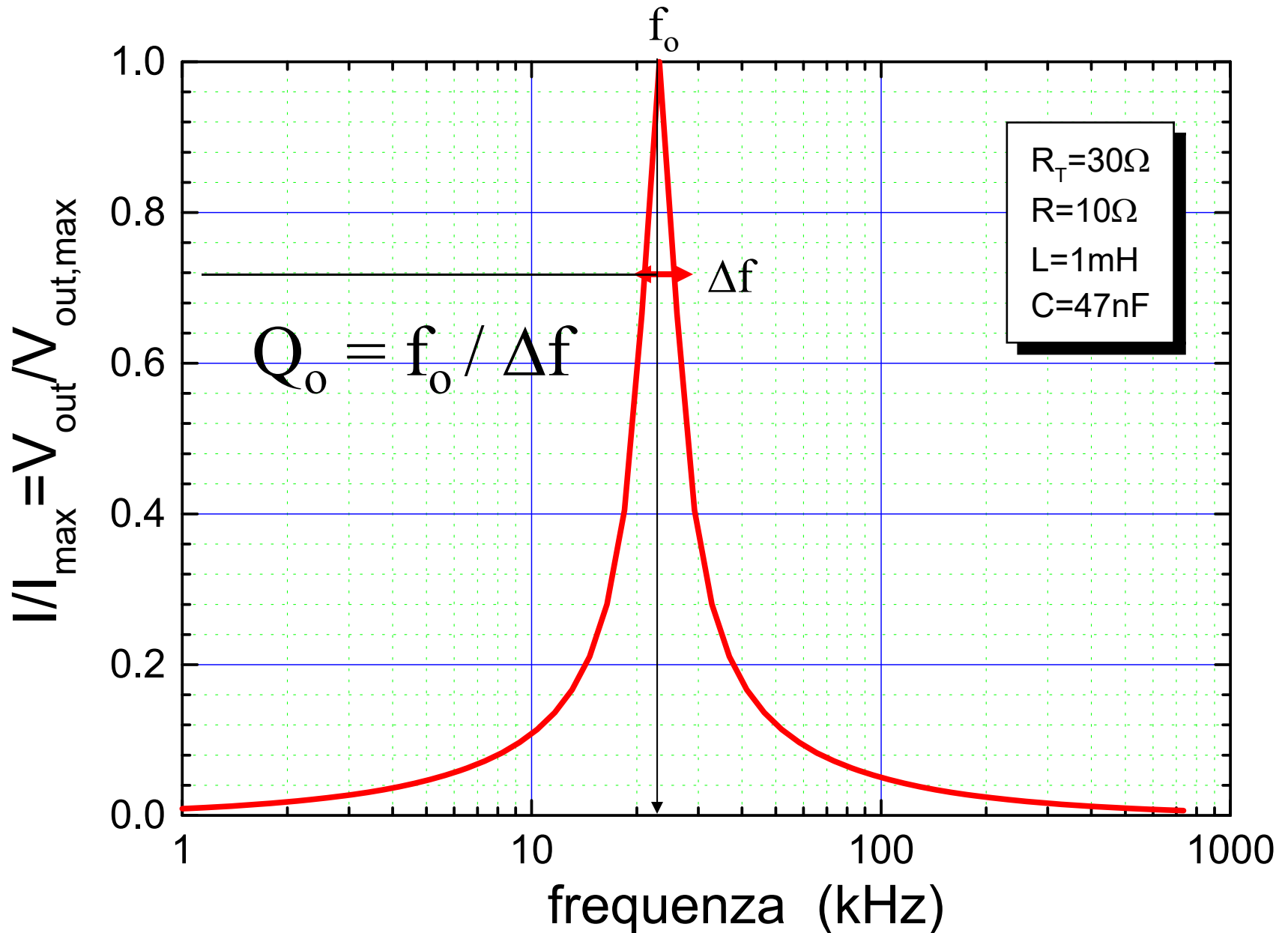


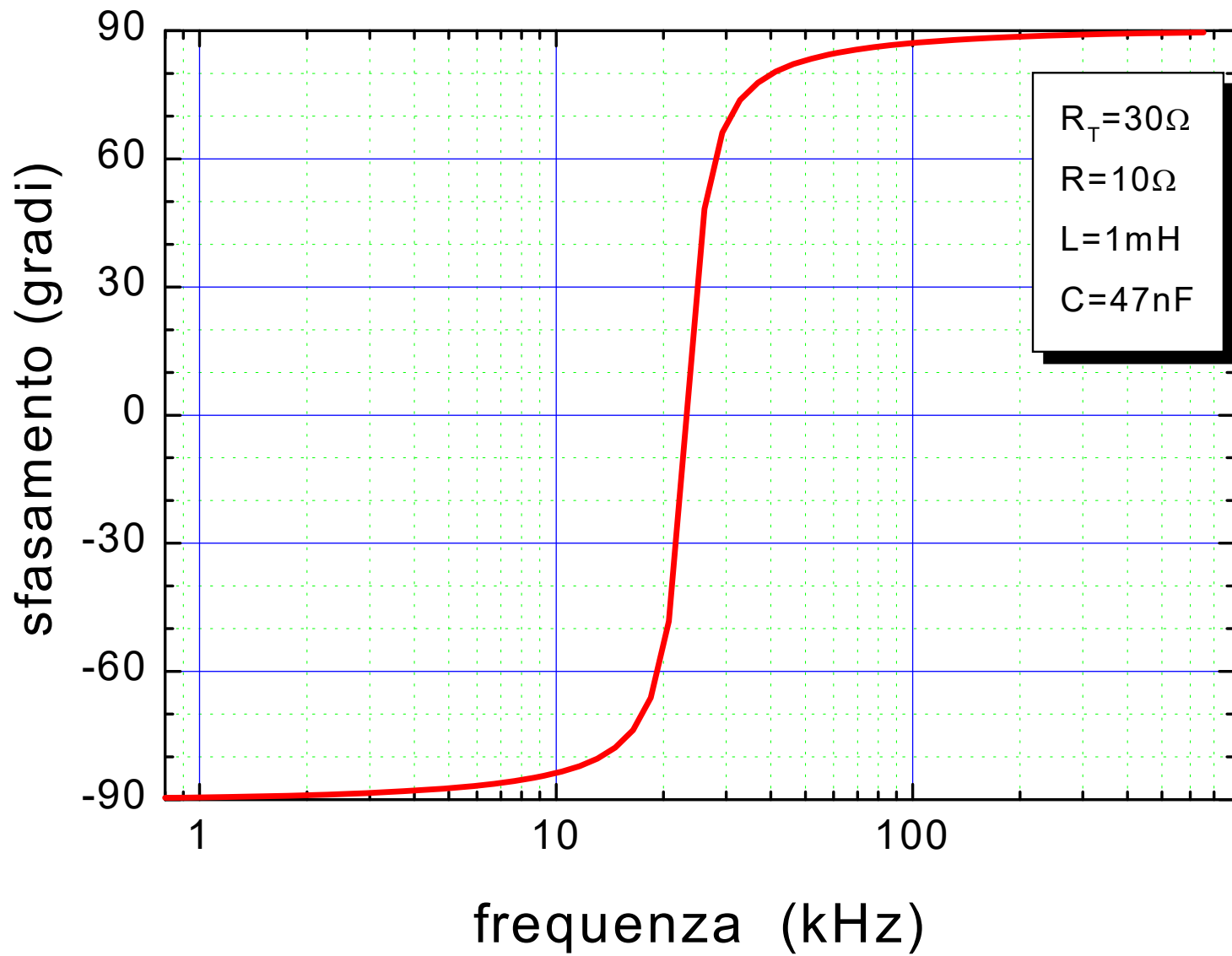
5. Misura di $V_{out}(f)$: Si fa prima una scansione veloce delle frequenze per vedere se il circuito funziona, cioè se c'è davvero la risonanza. Con i componenti suggeriti e' a 23 kHz.

