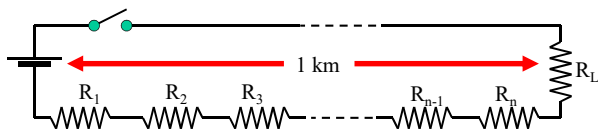


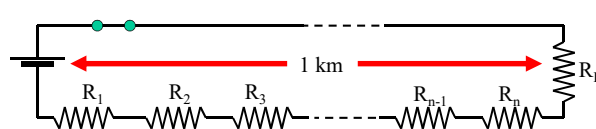
### Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Kirchhoff prevederebbe che appena chiuso l' interruttore scorresse *istantaneamente* una corrente  $I=V/R_{tot}$
- Inoltre, se si lavora con tensioni variabili nel tempo si assume che la corrente sia *in ogni istante la stessa* in tutta la maglia.



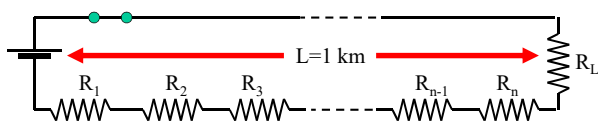
### Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Kirchhoff prevederebbe che appena chiuso l' interruttore scorresse *istantaneamente* una corrente  $I=V/R_{tot}$
- Inoltre, se si lavora con tensioni variabili nel tempo si assume che la corrente sia *in ogni istante la stessa* in tutta la maglia.



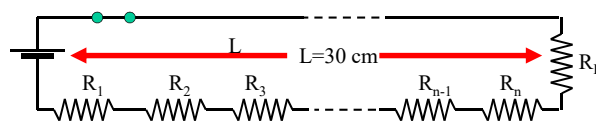
### Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Evidentemente questo non può essere, perché implicherebbe un trasferimento istantaneo dell' informazione «interruttore chiuso» dall' interruttore al carico.
- Le informazioni non possono viaggiare a velocità maggiore di quella della luce.
- La corrente non può arrivare alla  $R_L$  prima di  $t_o+L/c$ . Qui  $c$  è la velocità della luce:  $c=30$  cm/ns.



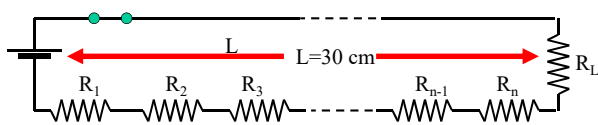
### Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Se ipotizziamo che i segnali si propaghino a velocità dell' ordine di  $c$ , per  $L=30$  cm abbiamo un ritardo di circa 1 ns.
- Una corrente sinusoidale a  $f=1$  GHz arriverà al carico  $R_L$  in ritardo di un intero periodo.



### Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Quindi possiamo trattare con l' approssimazione istantanea di Kirchhoff *circuiti piccoli e a frequenze  $\ll 1$  GHz*.
- Altrimenti dovremo utilizzare le equazioni di Maxwell.



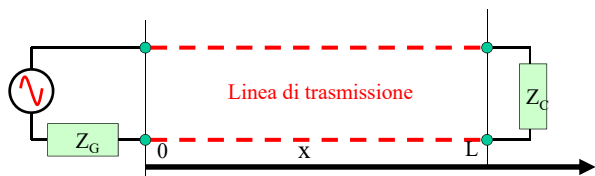
### Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Esempio comune: la motherboard di un computer ha dimensioni dell'ordine di 20 cm ed il segnale di clock è a 3-4 GHz.
- I progettisti devono tenere conto del ritardo nella propagazione dei segnali dalla CPU ai chip esterni (ad esempio la RAM deve essere molto vicina alla CPU), altrimenti non si sincronizza nulla !



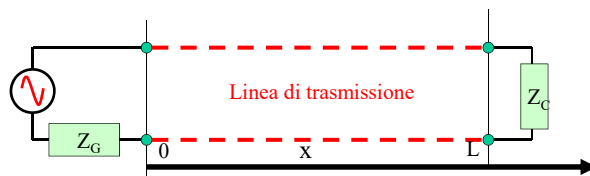
### Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Consideriamo ora il circuito elementare per la trasmissione di segnali su lunghe distanze, la cosiddetta “linea di trasmissione”.



