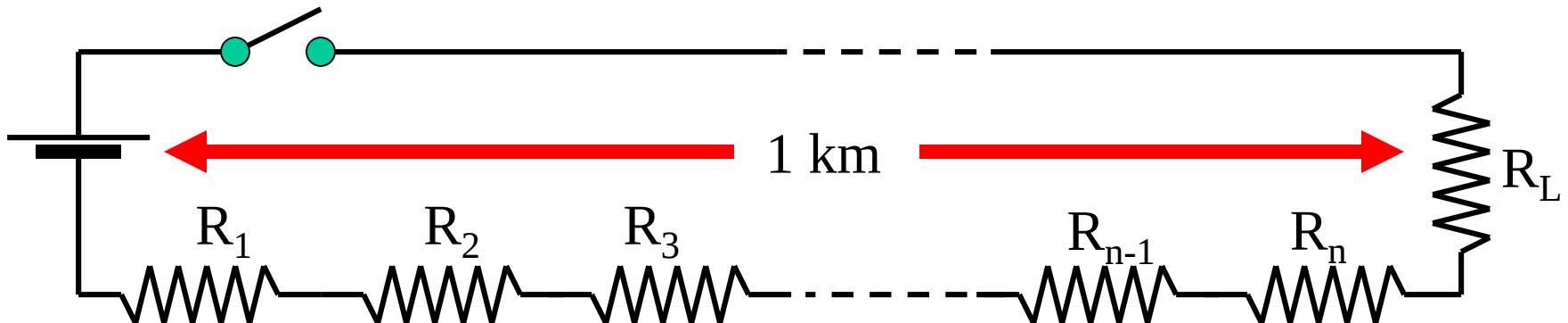


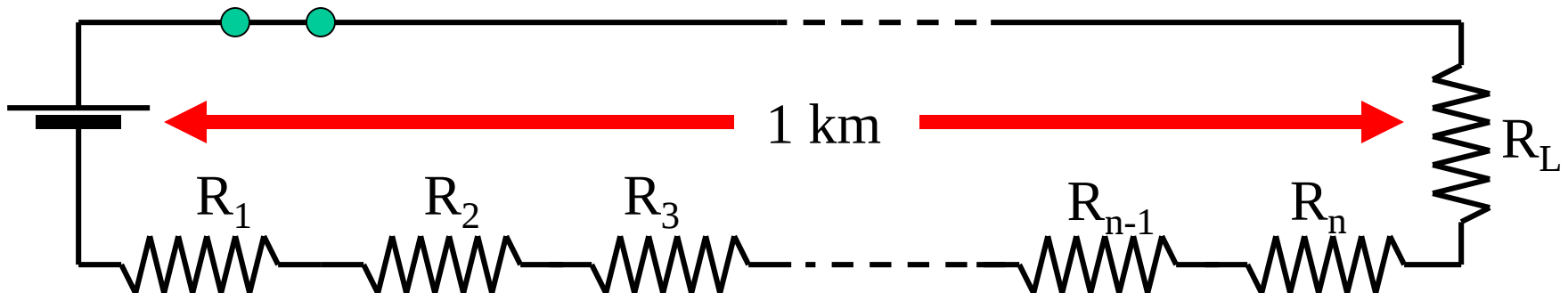
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Kirchhoff prevederebbe che appena chiuso l'interruttore scorresse *istantaneamente* una corrente $I=V/R_{\text{tot}}$
- Inoltre, se si lavora con tensioni variabili nel tempo si assume che la corrente sia *in ogni istante la stessa* in tutta la maglia.



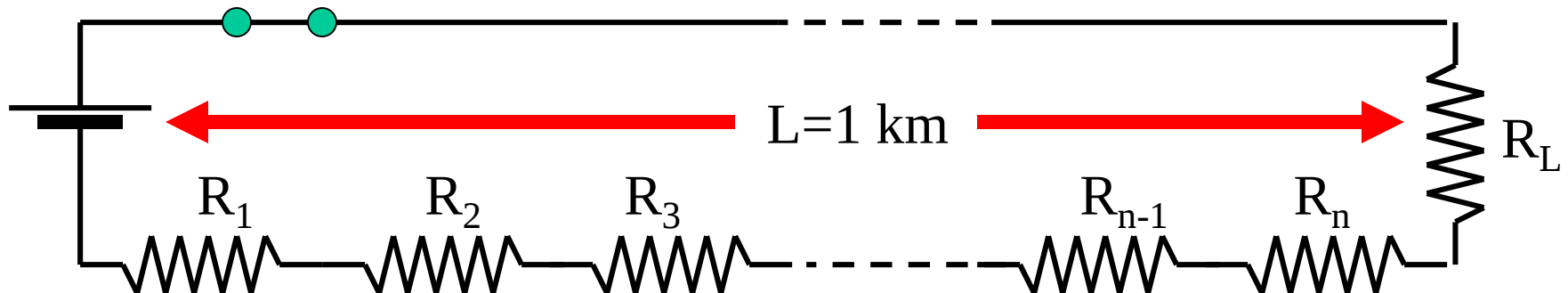
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Kirchhoff prevederebbe che appena chiuso l'interruttore scorresse *istantaneamente* una corrente $I=V/R_{\text{tot}}$
- Inoltre, se si lavora con tensioni variabili nel tempo si assume che la corrente sia *in ogni istante la stessa* in tutta la maglia.



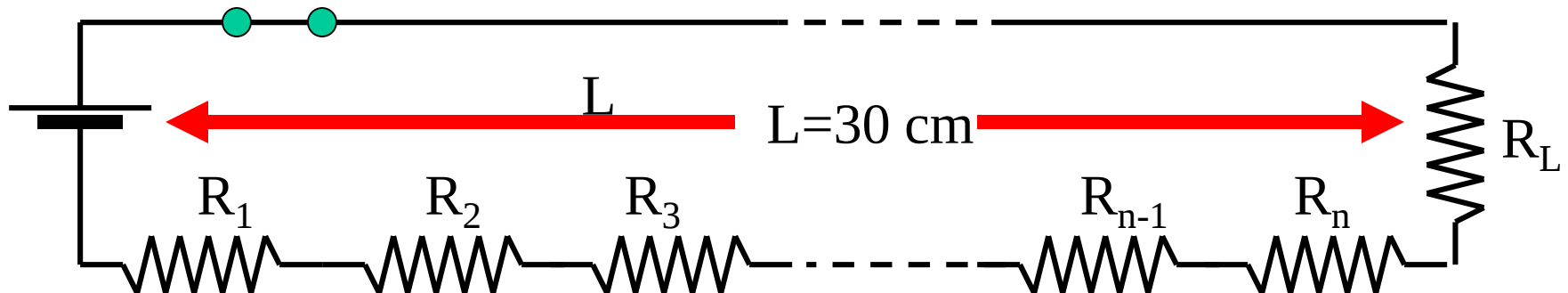
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Evidentemente questo non può essere, perchè implicherebbe un trasferimento istantaneo dell'informazione «interruttore chiuso» dall'interruttore al carico.
- Le informazioni non possono viaggiare a velocità maggiore di quella della luce.
- La corrente non può arrivare alla R_L prima di $t_0 + L/c$. Qui c è la velocità della luce: $c = 30 \text{ cm/ns}$.



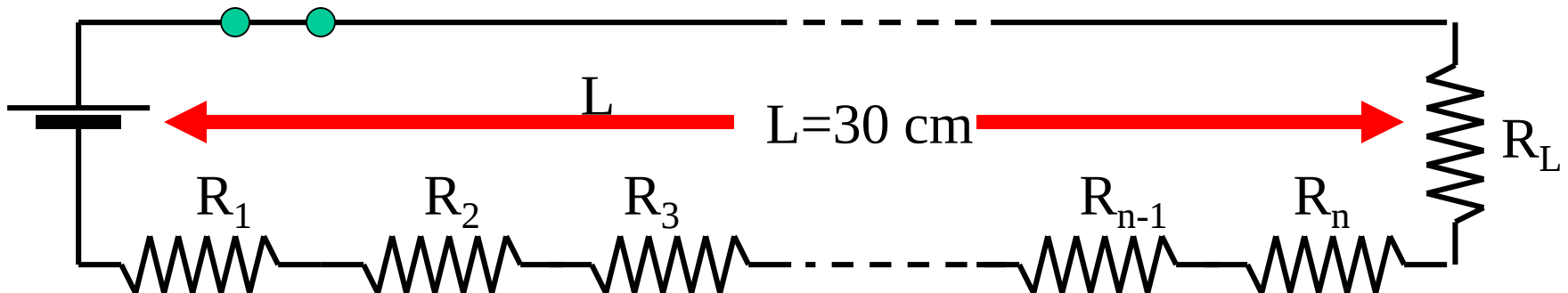
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Se ipotizziamo che i segnali si propaghino a velocità dell'ordine di c , per $L=30$ cm abbiamo un ritardo di circa 1 ns.
- Una corrente sinusoidale a $f=1$ GHz arriverà al carico R_L in ritardo di un intero periodo.