RLC serie in regime sinusoidale

6. Misura delle risposte $V_{\text{out}}(f)$ e $\phi(f)$ = sfasamento tra V_{out} e V_{in} . Quest'ultima si misura meglio visualizzando l'ellisse (oscilloscopio in modo XY). Ricordarsi di valutare gli errori e scrivere sempre i fattori di scala.
7. Dai grafici si valutano la frequenza di risonanza f_0 e la larghezza Δf della curva di risposta $V_{\text{out}}/V_{\text{max}}(f)$ a 0.707 del massimo; da queste si stima Q_0 .
8. Studio delle extratensioni, scambiando R e C sulla basetta e quindi misurando la tensione ai capi del condensatore invece che ai capi della resistenza. E' $V_{\text{out}}/V_{\text{in}}(f) > 1$? Quanto vale al massimo ?
9. Ripetizione delle stesse misure togliendo la resistenza di shunt. Quanto varia Q_0 ?
10. Conservate i componenti. Servono per la prossima esperienza.

Con un induttore di buona qualita' ($L=1\text{mH}$, $R_L=10\Omega$) :





circuito RLC serie

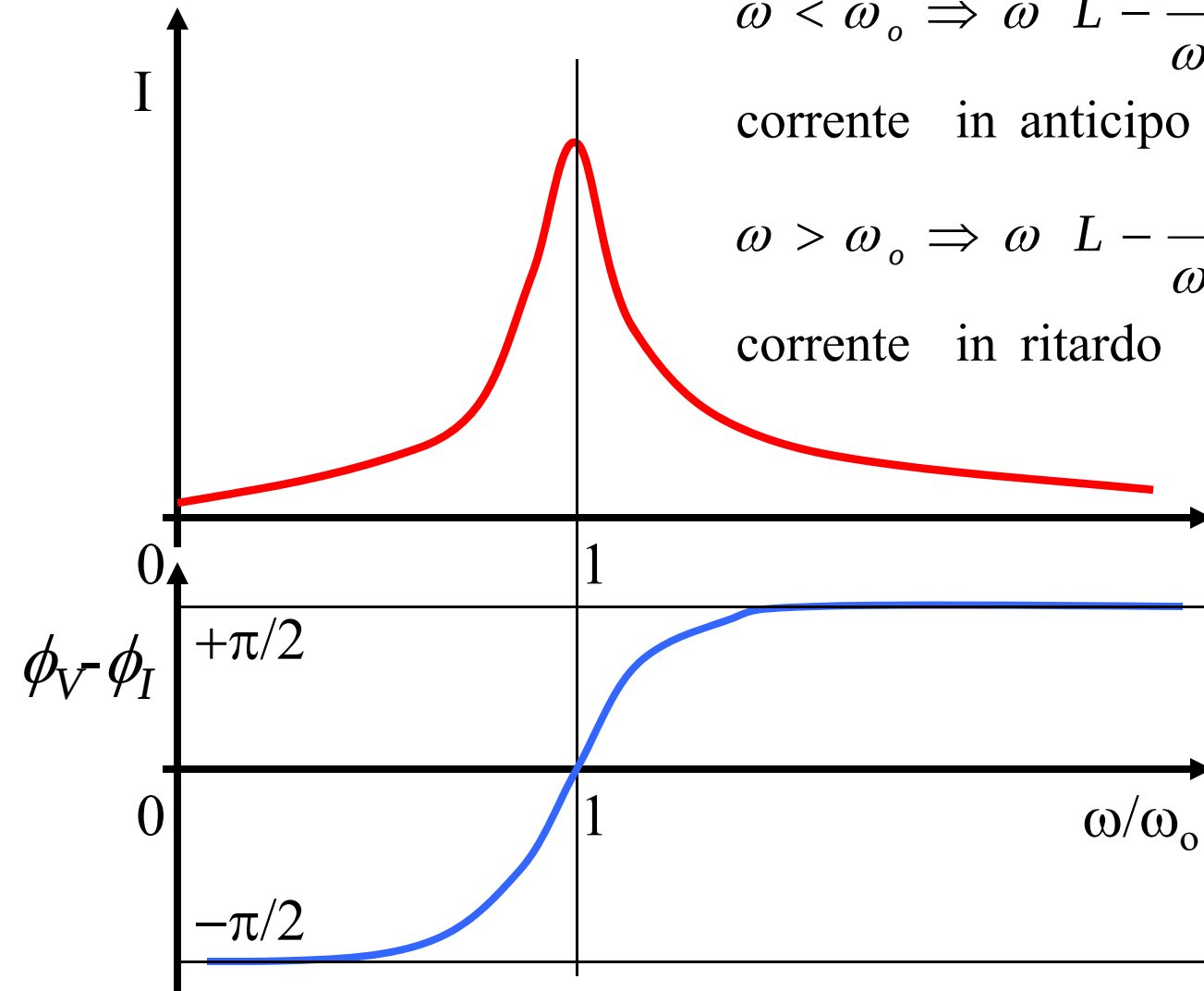
$$\varphi_V - \varphi_I = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]$$

$$\omega < \omega_o \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} < 0 \Rightarrow \varphi_V - \varphi_I < 0$$

corrente in anticipo rispetto alla tensione

$$\omega > \omega_o \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0 \Rightarrow \varphi_V - \varphi_I > 0$$

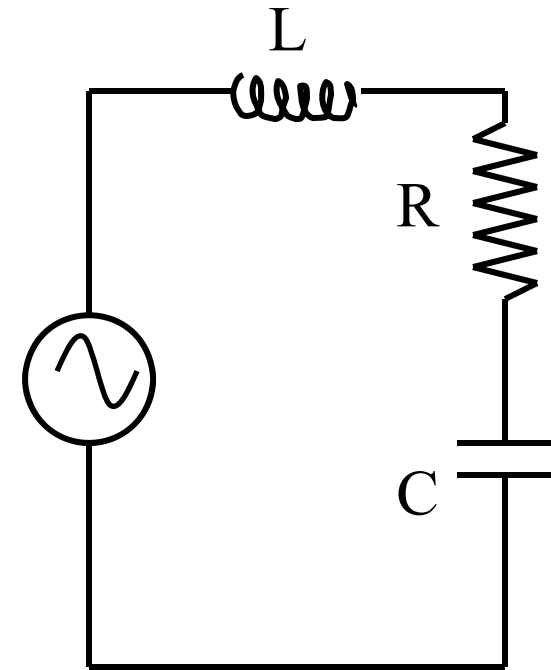
corrente in ritardo rispetto alla tensione



extratensioni

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- Vediamo i moduli delle tensioni ai capi di ciascun componente **reattivo**:



$$\vec{V}_C = \vec{Z}_C \vec{I} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \vec{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$\vec{V}_L = \vec{Z}_L \vec{I} = \frac{j\omega L \vec{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