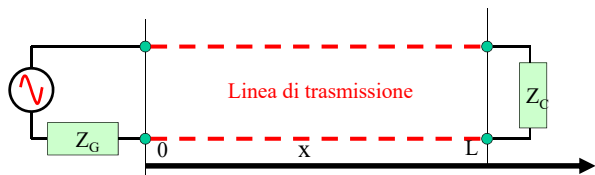
### Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- In pratica questa può essere una piattina bifilare, o il cavo telefonico, o il cavo coassiale RG58 (BNC) che si usa in laboratorio o per le antenne, una pista di rame su un circuito stampato ....



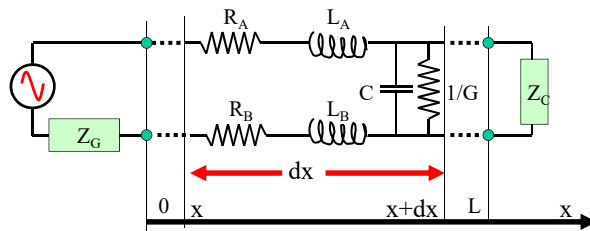
### Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Sia  $V_G(t)$  la tensione del generatore e  $Z_G$  la sua impedenza interna.
- Sia  $Z_C$  l'impedenza del carico.



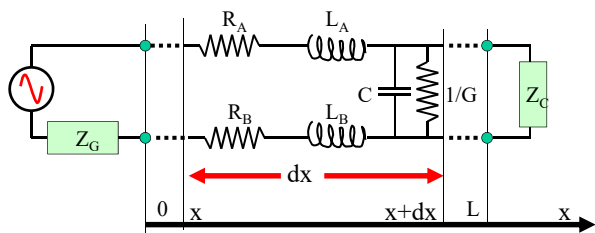
### Linea di Trasmissione

- Schematizziamo la linea come due conduttori paralleli, con distanza e sezione costanti e fermi al passare del tempo (linee uniformi).
- Consideriamo un tratto  $dx$  della linea, e schematizziamolo col circuito equivalente visibile sotto:



### Linea di Trasmissione

- Tra le posizioni  $x$  e  $x+dx$  tensione e corrente variano, perchè ci sono *cadute di tensione* dovute a  $R$  e  $L$ , e *perdite di corrente* dovute a  $C$  e  $G$ .
- Siccome il tratto di circuito considerato è piccolo, al suo interno si può usare la trattazione standard:

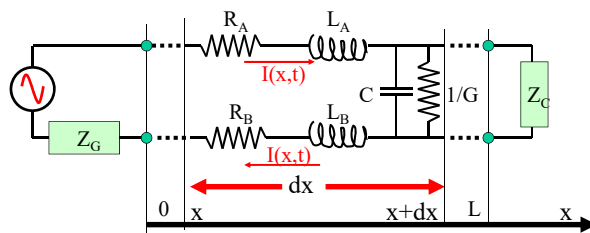


### Linea di Trasmissione:

cadute di tensione

$$dV_A = V_A(x+dx, t) - V_A(x, t) = -R_A I(x, t) - L_A \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$

$$dV_B = V_B(x+dx, t) - V_B(x, t) = R_B I(x, t) + L_B \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$



$$dV_A = V_A(x+dx, t) - V_A(x, t) = -R_A I(x, t) - L_A \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$dV_B = V_B(x+dx, t) - V_B(x, t) = R_B I(x, t) + L_B \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$V(x+dx) - V(x) =$$

$$= [V_A(x+dx, t) - V_B(x+dx, t)] - [V_A(x, t) - V_B(x, t)]$$

$$V(x+dx) - V(x) = -(R_A + R_B)I(x, t) - (L_A + L_B) \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

• Definendo

$$R_u = \frac{R_A + R_B}{dx} \quad \text{Resistenza per unità di lunghezza}$$

$$L_u = \frac{L_A + L_B}{dx} \quad \text{Induttanza per unità di lunghezza}$$

$$V(x+dx) - V(x) = -(R_A + R_B)I(x, t) - (L_A + L_B) \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$V(x+dx) - V(x) = -[R_u dx + L_u dx \frac{\partial}{\partial t}] I(x, t)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}] I(x, t) \Rightarrow \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -[Z_u] I(x, t)$$

### Linea di Trasmissione:

perdite di corrente ( $1/G$  è una resistenza)...