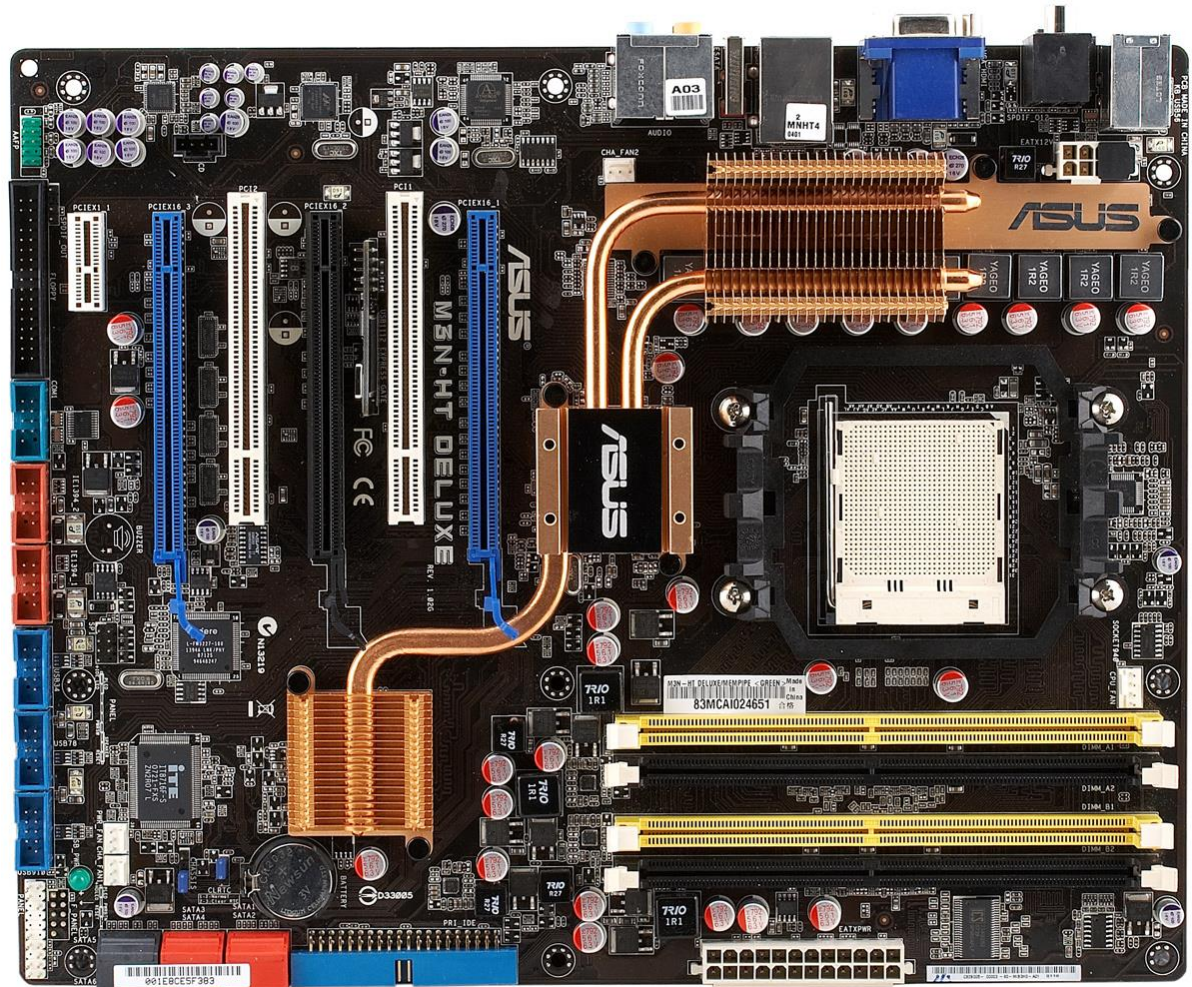
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Quindi possiamo trattare con l' approssimazione istantanea di Kirchhoff *circuiti piccoli e a frequenze $\ll 1$ GHz*.
- Altrimenti dovremo utilizzare le equazioni di Maxwell.



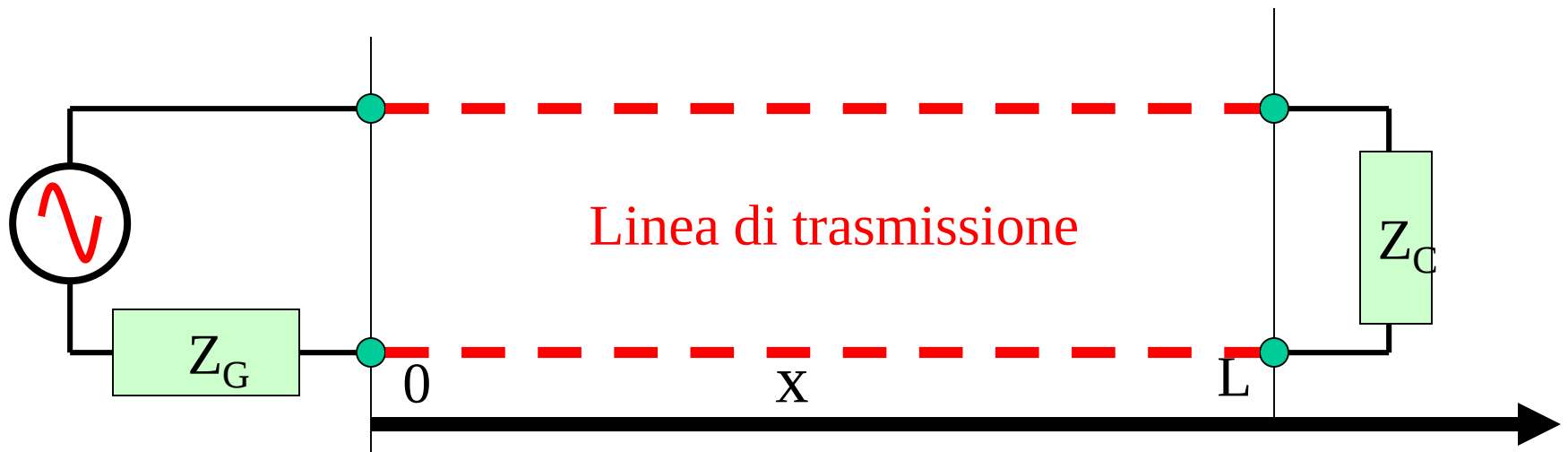
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Esempio comune: la motherboard di un computer ha dimensioni dell'ordine di 20 cm ed il segnale di clock è a 3-4 GHz.
- I progettisti devono tenere conto del ritardo nella propagazione dei segnali dalla CPU ai chip esterni (ad esempio la RAM deve essere molto vicina alla CPU), altrimenti non si sincronizza nulla !



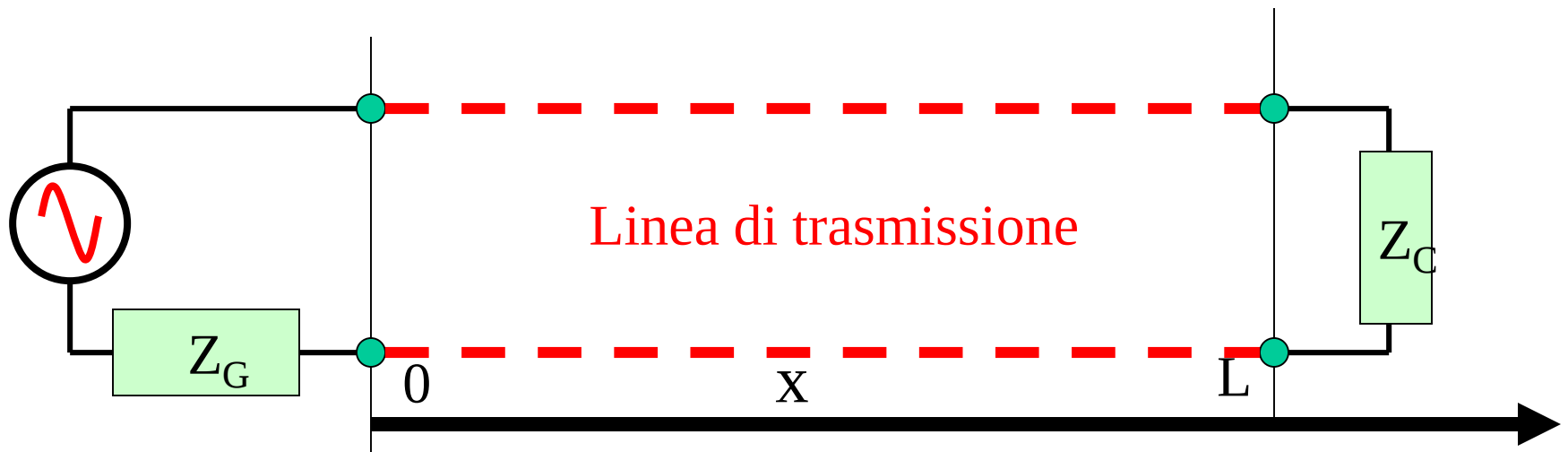
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Consideriamo ora il circuito elementare per la trasmissione di segnali su lunghe distanze, la cosiddetta “linea di trasmissione”.