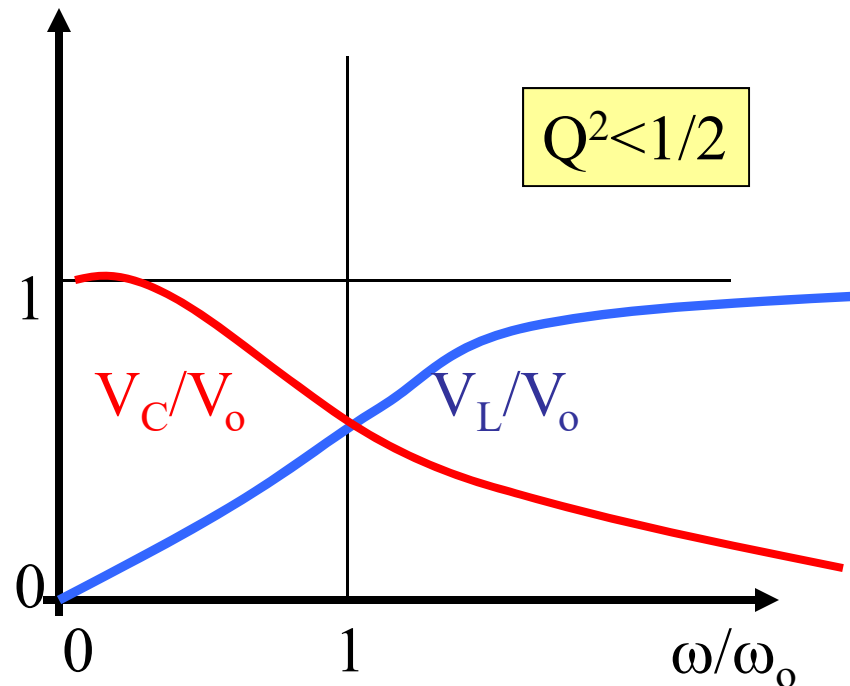
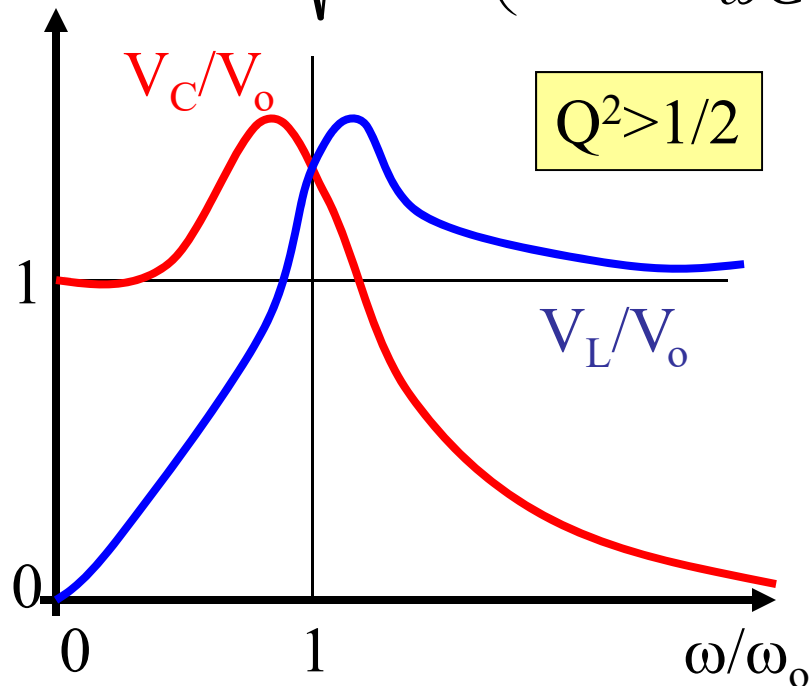
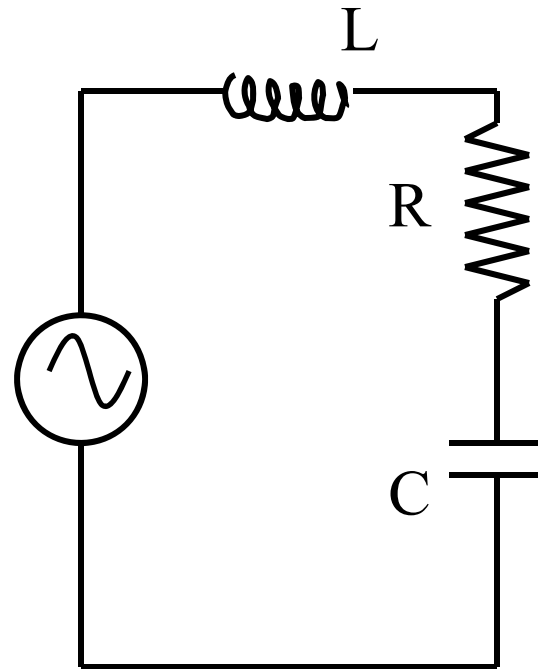
$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Il circuito RLC serie

$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

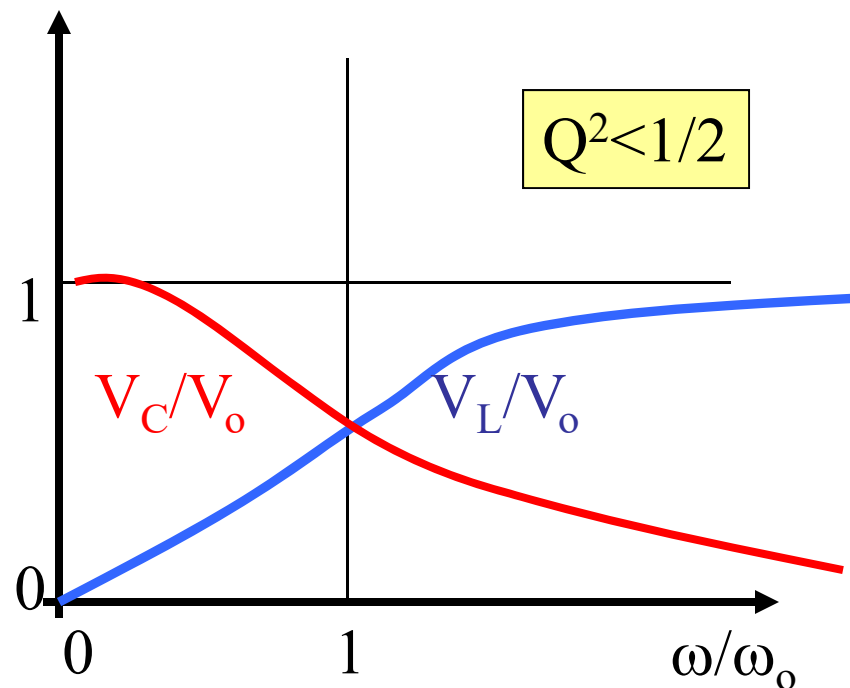
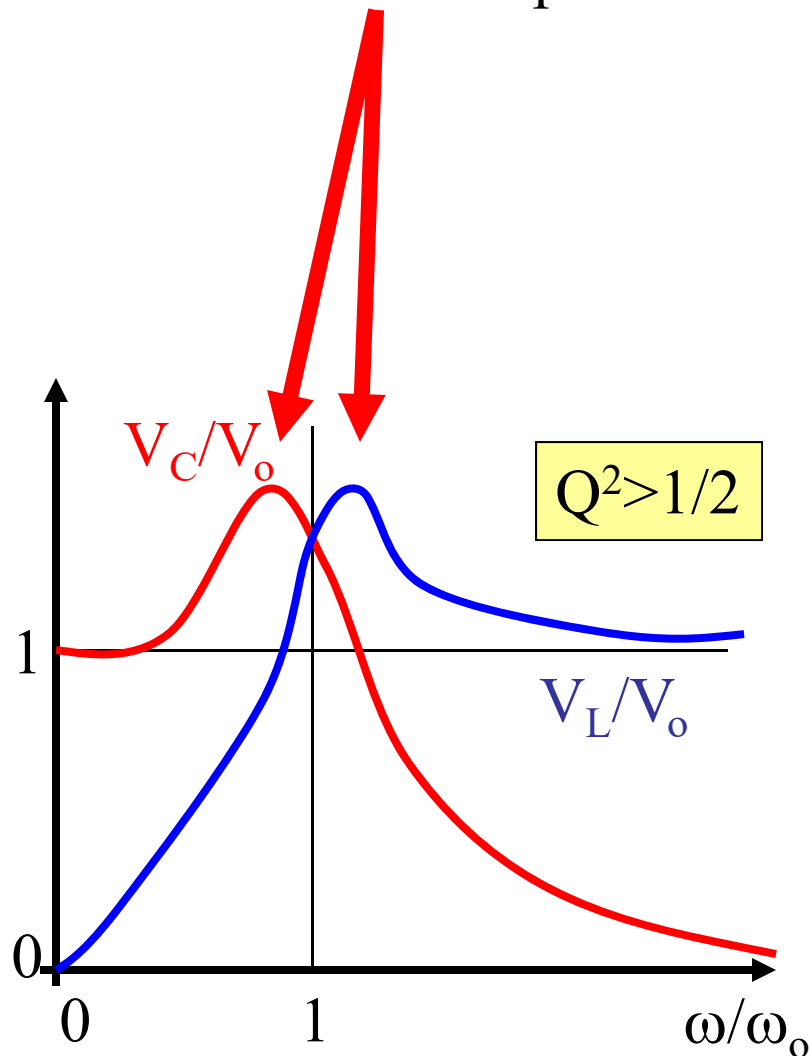
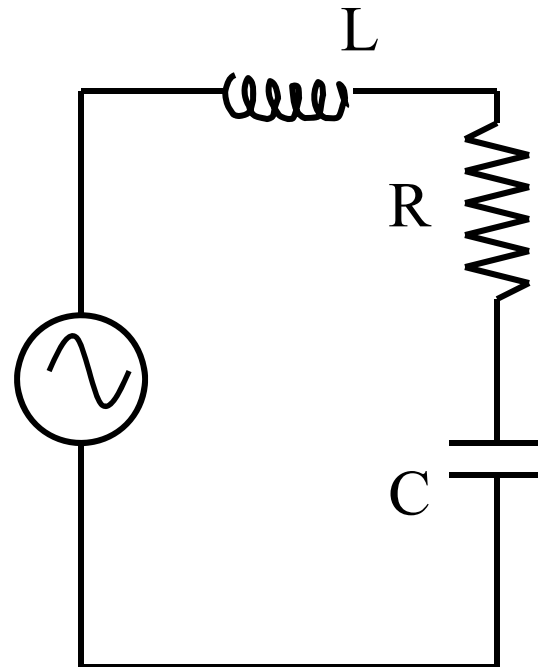
$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$