$$dI(x, t) = -GV(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} Q(x, t) = -GV(x, t) - C \frac{\partial}{\partial t} V(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = -[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t}] V(x, t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} I(x, t) = -[Y_u] V(x, t)$$

Come prima:  $G_u$  e  $C_u$  conducibilità e capacità per unità di lunghezza

$Y_u$  e  $Z_u$  = Ammettenza e Impedenza della linea per unità di lunghezza

### Linea di Trasmissione:

equazioni differenziali e quadrupolo equivalente

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}] I(x, t) \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t}] V(x, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -[Z_u] I(x, t) \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -[Y_u] V(x, t) \end{cases}$$

### Linea di Trasmissione:

Per segnali sinusoidali

$$Z = R + j\omega L \Rightarrow Z_u dx = (R_u + j\omega L_u) dx$$

$$Y = G + j\omega C \Rightarrow Y_u dx = (G_u + j\omega C_u) dx$$

Dove  $Z_u$  e  $Y_u$  sono impedenza e ammettenza della linea per unità di lunghezza.

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -[Z_u]I(x) \\ \frac{\partial I(x)}{\partial x} = -[Y_u]V(x) \end{cases} \quad \text{Equazioni dei Telegrafisti}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -[Z_u] \frac{\partial}{\partial x} I(x) = Z_u Y_u V(x) \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = -[Y_u] \frac{\partial}{\partial x} V(x) = Z_u Y_u I(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = Z_u Y_u V(x) = \gamma^2 V(x) \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = Z_u Y_u I(x) = \gamma^2 I(x) \end{cases} \quad \text{Equazioni dei Telegrafisti}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 V(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 I(x) = 0 \end{cases} \quad \gamma^2 = Z_u Y_u$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 V(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 I(x) = 0 \end{cases} \quad \text{Equazioni dei Telegrafisti}$$

la soluzione è del tipo

$$c_1 e^{-\gamma x} + c_2 e^{+\gamma x} \quad \text{quindi}$$

$$\vec{V}(x) = \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x}$$

dove le costanti  $A_1$  e  $A_2$  contengono le fasi:  $\vec{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1}$   
 $\vec{A}_2 = A_2 e^{j\varphi_2}$   
 $\vec{Z}_0 = Z_0 e^{j\psi}$   
 definendo

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\vec{Z}_u \vec{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L)(G_u + j\omega C)}$$

$$\vec{V}(x) = \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x} = \vec{A}_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} + \vec{A}_2 e^{+(\alpha + j\beta)x}$$

**Soluzione per V**

$$\begin{aligned} \vec{V}(x) &= \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x} = \\ &= \vec{A}_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} + \vec{A}_2 e^{+(\alpha + j\beta)x} = \\ &= A_1 e^{j\varphi_1} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_2 e^{j\varphi_2} e^{+\alpha x} e^{+j\beta x} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \text{Re} \{ \vec{V}(x) e^{j\omega t} \} \\ &= A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad \text{Onda progressiva} \\ &+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad \text{Onda regressiva} \end{aligned}$$

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) + A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2)$$

**Onda progressiva**  
**Onda regressiva**

- L'ampiezza decresce esponenzialmente con la distanza, a causa delle dissipazioni R e G
- l'onda progressiva  $A_1$  è grande all'inizio della linea e si smorza
- l'onda regressiva  $A_2$  è grande alla fine della linea e si smorza "rimbalzando indietro"

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) + A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2)$$

**Onda progressiva**  
**Onda regressiva**

- Vediamo perché l'onda  $A_1$  è detta progressiva.
- La velocità (di fase)  $v$  è la velocità che deve avere un osservatore viaggiante lungo la linea per vedere sempre la stessa fase dell'onda (ad esempio viaggiando a cavalcioni di una cresta o in fondo a un ventre).
- La condizione di fase costante è

$$\omega t - \beta x + \varphi_1 = K \Rightarrow \frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \varphi_1) = 0$$

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow v = \frac{\omega}{\beta}$$

**Velocità di fase positiva per  $A_1$**

- La soluzione in regime sinusoidale è

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad \text{Onda progressiva}$$

$$+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad \text{Onda regressiva}$$

- Le due onde si propagano nella linea con velocità di fase  
( $\beta = \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sqrt{Z_u Y_u})$ )