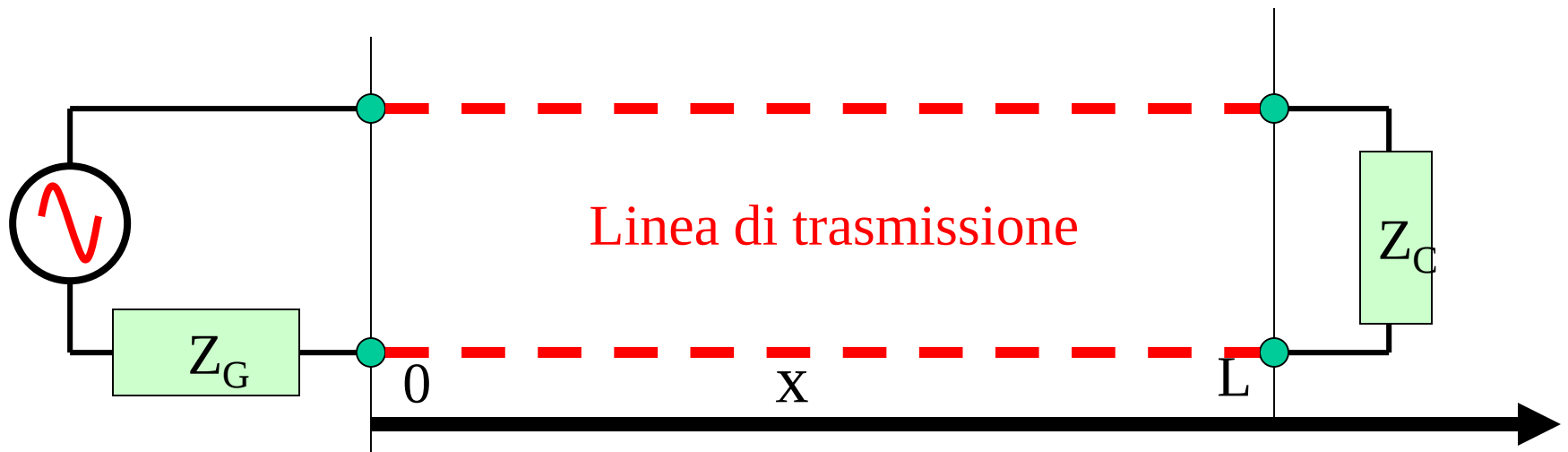
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- In pratica questa può essere una piattina bifilare, o il cavo telefonico, o il cavo coassiale RG58 (BNC) che si usa in laboratorio o per le antenne, una pista di rame su un circuito stampato



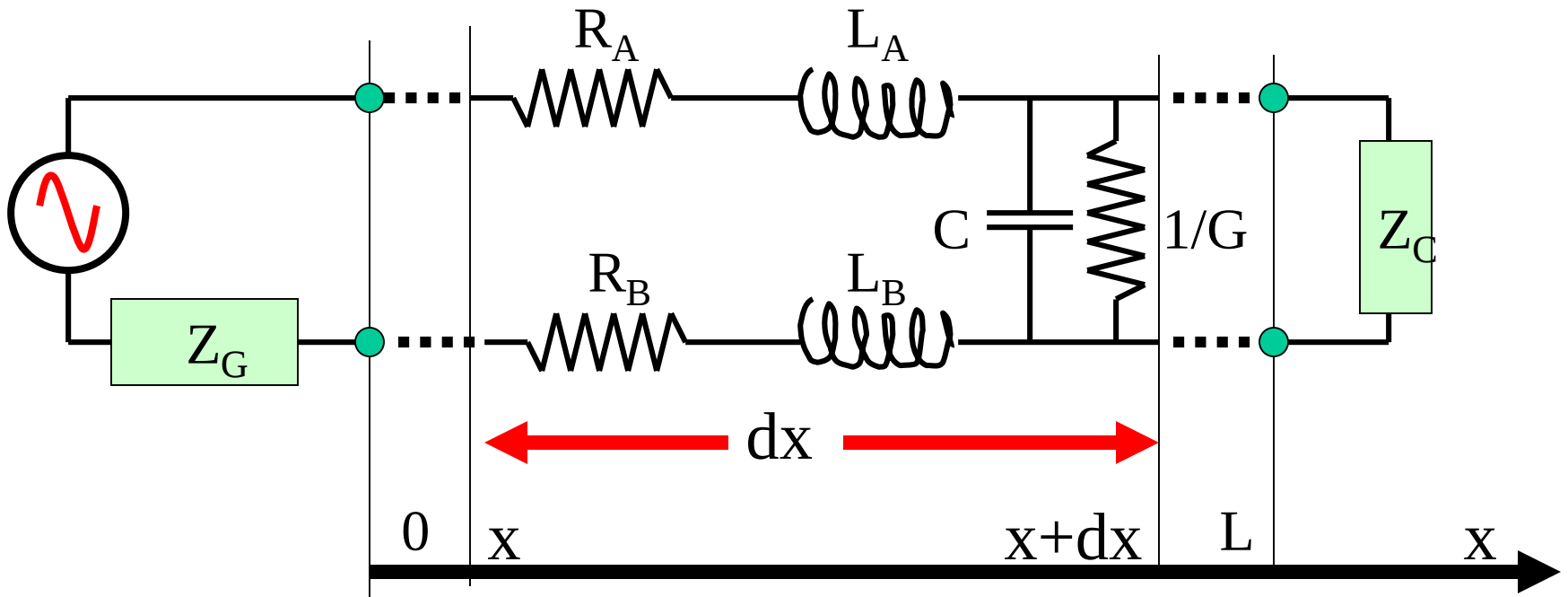
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Sia $V_G(t)$ la tensione del generatore e Z_G la sua impedenza interna.
- Sia Z_C l'impedenza del carico.



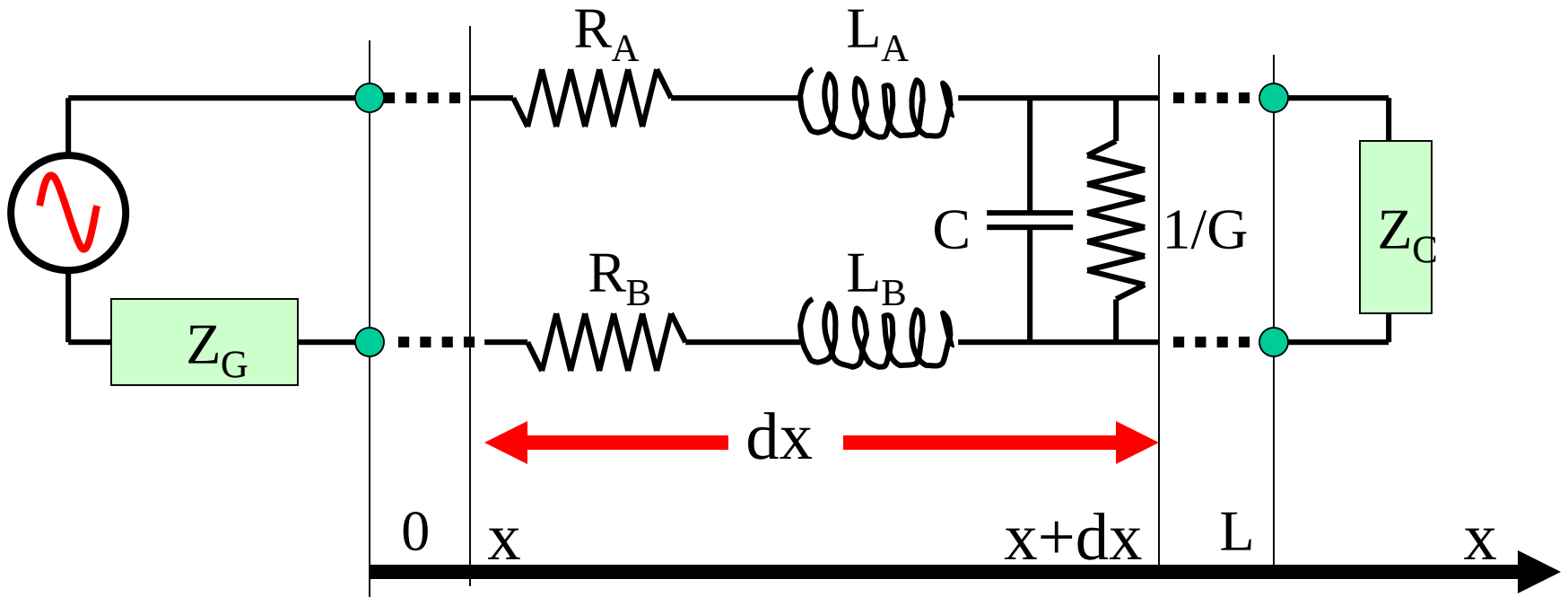
Linea di Trasmissione

- Schematizziamo la linea come due conduttori paralleli, con distanza e sezione costanti e fermi al passare del tempo (linee uniformi).
- Consideriamo un tratto dx della linea, e schematizziamolo col circuito equivalente visibile sotto:



Linea di Trasmissione

- Tra le posizioni x e $x+dx$ tensione e corrente variano, perchè ci sono *cadute di tensione* dovute a R e L , e *perdite di corrente* dovute a C e G .
- Siccome il tratto di circuito considerato è piccolo, al suo interno si può usare la trattazione standard:

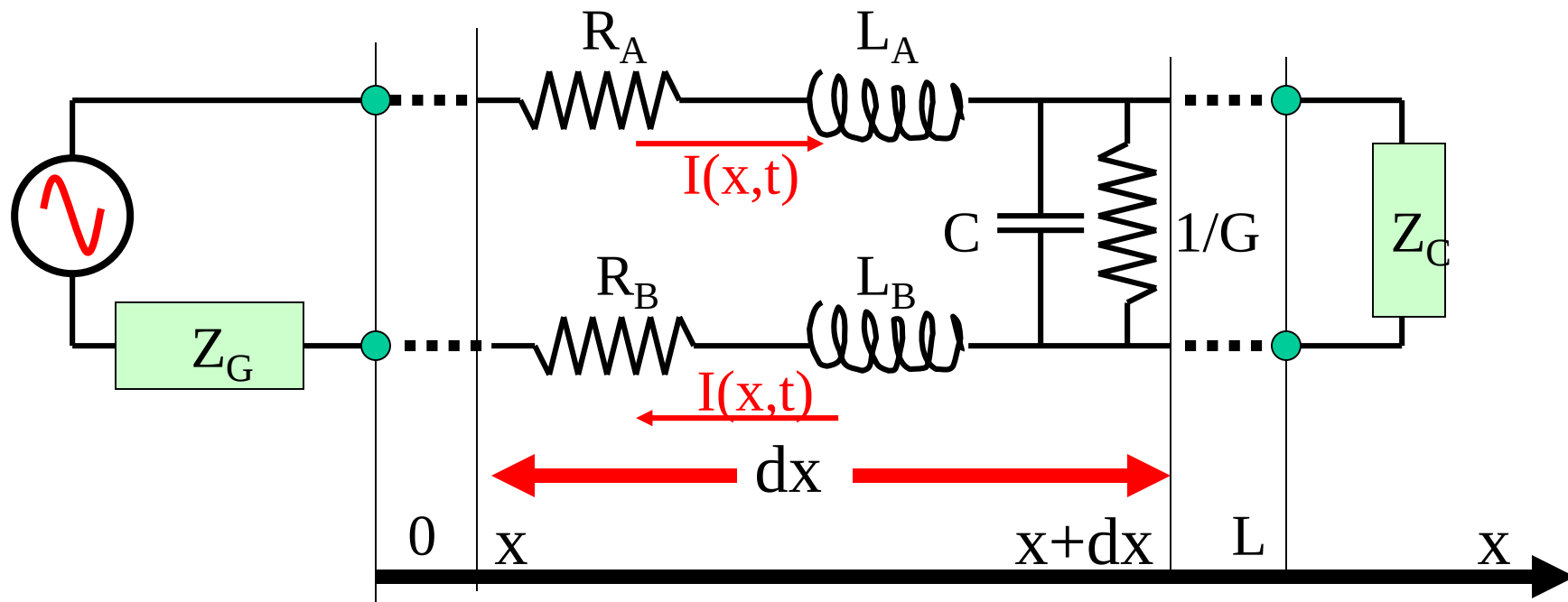


Linea di Trasmissione:

cadute di tensione

$$dV_A = V_A(x + dx, t) - V_A(x, t) = -R_A I(x, t) - L_A \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$dV_B = V_B(x + dx, t) - V_B(x, t) = R_B I(x, t) + L_B \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$