Il circuito RLC serie

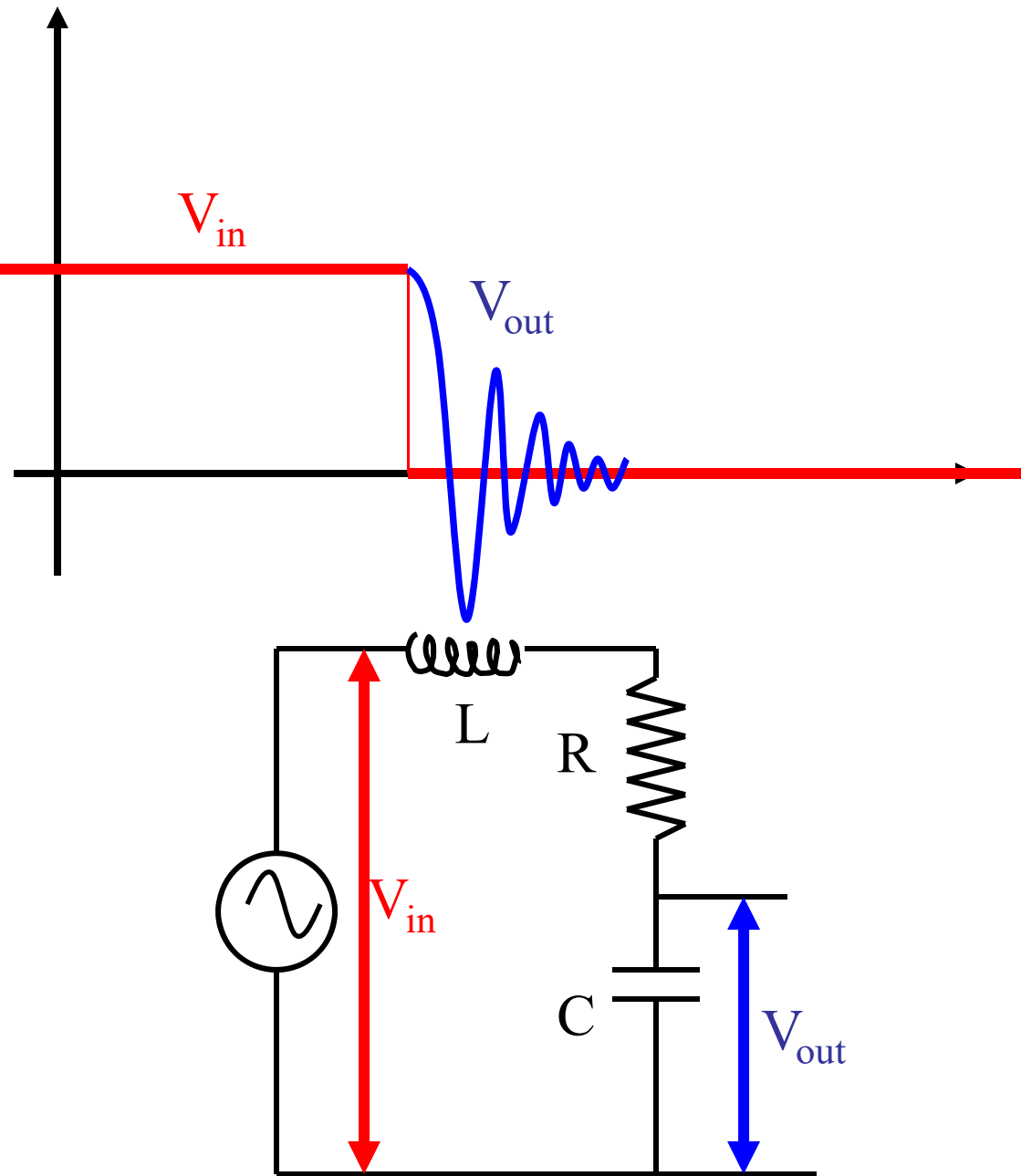
EXTRATENSIONI:

Se Q e' molto alto possono
Rovinare i componenti



RLC con onda quadra

- Ovvero scarica di un condensatore in un circuito RLC, quando il periodo dell' onda quadra e' molto piu' lungo dello pseudoperiodo dell' oscillazione smorzata.
- E' una situazione che capita spesso in elettronica digitale.



Carichiamo il condensatore fino a Q
e chiudiamo il circuito al tempo $t = 0$

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \gamma \frac{dQ}{dt} + \omega_o^2 Q = 0$$

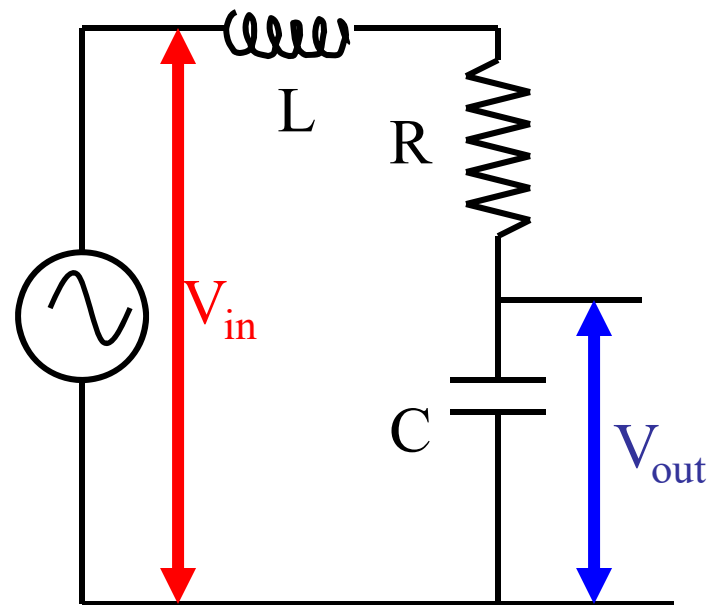
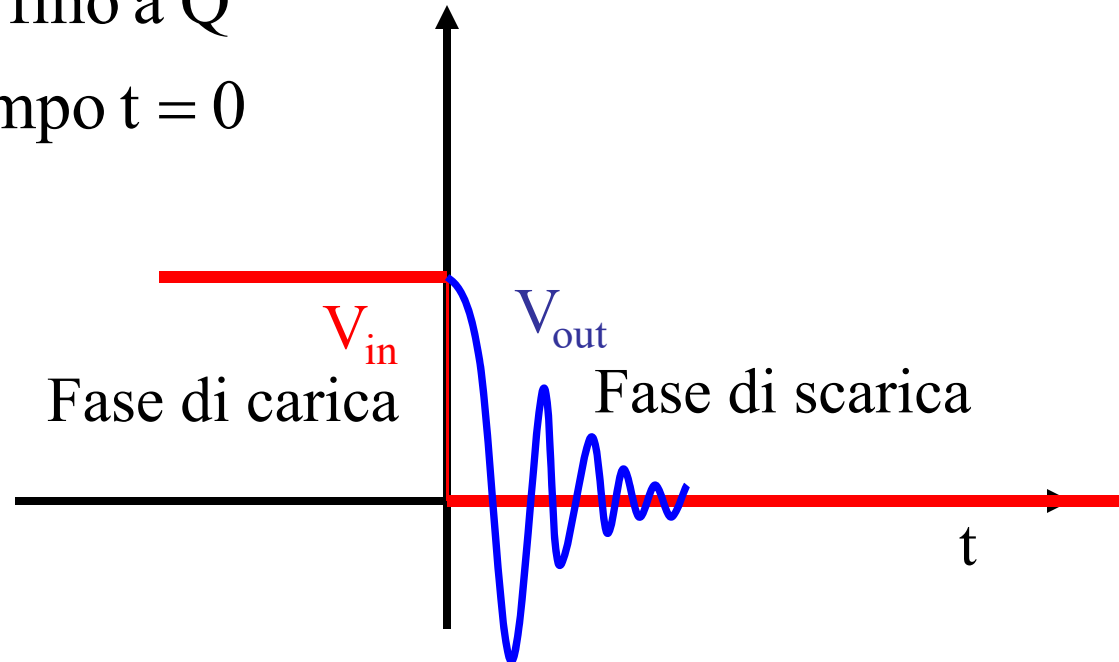
dove