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{Per l'onda progressiva}$$

$$v = -\frac{\omega}{\beta} \quad \text{Per l'onda regressiva}$$

### Caso non dissipativo:

- Nel limite di  $R_u=0$  e  $G_u=0$ , si calcola facilmente

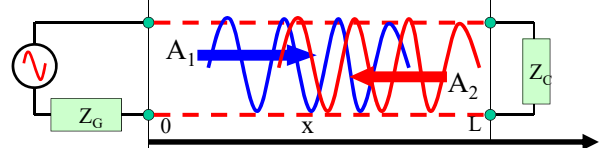
$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\bar{Z}_u \bar{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} =$$

$$\Rightarrow \sqrt{(j\omega L_u)(j\omega C_u)} = j\omega \sqrt{L_u C_u}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}; \quad \tau = \sqrt{L_u C_u}$$

$$V(x, t) = A_1 \cos[\omega(t - x/v) + \varphi_1] +$$

$$+ A_2 \cos[\omega(t + x/v) + \varphi_2]$$



### Esempio: Cavo coassiale RG-58



### Autoinduzione in un cavo coassiale

Coefficiente di autoinduzione  $L$  definito da:  $\Phi = Li$

Dove  $\Phi$  è il flusso di  $B$ :  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Nel caso di un cavo coassiale percorso da corrente  $i$  il campo all'interno del cavo è tangenziale, e la sua intensità a distanza  $r$  dall'asse si ricava dal teorema della circuitazione:

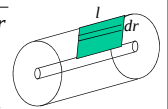
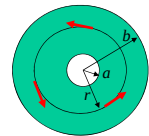
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu i \rightarrow B 2\pi r = \mu i \rightarrow B(r) = \frac{\mu i}{2\pi r}$$

Allora si può calcolare il flusso di  $B$  attraverso una superficie rettangolare interna al cavo, lunga  $l$ :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b B(r) l dr = l \frac{\mu i}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = l \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

E quindi l'induttanza per unità di lunghezza è

$$L_u = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{il} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



### Capacità di un condensatore cilindrico

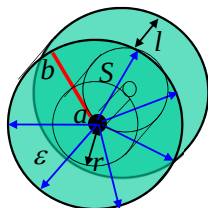
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q / \epsilon \rightarrow E 2\pi r l = Q / \epsilon$$

$$E(r) = Q / (2\pi \epsilon l) = \rho / (2\pi \epsilon)$$

$$\Delta V_{ab} = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{\rho}{2\pi \epsilon} dr = \frac{\rho}{2\pi \epsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi \epsilon} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\rho l}{\Delta V} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)}$$

$$C_u = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)}$$



### Esempio: cavo coassiale RG-58

$$\left\{ \begin{array}{l} C_u = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(b/a)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu / \epsilon} \ln(b/a) \end{array} \right.$$

- Numeri tipici per l' RG-58:

$$\square \epsilon_R = 2, v = c / \sqrt{2}$$

$$\square C_u = 100 \text{ pF/m}$$

$$\square R_o = 50 \Omega$$

$$\square v = 20 \text{ cm/ns}$$

$$\square \tau = 5 \text{ ns/m}$$

- Quindi un cavo di 100m introduce un ritardo di 500 ns (che misurate nell'ultima esperienza).

### Caso dissipativo:

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{\bar{Z}_u \bar{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} \\ &= \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \frac{C_u R_u}{L_u C_u} + j\omega \frac{L_u G_u}{L_u C_u} - \omega^2 \frac{L_u C_u}{L_u C_u}} = \\ &= \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \left( \frac{R_u}{L_u} + \frac{G_u}{C_u} \right) - \omega^2}\end{aligned}$$

### Caso non distortente:

$$\gamma = \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \left( \frac{R_u}{L_u} + \frac{G_u}{C_u} \right) - \omega^2}$$

Quando  $\frac{R_u}{L_u} = \frac{G_u}{C_u}$  cioè le due costanti di tempo sono uguali,

$$\gamma = \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\left( \frac{R_u}{L_u} \right)^2 + j\omega 2 \left( \frac{R_u}{L_u} \right) - \omega^2} = \sqrt{L_u C_u} \left[ \frac{R_u}{L_u} + j\omega \right]$$

E quindi

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{L_u C_u} \frac{R_u}{L_u} = R_u \sqrt{\frac{C_u}{L_u}} \Rightarrow \text{L'attenuazione non dipende da } \omega \\ \beta = \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \end{cases}$$

Tutte le onde componenti il segnale si propagano nello stesso modo: il segnale non viene distorto.