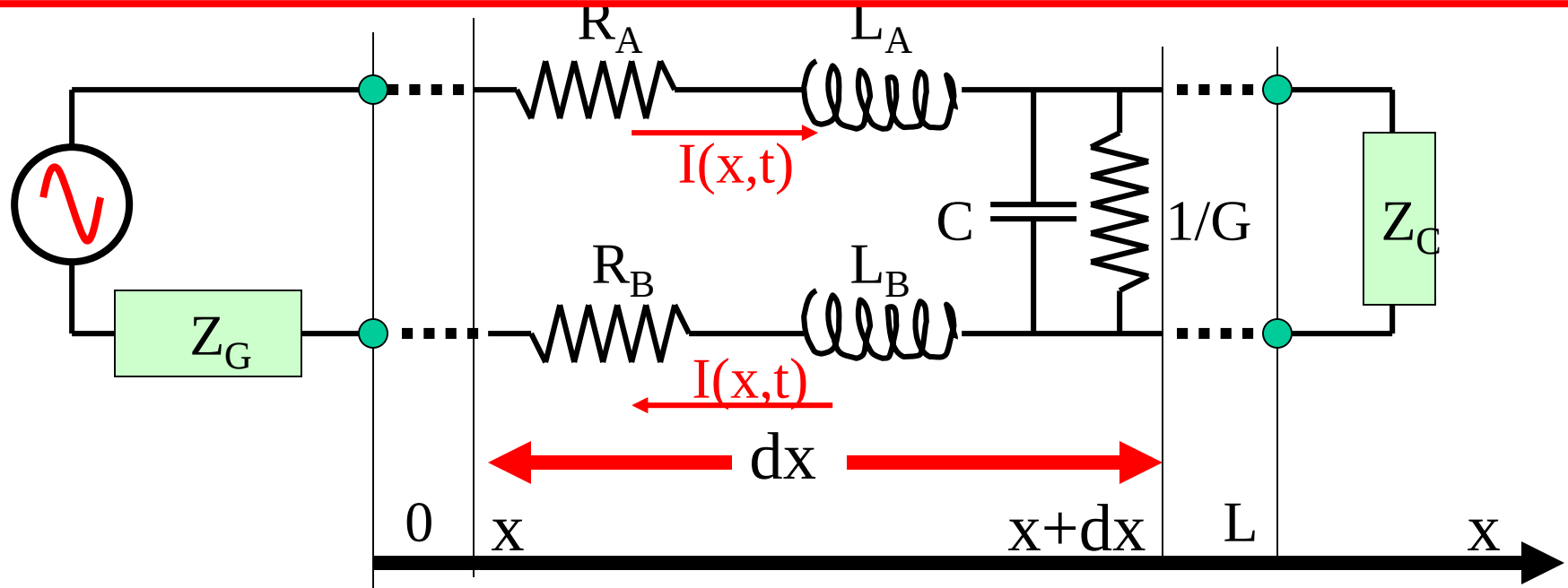
$$dV_A = V_A(x + dx, t) - V_A(x, t) = -R_A I(x, t) - L_A \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$dV_B = V_B(x + dx, t) - V_B(x, t) = R_B I(x, t) + L_B \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$V(x + dx) - V(x) =$$

$$= [V_A(x + dx, t) - V_B(x + dx, t)] - [V_A(x, t) - V_B(x, t)]$$

$$V(x + dx) - V(x) = -(R_A + R_B)I(x, t) - (L_A + L_B) \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$



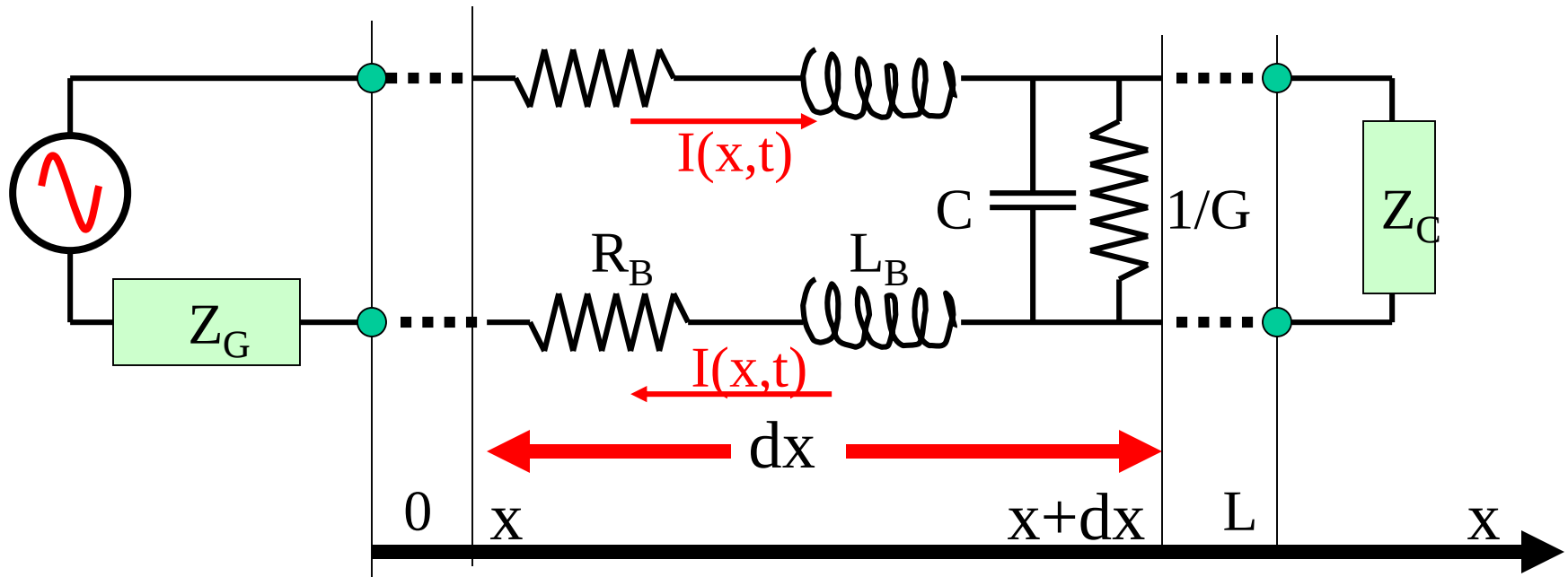
- Definendo

$$R_u = \frac{R_A + R_B}{dx}$$

Resistenza per unità
di lunghezza

$$L_u = \frac{L_A + L_B}{dx}$$

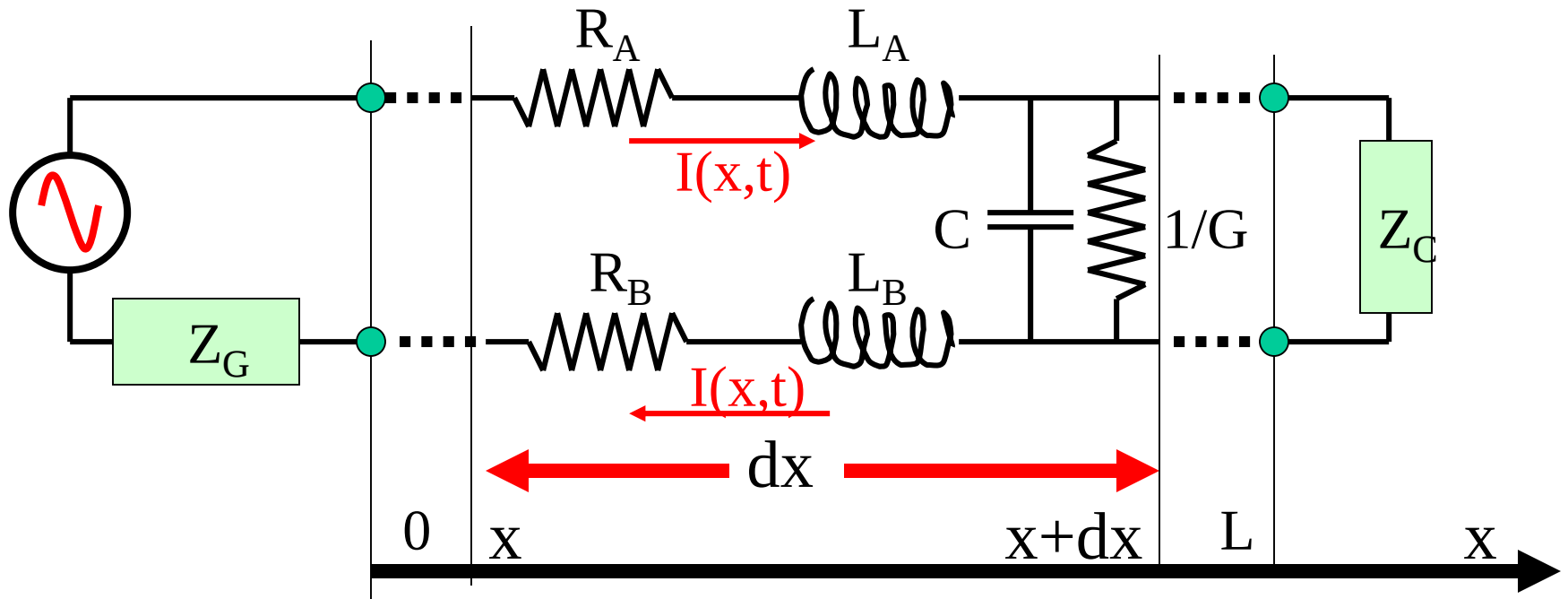
Induttanza per unità
di lunghezza



$$V(x+dx) - V(x) = -(R_A + R_B)I(x,t) - (L_A + L_B)\frac{\partial}{\partial t}I(x,t)$$