$$\gamma = R/L \quad \text{e} \quad \omega_o = 1/\sqrt{LC}$$

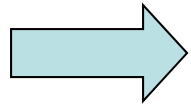
l'equazione caratteristica e'

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_o^2 = 0$$

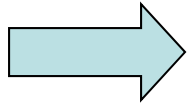
$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}$$



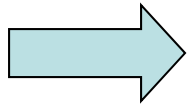
$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}$$



se l'integrando e' positivo, la soluzione
e' la somma di due esponenziali decrescenti :
soluzione sovrasmorzata



se l'integrando e' nullo, soluzione a smorzamento
critico



se l'integrando e' negativo, soluzioni complesse
coniugate :

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm j\omega_1 \quad \text{con} \quad \omega_1^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

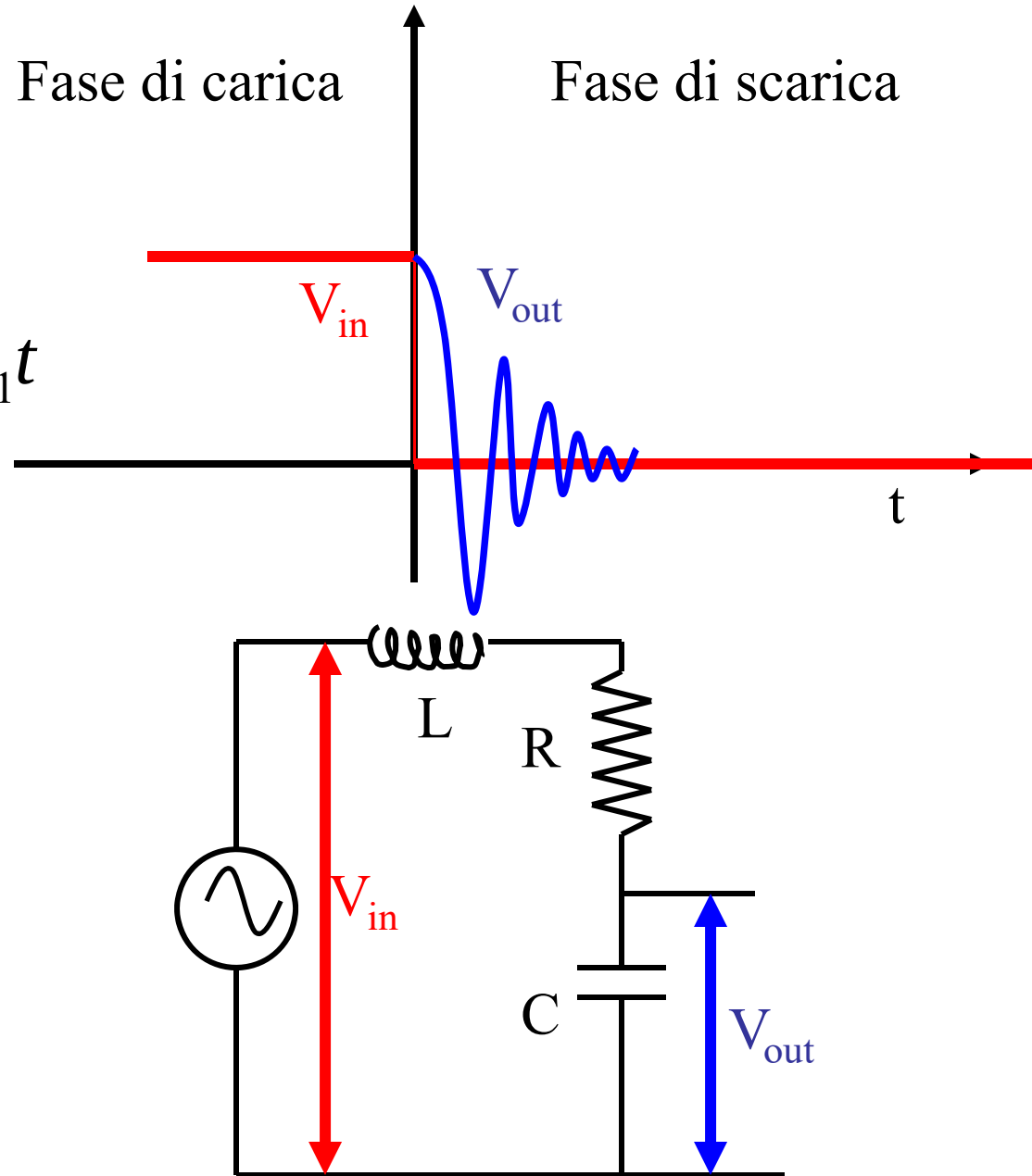
ω_1 e' detto pseudoperiodo;