### Caso di alte frequenze

per  $G_u \rightarrow 0$  e  $R_u \ll \omega L_u$  (e buon isolamento):

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} \cong \\ &\cong \sqrt{j\omega C_u j\omega L_u \left( 1 + \frac{R_u}{j\omega L_u} \right)} = j\omega \sqrt{C_u L_u} \left( 1 - j \frac{R_u}{\omega L_u} \right) = \\ &= j\omega \sqrt{C_u L_u} \sqrt{1 - j \frac{R_u}{\omega L_u}} \cong j\omega \sqrt{C_u L_u} \left( 1 - j \frac{R_u}{2\omega L_u} \right) = \\ &= \frac{R_u}{2\sqrt{\frac{L_u}{C_u}}} + j\omega \sqrt{C_u L_u} \\ \beta &= \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ \alpha &= \frac{R_u}{2\sqrt{\frac{L_u}{C_u}}} = \frac{R_u}{2R_o}\end{aligned}$$

$R_o = \sqrt{\frac{L_u}{C_u}}$  Impedenza della Linea, ci serve dopo

### Soluzione per la corrente

(sinusoidale)

- Dall'eq. dei telegrafisti

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= -[Z_u]I(x) \Rightarrow I(x) = -\frac{1}{Z_u} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{Z_u} \frac{\partial}{\partial x} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} + \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{\gamma}{Z_u} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] = \\ &= \frac{\sqrt{Z_u Y_u}}{Z_u} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_u}{Y_u}}} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}]\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{Z_u}{Y_u}} \text{ e' una impedenza } \bar{Z}_o = Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}}$$

### Soluzione per la corrente

$$\begin{aligned}I(x, t) &= \text{Re} \{ \bar{I}(x) e^{j\omega t} \} = \\ &= \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z_o e^{j\psi}} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] \right\} \quad (\text{sinusoidale})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I(x, t) &= \frac{A_1}{Z_o} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_1 - \psi) + \\ &- \frac{A_2}{Z_o} e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_2 - \psi)\end{aligned}$$

- Da confrontare con:

$$\begin{aligned}V(x, t) &= A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_1) \\ &+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_2)\end{aligned}$$

- Si vede che per ciascuna onda il rapporto tra tensione e corrente vale  $Z_o$ . Inoltre c'è uno sfasamento  $-\psi$ .

Usando la notazione solita:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_o &= Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}} = \\ &= \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u} (G_u - j\omega C_u) / (G_u - j\omega C_u)} \\ &= \sqrt{\frac{(R_u + j\omega L_u)(G_u - j\omega C_u)}{G_u^2 - \omega^2 C_u^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(R_u G_u + \omega^2 L_u C_u) + j\omega(L_u G_u - R_u C_u)}{G_u^2 - \omega^2 C_u^2}}\end{aligned}$$

## Soluzione per la corrente (sinusoidale)

$$\psi = \arctg \left\{ \frac{\text{Im}(\bar{Z}_o)}{\text{Re}(\bar{Z}_o)} \right\} = \arctg \left\{ \frac{\omega(G_u L_u - R_u C_u)}{R_u G_u + \omega^2 L_u C_u} \right\}^{1/2}$$

- Lo sfasamento è nullo
  - Per linea non distorta  $G_u L_u = R_u C_u$
  - Per linea non dissipativa  $R_u \rightarrow 0 \quad G_u \rightarrow 0 \quad \bar{Z}_o \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$
  - Per alte frequenze  $R_u \ll \omega L_u \quad G_u \ll \omega C_u$
- In tutti questi casi  $\bar{Z}_o = Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}} \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$
- Cioè l'impedenza si riduce a una resistenza.