$$V(x+dx) - V(x) = -\left[R_u dx + L_u dx \frac{\partial}{\partial t} \right] I(x,t)$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\left[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t} \right] I(x,t) \Rightarrow \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -[Z_u]I(x,t)$$



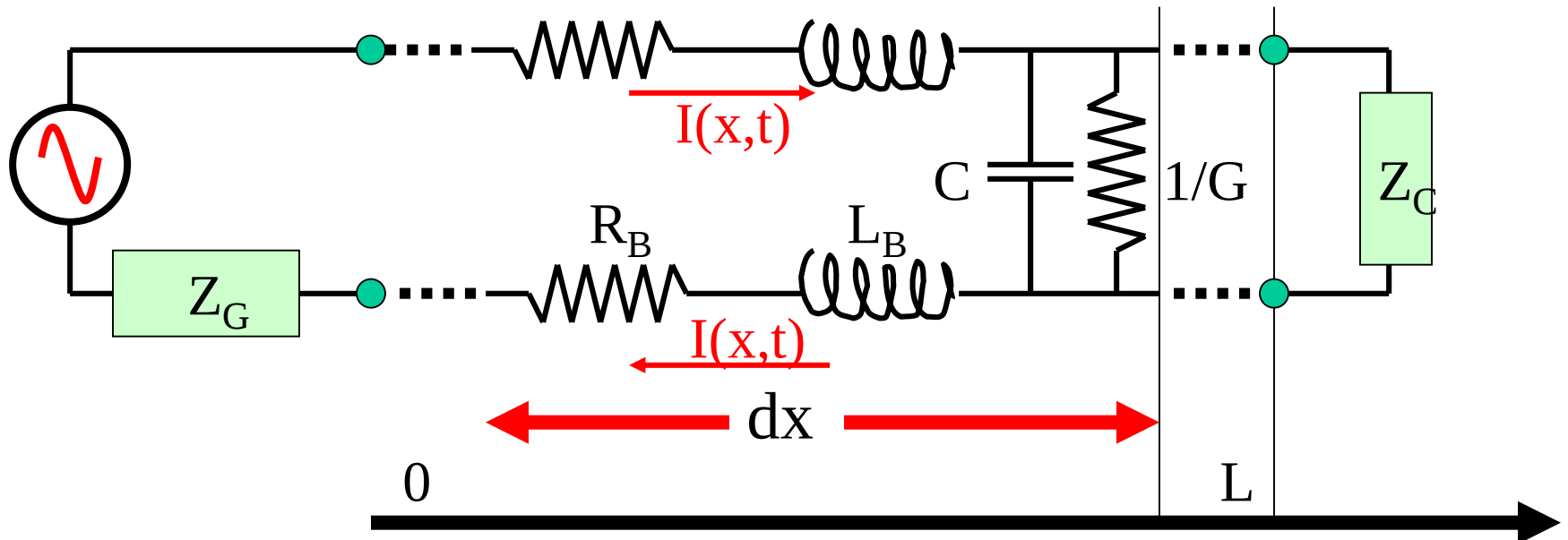
Linea di Trasmissione:

perdite di corrente ($1/G$ è una resistenza)...

$$dI(x,t) = -GV(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} Q(x,t) = -GV(x,t) - C \frac{\partial}{\partial t} V(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x,t) = -\left[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t} \right] V(x,t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} I(x,t) = -[Y_u] V(x,t)$$

Come prima: G_u e C_u conducibilità e capacità per unità di lunghezza

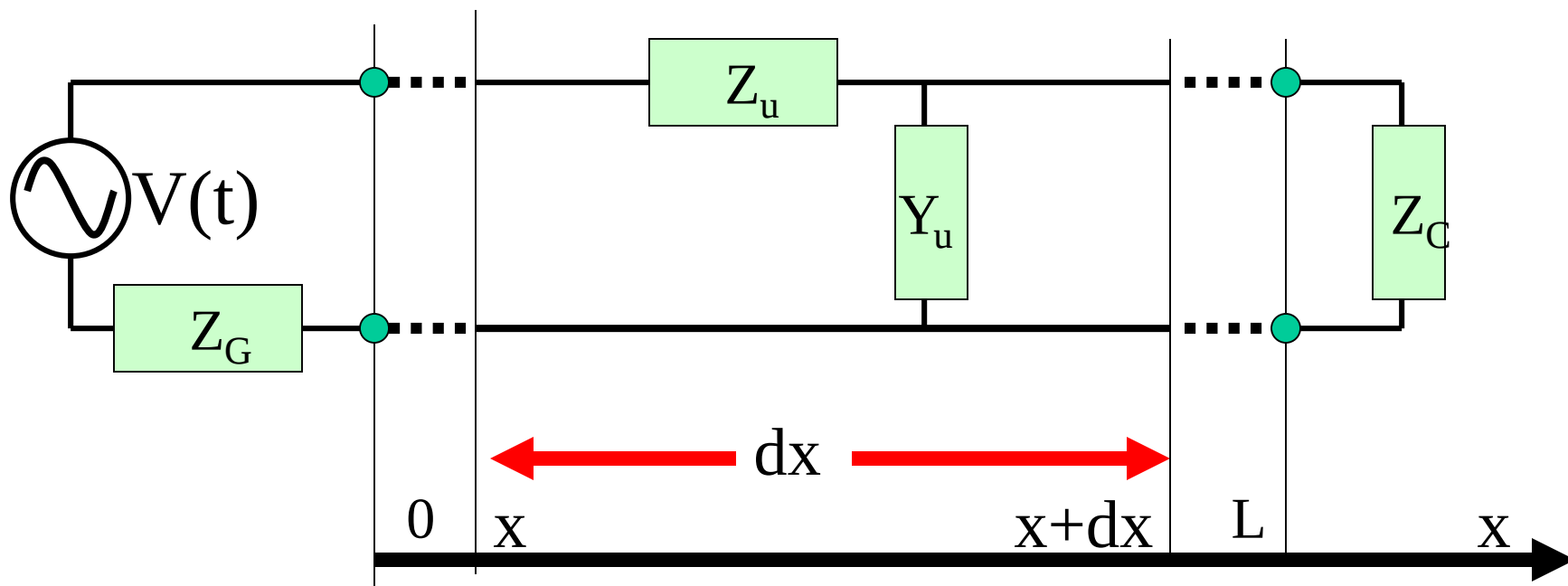


Y_u e Z_u = Ammettenza e Impedenza della linea per unità di lunghezza

Linea di Trasmissione:

equazioni differenziali e quadropolo equivalente

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = - \left[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t} \right] I(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = - \left[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t} \right] V(x,t) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = - [Z_u] I(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = - [Y_u] V(x,t) \end{cases}$$



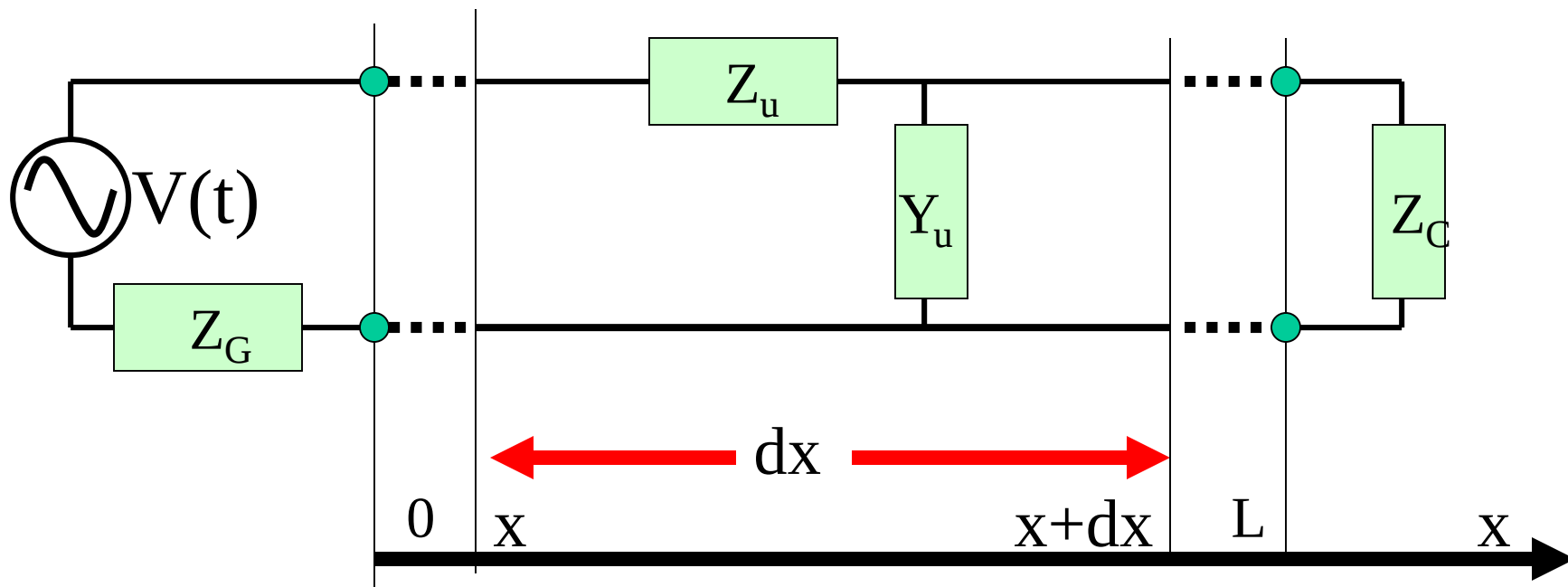
Linea di Trasmissione:

Per segnali sinusoidali

$$Z = R + j\omega L \quad \Rightarrow \quad Z_u dx = (R_u + j\omega L_u) dx$$

$$Y = G + j\omega C \quad \Rightarrow \quad Y_u dx = (G_u + j\omega C_u) dx$$

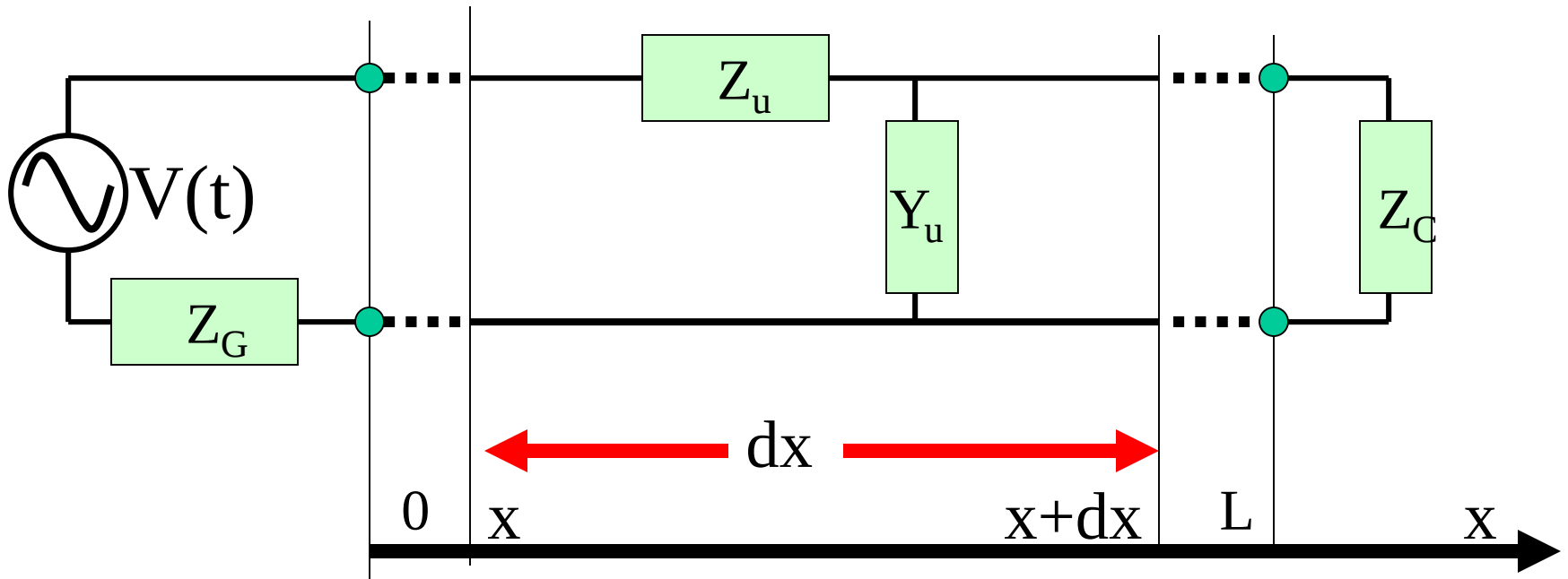
Dove Z_u e Y_u sono impedenza e ammettenza della linea per unità di lunghezza.



$$\begin{cases} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -[Z_u]I(x) \\ \frac{\partial I(x)}{\partial x} = -[Y_u]V(x) \end{cases}$$

Equazioni dei
Telegrafisti

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -[Z_u] \frac{\partial}{\partial x} I(x) = Z_u Y_u V(x) \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = -[Y_u] \frac{\partial}{\partial x} V(x) = Z_u Y_u I(x) \end{cases}$$

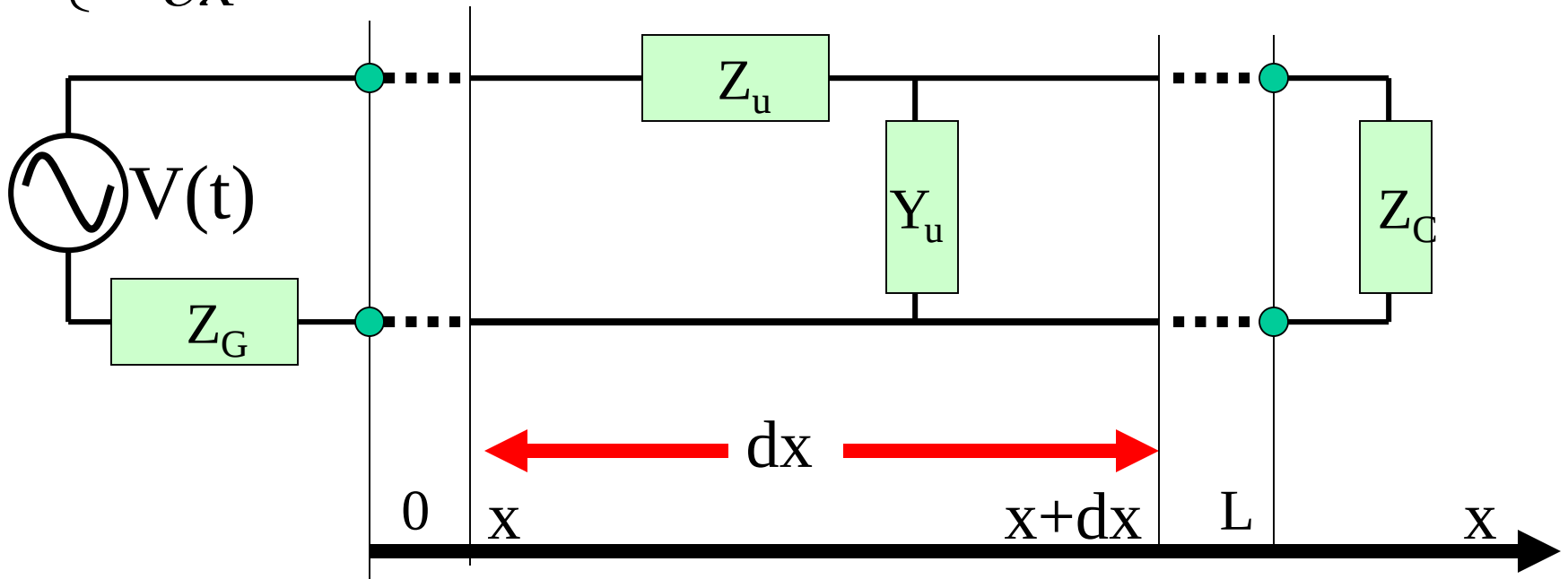


Equazioni dei
Telegrafisti

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = Z_u Y_u V(x) = \gamma^2 V(x) \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = Z_u Y_u I(x) = \gamma^2 I(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 V(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 I(x) = 0 \end{cases}$$

$$\gamma^2 = Z_u Y_u$$



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 V(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 I(x) = 0 \end{cases}$$

Equazioni dei
Telegrafisti

la soluzione e' del tipo

$$c_1 e^{-\gamma x} + c_2 e^{+\gamma x} \quad \text{quindi}$$

$$\vec{V}(x) = \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x}$$

dove le costanti A_1 e A_2 contengono le fasi : $\vec{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1}$

$$\vec{A}_2 = A_2 e^{j\varphi_2}$$

$$\vec{Z}_0 = Z_0 e^{j\psi}$$

definendo

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\vec{Z}_u \vec{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L)(G_u + j\omega C)}$$

$$\vec{V}(x) = \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x} = \vec{A}_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} + \vec{A}_2 e^{+(\alpha + j\beta)x}$$

Soluzione per V

$$\begin{aligned}\vec{V}(x) &= \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x} = \\ &= \vec{A}_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} + \vec{A}_2 e^{+(\alpha + j\beta)x} = \\ &= A_1 e^{j\varphi_1} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_2 e^{j\varphi_2} e^{+\alpha x} e^{j\beta x}\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}V(x, t) &= \operatorname{Re}\left\{\vec{V}(x) e^{j\omega t}\right\} \\ &= A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \text{ Onda progressiva} \\ &+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \text{ Onda regressiva}\end{aligned}$$

Onda progressiva

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \\ + A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2)$$

Onda regressiva

- L' ampiezza decresce esponenzialmente con la distanza, a causa delle dissipazioni R e G
- l' onda progressiva A_1 è grande all' inizio della linea e si smorza
- l' onda regressiva A_2 è grande alla fine della linea e si smorza “rimbalzando indietro”

Onda progressiva

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) + A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2)$$

Onda regressiva

- Vediamo perchè l'onda A1 è detta progressiva.
- La velocità (di fase) v è la velocità che deve avere un osservatore viaggiante lungo la linea per vedere sempre la stessa fase dell'onda (ad esempio viaggiando a cavalcioni di una cresta o in fondo a un ventre).
- La condizione di fase costante è

$$\omega t - \beta x + \varphi_1 = K \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \varphi_1) = 0$$