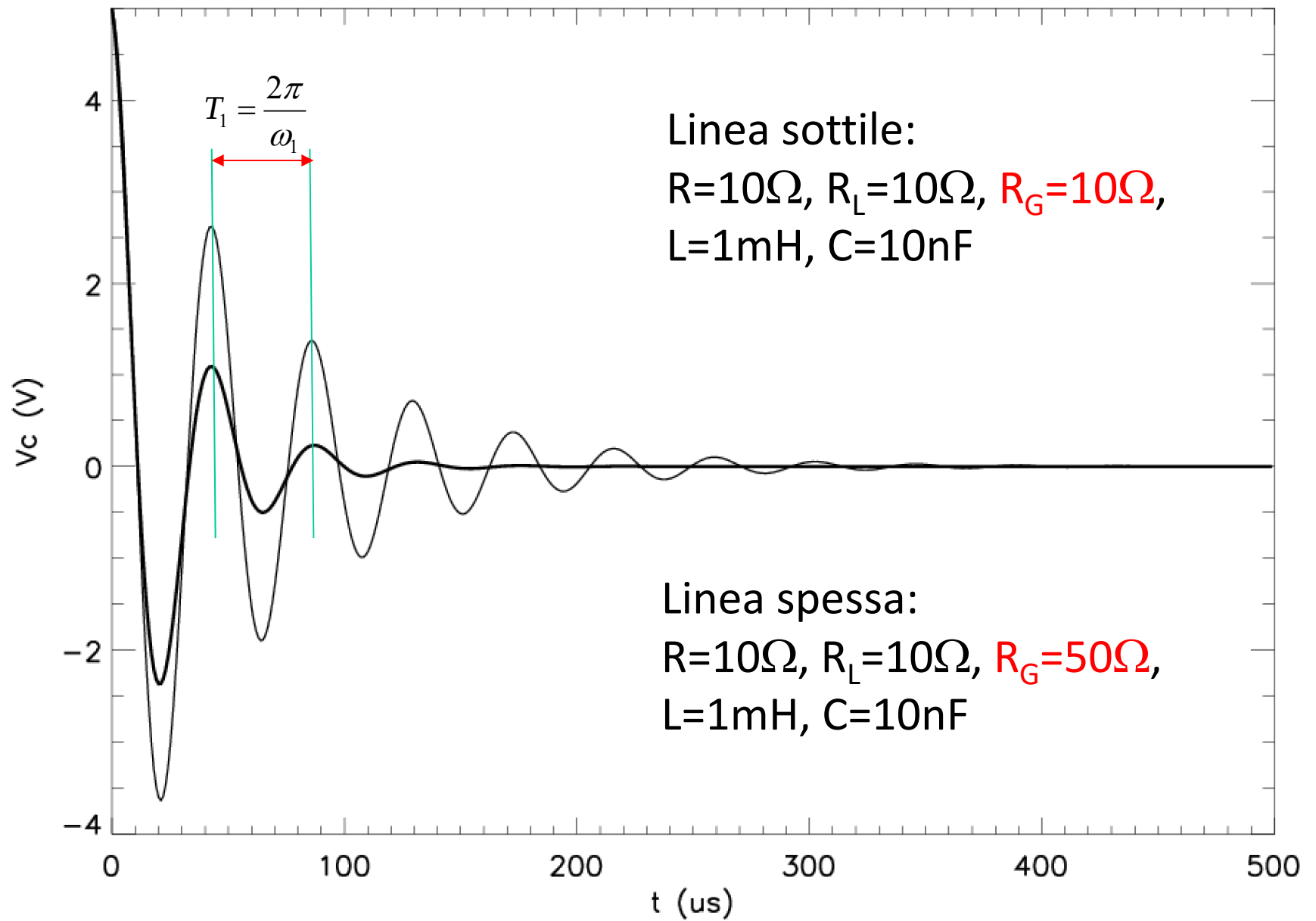
la soluzione e' $Q = Q_o e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$

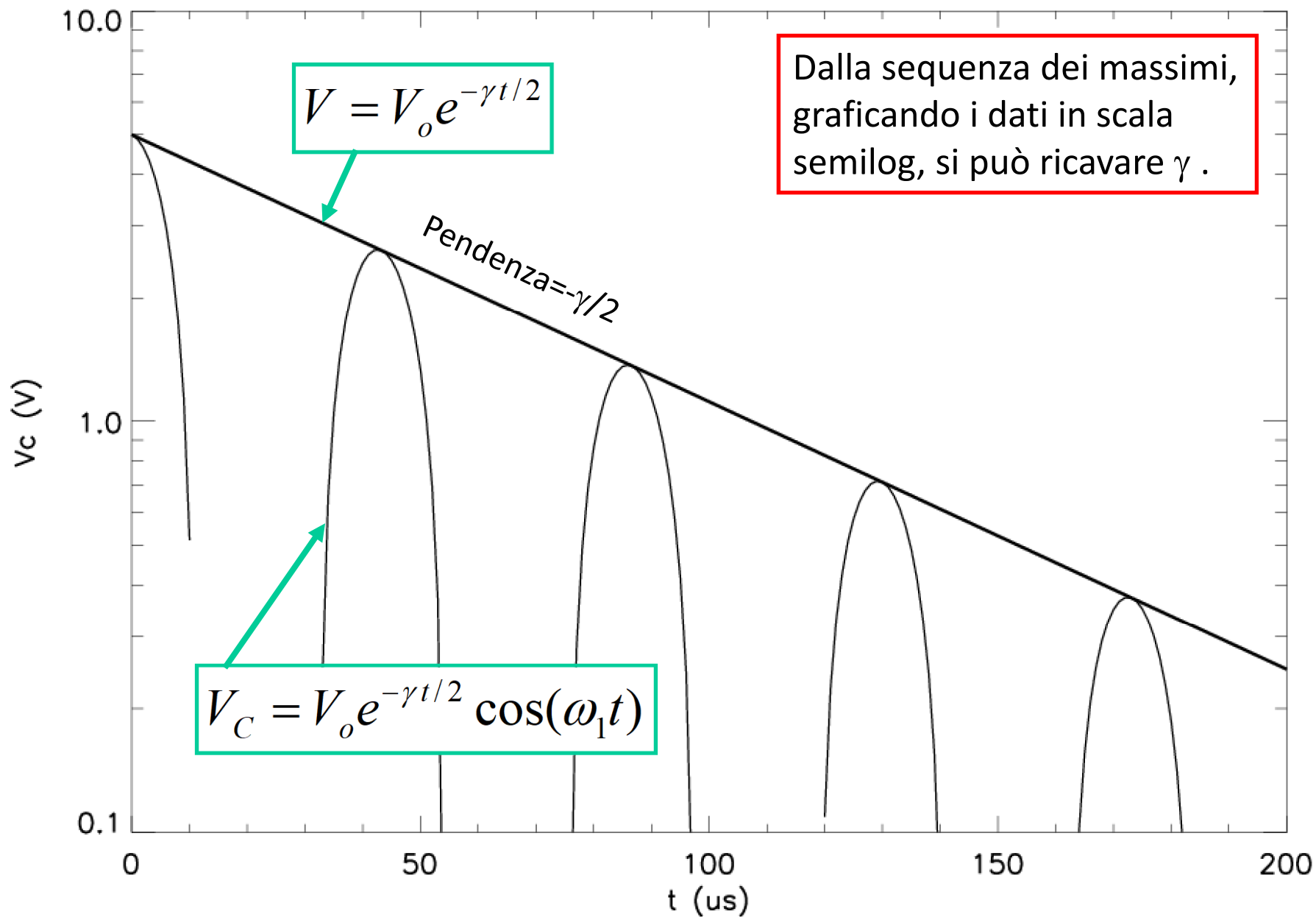
$$Q = Q_o e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$$