## Segnali Impulsivi

- Per segnali non sinusoidali la trattazione si complica molto. Ma abbiamo visto che almeno nel caso non dissipativo le diverse componenti sinusoidali si propagano tutte allo stesso modo.
- Studiamo quindi questo caso in generale:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\left[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}\right] I(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -\left[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t}\right] V(x,t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L_u \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C_u \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

- Derivando la prima rispetto a x e la seconda rispetto a t:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = -L_u \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} = -C_u \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - C_u L_u \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Equazione delle onde

## Segnali Impulsivi

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - C_u L_u \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

- La soluzione generale è del tipo
  - Analogamente si trova l'equazione per I, che ha soluzione
  - Sostituendo nella  $\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L_u \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$  si ottiene
- $$\begin{cases} V(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt) \\ I(x,t) = \frac{1}{R_o} (f_1(x-vt) - f_2(x+vt)) \end{cases} \text{ dove } \begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [f_1(x-vt) + f_2(x+vt)] = -L_u \frac{\partial}{\partial t} [g_1(x-vt) + g_2(x+vt)]$$

ma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial(x+vt)} \frac{\partial(x+vt)}{\partial x} \Rightarrow \\ &= -L_u \left[ \frac{\partial g_1}{\partial(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial(x+vt)} \frac{\partial(x+vt)}{\partial t} \right] \Rightarrow \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial(x-vt)} + \frac{\partial f_2}{\partial(x+vt)} = -L_u \frac{\partial g_1}{\partial(x-vt)} (-v) - L_u \frac{\partial g_2}{\partial(x+vt)} (v) \Rightarrow \\ &\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial(x-vt)} = L_u v \frac{\partial g_1}{\partial(x-vt)} \Rightarrow g_1 = \frac{f_1}{L_u v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial(x+vt)} = -L_u v \frac{\partial g_2}{\partial(x+vt)} \Rightarrow g_2 = -\frac{f_2}{L_u v} \end{cases} \end{aligned}$$

$$I = \frac{f_1(x-vt)}{L_u v} - \frac{f_2(x+vt)}{L_u v}$$

ma

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$R_o = \sqrt{L_u / C_u} \Rightarrow \frac{v}{R_o} = \frac{1}{L_u} \Rightarrow L_u v = R_o$$

$$\begin{cases} V(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt) \\ I(x,t) = \frac{1}{R_o} (f_1(x-vt) - f_2(x+vt)) \end{cases} \text{ dove } \begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} \end{cases}$$

## Segnali Impulsivi

$$\begin{cases} V(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt) \\ I(x,t) = \frac{1}{R_o} (f_1(x-vt) - f_2(x+vt)) \end{cases} \text{ dove } \begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} \end{cases}$$

- Ci aspettiamo quindi le solite onde progressive e regressive
- Ad alte frequenze ci aspettiamo anche che siano attenuate durante la loro propagazione di  $\exp(-\alpha x)$ .
- Inoltre ci aspettiamo che l'impedenza della linea (rapporto tra V e I per ciascuna delle onde) sia  $R_o$ .

$$\begin{cases} C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d) \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}}$$

## Segnali Impulsivi

$$\begin{cases} C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu / \epsilon} \ln(D/d) \end{cases}$$

- Numeri tipici per l' RG-58:

□  $\epsilon_R = 2$ ,  $v = c/\sqrt{2}$

•  $C_u = 100 \text{ pF/m}$

•  $R_o = 50 \Omega$

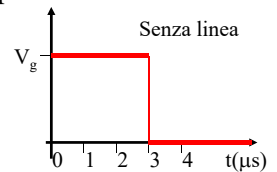
•  $v = 20 \text{ cm/ns}$

□  $\tau = 5 \text{ ns/m}$

- Quindi un cavo di 100m introduce un ritardo di 500 ns.

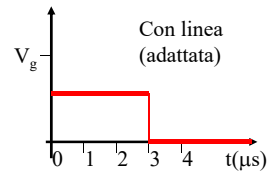
## Segnali Impulsivi

- Supponiamo di collegare la linea ad un generatore con R interna pari a  $R_o$ , e che genera un impulso ampio  $V_g$  per un tempo T.
- Il generatore "vede" un carico di impedenza  $R_o$ , almeno finché non arriva l' onda regressiva dall' altra estremità.