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

Velocità di fase
positiva per A1

- La soluzione in regime sinusoidale è

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \overset{\text{Onda progressiva}}{\cos(\omega t - \beta x + \varphi_1)} + A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \overset{\text{Onda regressiva}}{}$$

- Le due onde si propagano nella linea con velocità di fase
 $(\beta = \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sqrt{Z_u Y_u}))$

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

Per l'onda progressiva

$$v = -\frac{\omega}{\beta}$$

Per l'onda regressiva

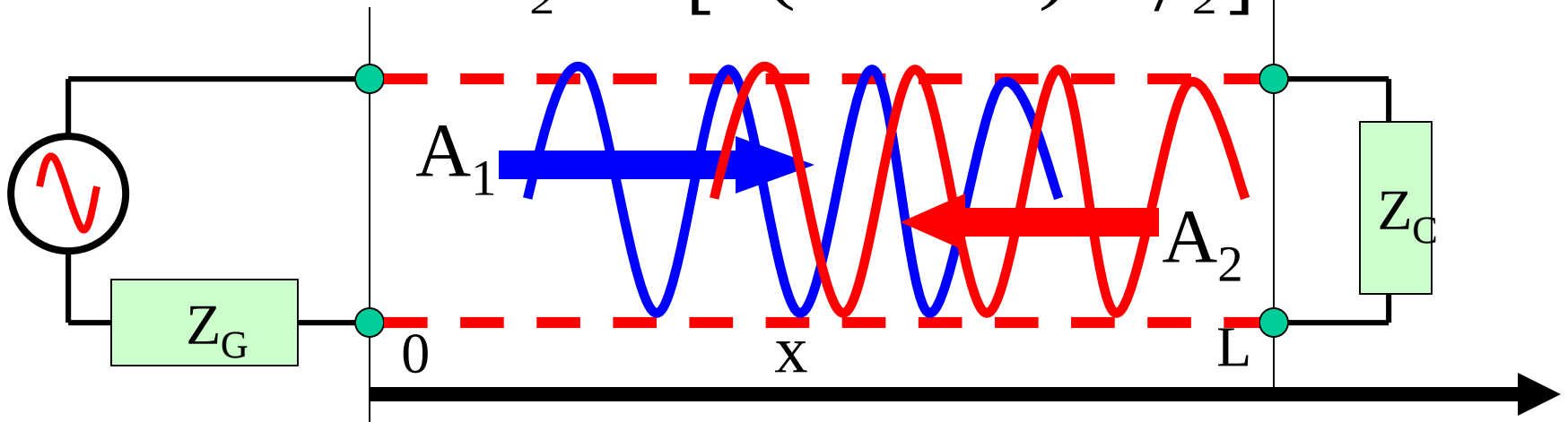
Caso non dissipativo:

- Nel limite di $R_u=0$ e $G_u=0$, si calcola facilmente

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\vec{Z}_u \vec{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} = \\ \Rightarrow \sqrt{(j\omega L_u)(j\omega C_u)} = j\omega \sqrt{L_u C_u}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}} ; \quad \tau = \sqrt{L_u C_u}$$

$$V(x, t) = A_1 \cos[\omega(t - x/v) + \varphi_1] + \\ + A_2 \cos[\omega(t + x/v) + \varphi_2]$$



Esempio: Cavo coassiale RG-58



Autoinduzione in un cavo coassiale

Coefficiente di autoinduzione L definito da : $\Phi = Li$

Dove Φ è il flusso di B : $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Nel caso di un cavo coassiale percorso da corrente i il campo all' interno del cavo è tangenziale, e la sua intensità a distanza r dall' asse si ricava dal teorema della circuitazione:

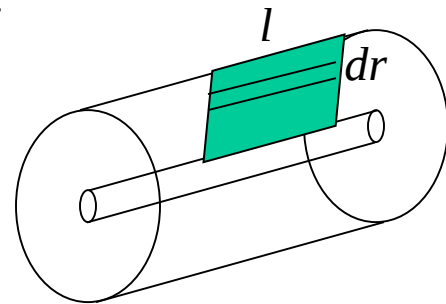
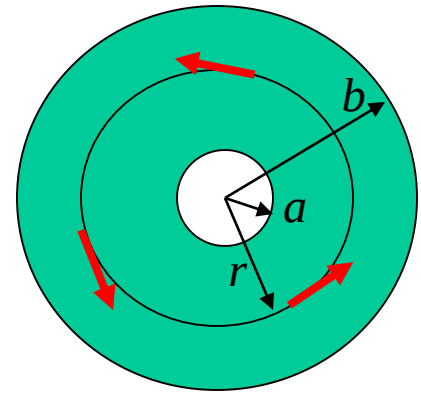
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu i \quad \rightarrow \quad B 2\pi r = \mu i \quad \rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu i}{2\pi r}$$

Allora si può calcolare il flusso di B attraverso una superficie rettangolare interna al cavo, lunga l :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b B(r) l dr = l \frac{\mu i}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = l \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

E quindi l' induttanza per unità di lunghezza è

$$L_u = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{il} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



Capacità di un condensatore cilindrico

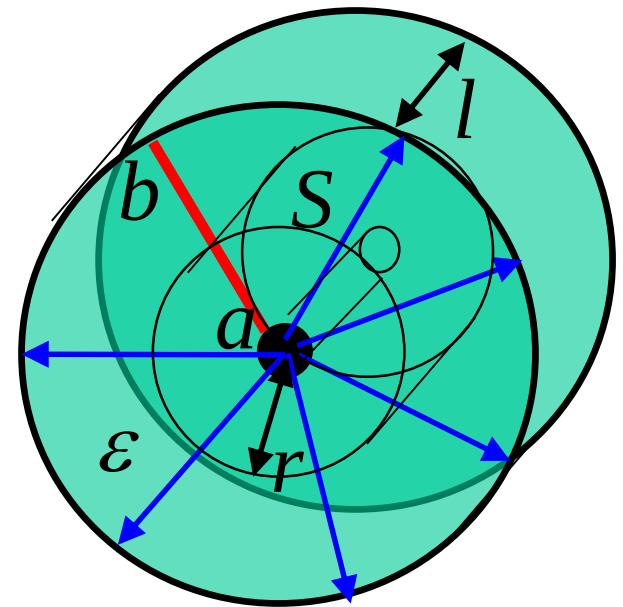
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q / \varepsilon \longrightarrow E 2\pi r l = Q / \varepsilon$$

$$E(r) = Q / (2\pi r \varepsilon l) = \rho / (2\pi r \varepsilon)$$

$$\Delta V_{ab} = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{\rho}{2\pi r \varepsilon} dr = \frac{\rho}{2\pi \varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi \varepsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\rho l}{\Delta V} = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$C_u = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \varepsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$



Esempio: cavo coassiale RG-58

$$\left\{ \begin{array}{l} C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu / \epsilon} \ln(b/a) \end{array} \right.$$

- Numeri tipici per l' RG-58:

- ☐ $\epsilon_R=2, v=c/\text{sqrt}(2)$

- $C_u=100 \text{ pF/m}$

- $R_o=50\Omega$

- $v=20\text{cm/ns}$

- ☐ $\tau=5\text{ns/m}$

- Quindi un cavo di 100m introduce un ritardo di 500 ns (che misurerete nell'ultima esperienza).

Caso dissipativo:

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{\vec{Z}_u \vec{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} \\&= \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \frac{C_u R_u}{L_u C_u} + j\omega \frac{L_u G_u}{L_u C_u} - \omega^2 \frac{L_u C_u}{L_u C_u}} = \\&= \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \left(\frac{R_u}{L_u} + \frac{G_u}{C_u} \right) - \omega^2}\end{aligned}$$

Caso non distortente:

$$\gamma = \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \left(\frac{R_u}{L_u} + \frac{G_u}{C_u} \right) - \omega^2}$$

Quando $\frac{R_u}{L_u} = \frac{G_u}{C_u}$ cioè le due costanti di tempo sono uguali,

$$\gamma = \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\left(\frac{R_u}{L_u} \right)^2 + j\omega 2 \left(\frac{R_u}{L_u} \right) - \omega^2} = \sqrt{L_u C_u} \left[\frac{R_u}{L_u} + j\omega \right]$$

E quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \sqrt{L_u C_u} \frac{R_u}{L_u} = R_u \sqrt{\frac{C_u}{L_u}} \Rightarrow \text{L' attenuazione non dipende da } \omega \\ \beta = \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{La solita,} \\ \text{indipendente} \\ \text{da } \omega \end{array}$$

Tutte le onde componenti il segnale

si propagano nello stesso modo: il segnale non viene distorto.