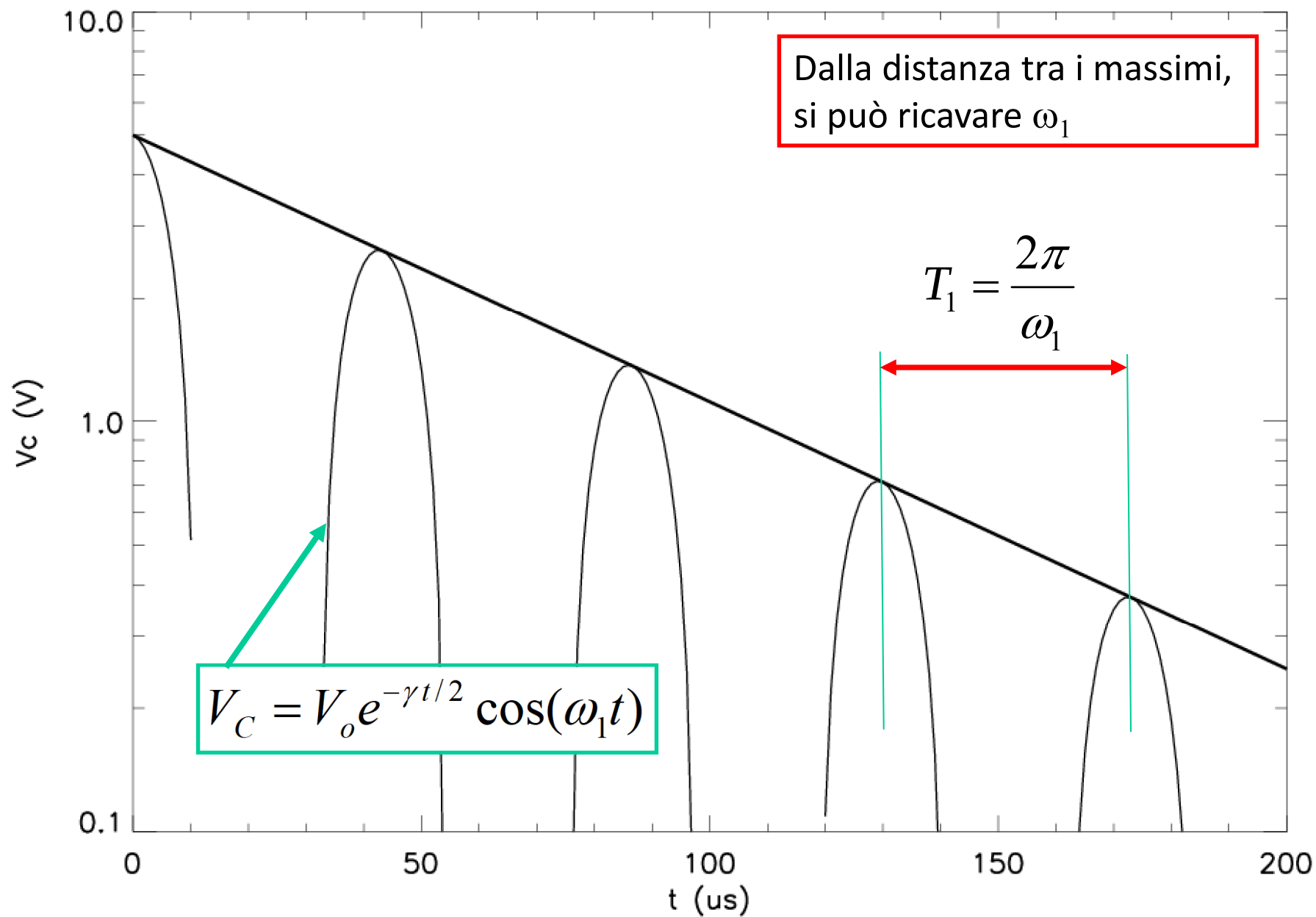
$$V_{out}(t) = \frac{Q_o}{C} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$$

Nell'esperienza
sull'RLC
visualizzerete
questa forma
d'onda e
misurerete lo
pseudoperiodo

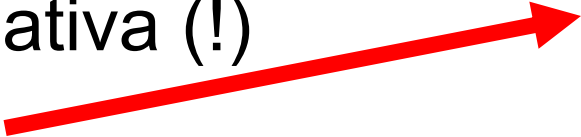


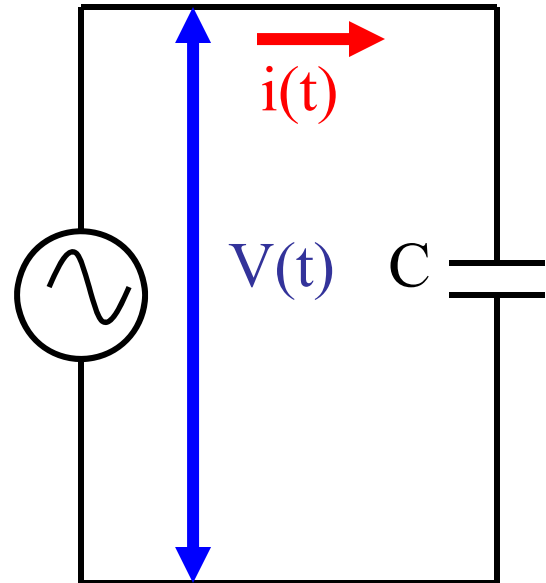






Potenza elettrica in AC

- La potenza dissipata istante per istante in un componente e'
- $W(t)=i(t)V(t)$
- Se usiamo tensioni alternate, W varia continuamente nel tempo, e potrebbe anche essere negativa (!)
- Esempio: 



Potenza elettrica in AC

$$V = ZI \Rightarrow V = \frac{I}{j\omega C}$$

$$I = j\omega CV$$

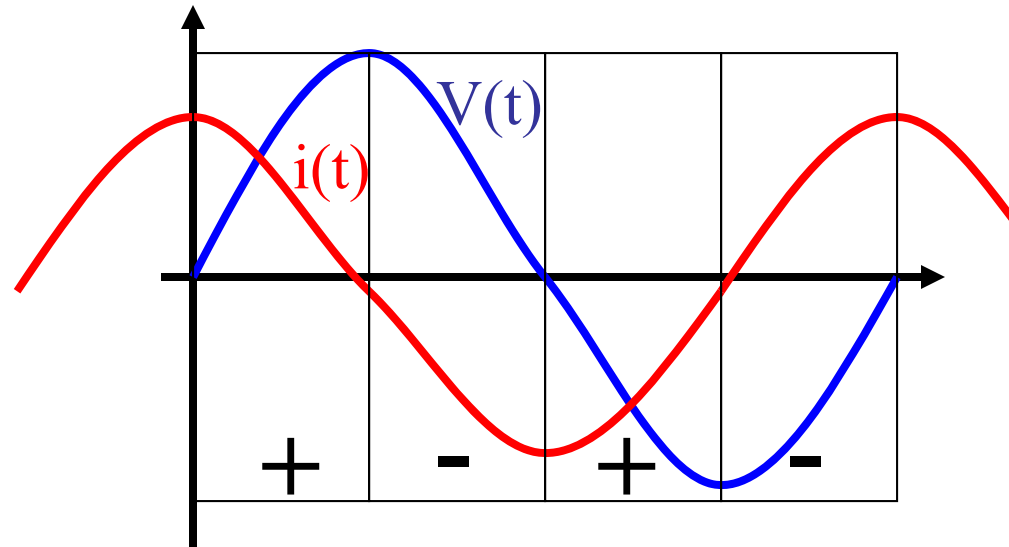
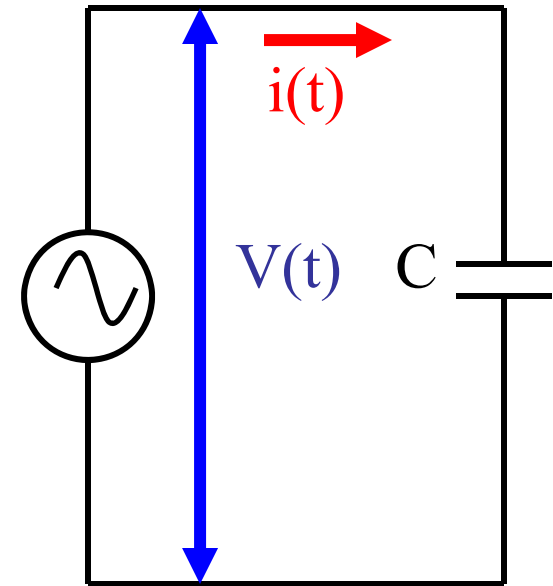
$$|I| = \omega C |V|$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega CV}{0}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$V = V_o \sin(\omega t)$$