- Quindi nel punto  $x=0$  a  $t=0$  e per un tempo  $2t_f = 2\ell/v$  si ha

$$\begin{cases} V(x=0, t) = V_{in} = V_g \frac{R_o}{R_o + R_g} \\ I(x=0, t) = I_{in} = V_g \frac{1}{R_o + R_g} \end{cases}$$



## Linea Adattata

- Al tempo  $t_f = \ell/v$  il segnale arriva all' estremità opposta della linea, attenuato di  $\exp(-\alpha \ell)$ :

$$\begin{cases} V(x = \ell, t) = V_{out} = V_{in} e^{-\alpha \ell} \\ I(x = \ell, t) = \frac{V_{out}}{R_o} \end{cases}$$

- La seconda eq. deriva dal fatto che c'è solo l' onda progressiva.
- Quello che avviene successivamente dipende da come è **terminata** la linea. Supponiamo che sia chiusa su una resistenza  $R_c$ . Nell' attimo in cui il segnale arriva all' estremità trova la resistenza  $R_c$  che chiude la linea.
- Se  $R_c = R_o$  non c'è cambiamento, perché  $V(x, t)/I(x, t) = R_o$  come era nella linea. La resistenza  $R_o$  assorbe completamente ed esattamente le tensioni e correnti arrivate in quel punto, e quindi non parte l' onda regressiva – non c'è riflessione. Si dice che la linea è **adattata**.

## Linea Aperta

- Se la linea è **aperta** ( $R_c = \infty$ ) in  $x = \ell$  ci deve essere sempre  $I(x = \ell) = 0$ . Possiamo garantire che questo avvenga sovrapponendo all' onda progressiva che è arrivata fin lì una onda regressiva (riflessa) tale che le correnti generate dalle due onde si annullino perfettamente. Avremo quindi

$$0 = I(x = \ell, t) = I_{out} + I_{rifl} \Rightarrow I_{rifl} = -I_{out}$$

e anche  $V_{rifl} = V_{out}$

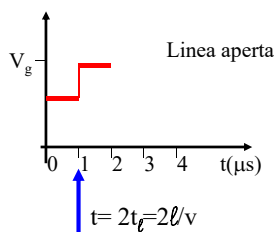
definendo il coefficiente di riflessione  $\Gamma = \frac{V_{rifl}}{V_{out}}$

si ha in questo caso  $\Gamma = 1$ . Quindi sommando le due onde :

$$V(x = \ell, t = t_f) = V_{rifl} + V_{out} = 2V_{in} e^{-\alpha \ell}$$

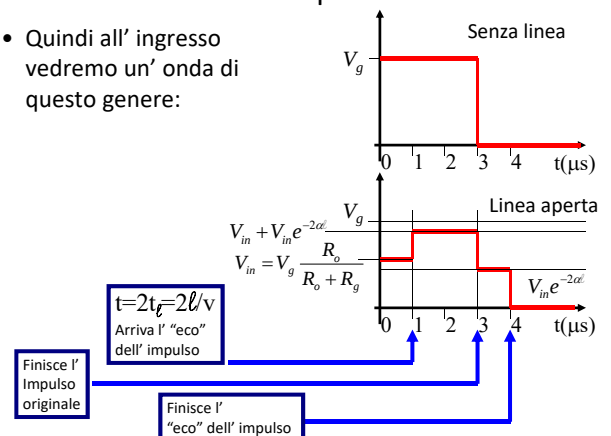
## Linea Aperta

- Quest' onda riflessa comincia a viaggiare indietro lungo la linea, e al tempo  $t = 2t_f = 2\ell/v$  arriva all' ingresso della linea, attenuata di un ulteriore fattore  $\exp(-\alpha \ell)$ .
- A  $t = 2t_f$  la tensione in ingresso sale quindi a  $V_{in} + V_{in} e^{-2\alpha \ell}$



## Linea Aperta

- Quindi all' ingresso vedremo un' onda di questo genere:

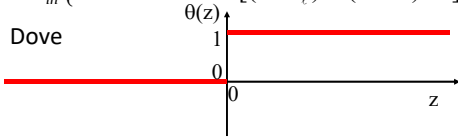


### Linea Aperta

- Consideriamo adesso un punto diverso, a distanza  $x$  da quello iniziale: in ogni punto della linea avremo la sovrapposizione di onda progressiva e onda regressiva: per  $t_\ell < t < 2t_\ell$