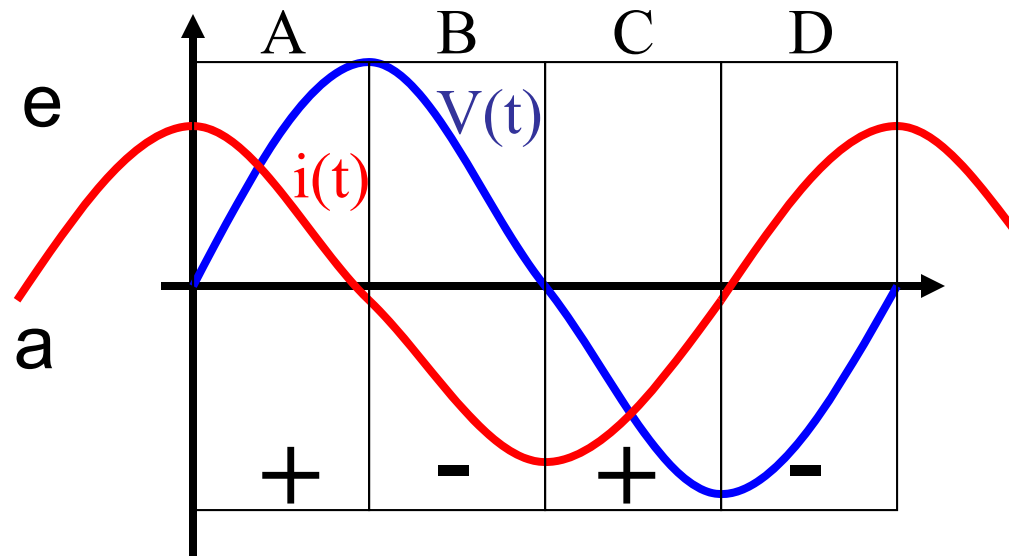
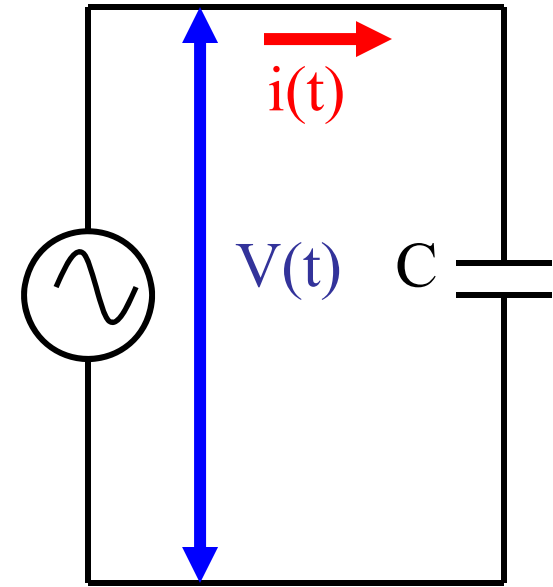
$$I = \omega CV_o \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Anticipo di 90° della corrente rispetto alla tensione.



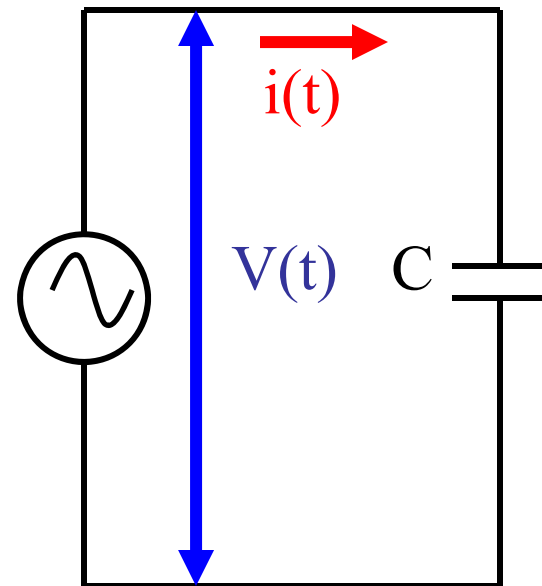
Potenza elettrica in AC

- Durante gli intervalli A e C il condensatore viene caricato dal generatore, e quindi aumenta la sua energia, e quindi gli viene fornita potenza.
- Durante gli intervalli B e D il condensatore si scarica sul generatore, e quindi perde energia, fornendo potenza al generatore: la potenza a lui fornita è negativa.



Potenza elettrica in AC

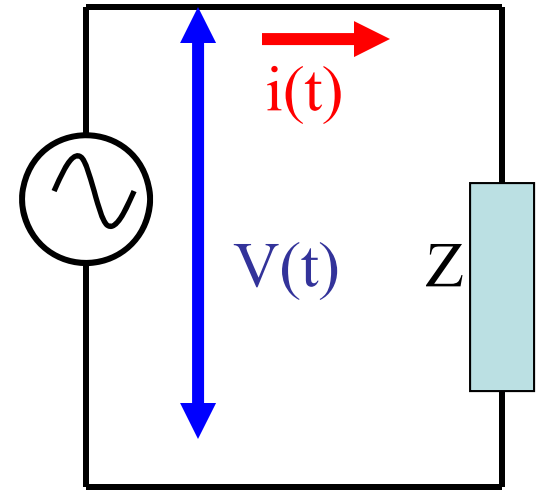
- La potenza media fornita al condensatore e' la media di $W(t)$ su un ciclo lungo $T=2\pi/\omega$.



$$\begin{aligned}\langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t)V(t)dt = \frac{V_0 I_0}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t)dt = \\ &= \frac{V_0 I_0}{\omega T} \int_0^{\omega T} \sin(\omega t) \cos(\omega t)d\omega t = \frac{V_0 I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x)dx = \\ &= \frac{V_0 I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x)d \sin(x) = \frac{V_0 I_0}{2\pi} \frac{\sin^2 x \Big|_0^{2\pi}}{2} = 0\end{aligned}$$

Potenza elettrica in AC

- In generale :

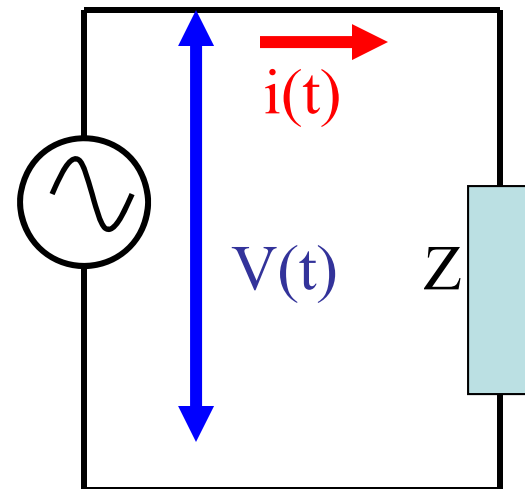


$$\begin{aligned}\langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t)V(t)dt = \frac{V_0 I_0}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{V_0 I_0}{T} \left[\int_0^T \cos(\omega t) \cos(\phi) \cos(\omega t) dt + \int_0^T \sin(\omega t) \sin(\phi) \cos(\omega t) dt \right] = \\ &= \frac{V_0 I_0}{T} \cos(\phi) \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{V_0 I_0}{\omega T} \cos(\phi) \int_0^{\omega T} \cos^2(x) dx \Rightarrow \\ \langle W \rangle &= \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\phi) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos(\phi) \Rightarrow \langle W \rangle = V_{eff} I_{eff} \cos(\phi)\end{aligned}$$

Potenza elettrica in AC

$$\langle W \rangle = V_{eff} I_{eff} \cos(\phi)$$

$$\phi = \arctan \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}$$



- $\cos(\phi)$ e' detto Fattore di Potenza.
- In circuiti puramente reattivi (come il condensatore da solo) $\text{Re}(Z)=0$ e lo sfasamento tra tensione e corrente e' di 90° , e il fattore di potenza e' 0; la potenza media dissipata e' nulla.
- Ma nel componente scorre corrente. Quindi, ad esempio la potenza dissipata nel generatore (nella sua resistenza interna) non e' nulla !
- Nelle apparecchiature industriali con carichi induttivi, come i motori elettrici, sono necessari grandi condensatori, in modo da riportare il fattore di potenza vicino ad 1.

Il circuito RLC serie

- Il fattore di merito può essere riscritto anche in termini di energia immagazzinata nell'oscillatore ed energia dissipata in un periodo.
- Infatti:

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{2\pi}{T} \frac{L}{R} \frac{I_o^2 / 2}{I_o^2 / 2} = 2\pi \frac{LI_o^2 / 2}{TRI_o^2 / 2} = 2\pi \frac{E_{st}}{TW_J} = 2\pi \frac{E_{st}}{E_J}$$

dove I_o è la corrente massima che passa nel circuito, E_{st} è l'energia immagazzinata nel circuito, W_J è la potenza media dissipata (convertita in calore) per effetto Joule nel resistore .

- Quindi il fattore di merito è pari a 2π volte il rapporto tra energia elettromagnetica immagazzinata nel risuonatore ed energia dissipata in un periodo (che deve quindi essere via via rifornita dal generatore per mantenere l'oscillazione).