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_{in} e^{-\alpha \ell} + V_{out} e^{-\alpha(\ell-x)} \theta[(t - t_\ell) - (\ell - x)/v] = \\ &= V_{in} e^{-\alpha \ell} + V_{in} e^{-\alpha \ell} e^{-\alpha(\ell-x)} \theta[(t - t_\ell) - (\ell - x)/v] = \\ &= V_{in} \{ e^{-\alpha \ell} + e^{-\alpha(2\ell-x)} \theta[(t - t_\ell) - (\ell - x)/v] \} \end{aligned}$$

- Dove



### Linea in corto

- Se la linea è **in corto** ( $R_c=0$ ) in  $x=\ell$  ci deve essere sempre  $V(x=\ell)=0$ . Possiamo garantire che questo avvenga sovrapponendo all'onda progressiva che è arrivata fin lì una onda regressiva (riflessa) tale che le tensioni generate dalle due onde si annullino perfettamente. Avremo quindi

$$0 = V(x=\ell, t) = V_{out} + V_{rifl} \Rightarrow V_{rifl} = -V_{out}$$

$$\text{e quindi } \Gamma = \frac{V_{rifl}}{V_{out}} = -1$$

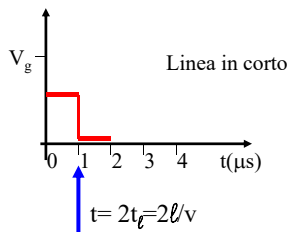
Quindi sommando le due onde:

$$V(x=\ell, t=t_\ell) = V_{rifl} + V_{out} = 0$$

$$I(x=\ell, t=t_\ell) = \frac{1}{R_o} (V_{out} - V_{rifl}) = 2 \frac{V_{out}}{R_o}$$

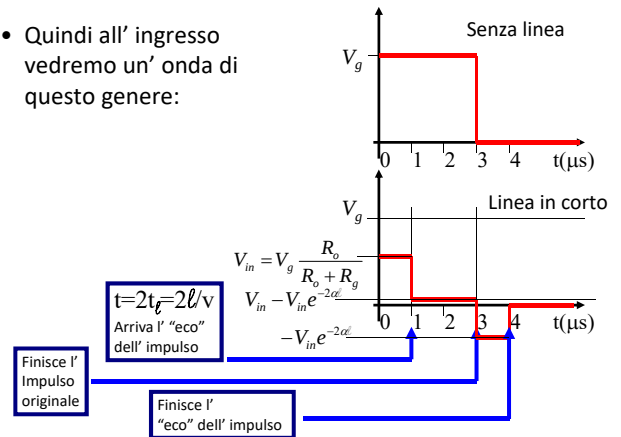
### Linea in corto

- Quest'onda riflessa comincia a viaggiare indietro lungo la linea, e al tempo  $t=2t_\ell=2\ell/v$  arriva all'ingresso della linea: Se non fosse attenuata annullerebbe perfettamente la tensione del generatore. Ma è attenuata un fattore  $\exp(-2\alpha\ell)$ :  $V_{in} - V_{in} e^{-2\alpha\ell}$



### Linea in corto

- Quindi all'ingresso vedremo un'onda di questo genere:



### In generale

- Per  $R_c$  qualsiasi ricaviamo il coefficiente di riflessione imponendo la legge di Ohm per  $R_c$ :

$$\frac{V(x=\ell, t=t_\ell)}{I(x=\ell, t=t_\ell)} = R_c$$

$$\frac{V_{in} e^{-\alpha \ell} + \Gamma V_{in} e^{-\alpha \ell}}{\frac{V_{in} e^{-\alpha \ell}}{R_o} - \frac{\Gamma V_{in} e^{-\alpha \ell}}{R_o}} = R_c \Rightarrow \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{R_c}{R_o}$$

- Si verifica facilmente che  $\Gamma$  vale 0 per  $R_c=R_o$ , vale 1 per  $R_c$  infinita e vale -1 per  $R_c=0$ .

- In ingresso  $V(x=0, t=2t_\ell) = V_{in} (1 + \Gamma e^{-2\alpha \ell})$

- Tutto questo verrà verificato sperimentalmente nell'ultima esperienza del corso (30/5/2018).

$$\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{R_c}{R_o}$$

$$V(x=0, t=2t_\ell) = V_{in} (1 + \Gamma e^{-2\alpha \ell})$$