Caso di alte frequenze

per $G_u \rightarrow 0$ e $R_u \ll \omega L_u$ (e buon isolamento):

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} \cong \\ &\cong \sqrt{j\omega C_u j\omega L_u \left(1 + \frac{R_u}{j\omega L_u}\right)} = j\omega \sqrt{C_u L_u} \left(1 - j \frac{R_u}{\omega L_u}\right) = \\ &= j\omega \sqrt{C_u L_u} \sqrt{1 - j \frac{R_u}{\omega L_u}} \cong j\omega \sqrt{C_u L_u} \left(1 - j \frac{R_u}{2\omega L_u}\right) = \\ &= \frac{R_u}{2\sqrt{\frac{L_u}{C_u}}} + j\omega \sqrt{C_u L_u}\end{aligned}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}$$

$$\alpha = \frac{R_u}{2\sqrt{\frac{L_u}{C_u}}} = \frac{R_u}{2R_o}$$

$$R_o = \sqrt{\frac{L_u}{C_u}}$$

Impedenza della
Linea, ci serve dopo

Soluzione per la corrente

(sinusoidale)

- Dall' eq. dei telegrafisti

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= -[Z_u]I(x) \Rightarrow I(x) = -\frac{1}{Z_u} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{Z_u} \frac{\partial}{\partial x} [\vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{\gamma}{Z_u} [\vec{A}_1 e^{-\gamma x} - \vec{A}_2 e^{+\gamma x}] = \\ &= \frac{\sqrt{Z_u Y_u}}{Z_u} [\vec{A}_1 e^{-\gamma x} - \vec{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_u}{Y_u}}} [\vec{A}_1 e^{-\gamma x} - \vec{A}_2 e^{+\gamma x}] \\ &\sqrt{\frac{Z_u}{Y_u}} \text{ e' una impedenza } \vec{Z}_o = Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}}\end{aligned}$$

Soluzione

$$I(x, t) = \operatorname{Re}\left\{\vec{I}(x)e^{j\omega t}\right\} =$$
$$= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{Z_o}e^{j\psi}\left[\vec{A}_1e^{-\gamma x} - \vec{A}_2e^{+\gamma x}\right]\right\} \quad \text{per la corrente (sinusoidale)}$$

$$I(x, t) = \frac{A_1}{Z_o} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1 - \psi) +$$

Onda progressiva

$$- \frac{A_2}{Z_o} e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2 - \psi)$$

Onda regressiva

- Da confrontare con:

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1)$$
$$+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2)$$

- Si vede che per ciascuna onda il rapporto tra tensione e corrente vale Z_o . Inoltre c'è uno sfasamento $-\psi$.

Usando la notazione solita:

$$\begin{aligned}\vec{Z}_o &= Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}} = \\&= \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u} (G_u - j\omega C_u) / (G_u - j\omega C_u)} \\&= \sqrt{\frac{(R_u + j\omega L_u)(G_u - j\omega C_u)}{G_u^2 - \omega^2 C_u^2}} = \\&= \sqrt{\frac{(R_u G_u + \omega^2 L_u C_u) + j\omega(L_u G_u - R_u C_u)}{G_u^2 - \omega^2 C_u^2}}\end{aligned}$$

Soluzione per la corrente

(sinusoidale)

$$\psi = \arctg \left\{ \frac{\text{Im}(\vec{Z}_o)}{\text{Re}(\vec{Z}_o)} \right\} = \arctg \left\{ \frac{\omega(G_u L_u - R_u C_u)}{R_u G_u + \omega^2 L_u C_u} \right\}^{1/2}$$

- Lo sfasamento è nullo

- Per linea non distorcente $G_u L_u = R_u C_u$
- Per linea non dissipativa $R_u \rightarrow 0 \quad G_u \rightarrow 0 \quad \vec{Z}_o \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$
- Per alte frequenze
 $R_u \ll \omega L_u \quad G_u \ll \omega C_u$

- In tutti questi casi $\vec{Z}_o = Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}} \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$

$$\vec{Z}_o \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$$

- Cioè l' impedenza si riduce a una resistenza.

Segnali Impulsivi

- Per segnali non sinusoidali la trattazione si complica molto. Ma abbiamo visto che almeno nel caso non dissipativo le diverse componenti sinusoidali si propagano tutte allo stesso modo.
- Studiamo quindi questo caso in generale:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\left[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t} \right] I(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -\left[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t} \right] V(x,t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L_u \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -C_u \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

- Derivando la prima rispetto a x e la seconda rispetto a t:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} = -L_u \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x \partial t} = -C_u \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - C_u L_u \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = 0}$$

Equazione delle onde

Segnali Impulsivi

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - C_u L_u \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

- La soluzione generale è del tipo

$$V(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad \text{con} \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}$$

- Analogamente si trova l'equazione per I, che ha soluzione

$$I(x,t) = g_1(x - vt) + g_2(x + vt)$$

- Sostituendo nella $\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -L_u \frac{\partial I(x,t)}{\partial t}$ si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \\ I(x,t) = \frac{1}{R_o} (f_1(x - vt) - f_2(x + vt)) \end{array} \right. \text{dove} \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [f_1(x - vt) + f_2(x + vt)] = -L_u \frac{\partial}{\partial t} [g_1(x - vt) + g_2(x + vt)]$$

ma

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(x - vt)} \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial(x - vt)} \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial(x + vt)} \frac{\partial(x + vt)}{\partial x} =$$

$$= -L_u \left[\frac{\partial g_1}{\partial(x - vt)} \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial(x + vt)} \frac{\partial(x + vt)}{\partial t} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial(x - vt)} + \frac{\partial f_2}{\partial(x + vt)} = -L_u \frac{\partial g_1}{\partial(x - vt)} (-v) - L_u \frac{\partial g_2}{\partial(x + vt)} (v) \Rightarrow$$

$$\left\{ \frac{\partial f_1}{\partial(x - vt)} = L_u v \frac{\partial g_1}{\partial(x - vt)} \Rightarrow g_1 = \frac{f_1}{L_u v} \right.$$

$$\left\{ \frac{\partial f_2}{\partial(x + vt)} = -L_u v \frac{\partial g_2}{\partial(x + vt)} \Rightarrow g_2 = -\frac{f_2}{L_u v} \right.$$

$$I = \frac{f_1(x - vt)}{L_u v} - \frac{f_2(x + vt)}{L_u v}$$

ma

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$R_0 = \sqrt{L_u / C_u} \Rightarrow \frac{v}{R_0} = \frac{1}{L_u} \Rightarrow L_u v = R_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \\ I(x, t) = \frac{1}{R_0} (f_1(x - vt) - f_2(x + vt)) \end{array} \right. \text{dove} \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_0 = \sqrt{L_u / C_u} \end{array} \right.$$

Segnali Impulsivi

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt) \\ I(x,t) = \frac{1}{R_o} (f_1(x-vt) - f_2(x+vt)) \end{array} \right. \text{dove} \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} \end{array} \right.$$

- Ci aspettiamo quindi le solite onde progressive e regressive
- Ad alte frequenze ci aspettiamo anche che siano attenuate durante la loro propagazione di $\exp(-\alpha x)$.
- Inoltre ci aspettiamo che l'impedenza della linea (rapporto tra V e I per ciascuna delle onde) sia R_o .

$$\left\{ \begin{array}{l} C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d) \end{array} \right. \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}}$$

Segnali Impulsivi

$$\left\{ \begin{array}{l} C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu / \epsilon} \ln(D/d) \end{array} \right.$$

- Numeri tipici per l' RG-58:

- ☐ $\epsilon_R=2, v=c/\text{sqrt}(2)$

- $C_u=100 \text{ pF/m}$

- $R_o=50\Omega$

- $v=20\text{cm/ns}$

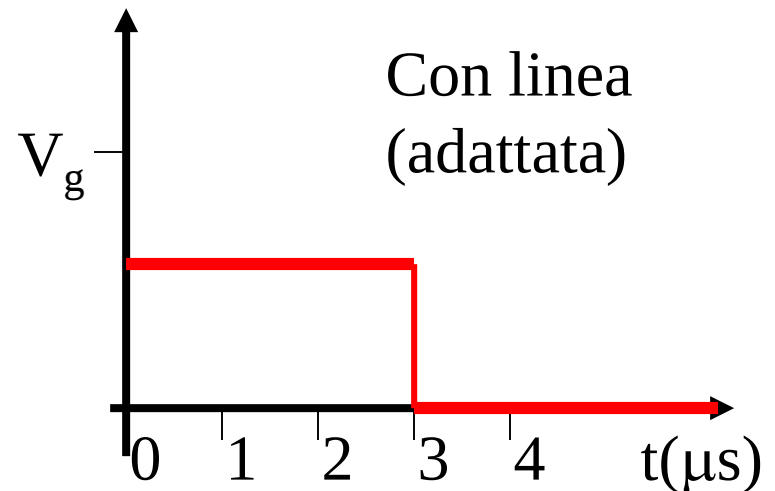
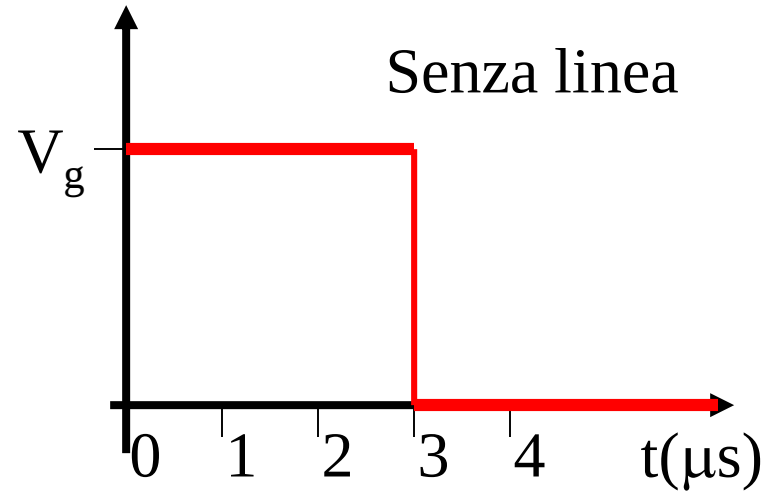
- ☐ $\tau=5\text{ns/m}$

- Quindi un cavo di 100m introduce un ritardo di 500 ns.

Segnali Impulsivi

- Supponiamo di collegare la linea ad un generatore con R interna pari a R_g , e che genera un impulso ampio V_g per un tempo T .
- Il generatore “vede” un carico di impedenza R_o , almeno finché non arriva l’onda regressiva dall’altra estremità’.
- Quindi nel punto $x=0$ a $t=0$ e per un tempo $2t_\ell=2\ell/v$ si ha

$$\begin{cases} V(x=0, t) = V_{in} = V_g \frac{R_o}{R_o + R_g} \\ I(x=0, t) = I_{in} = V_g \frac{1}{R_o + R_g} \end{cases}$$



Linea Adattata

- Al tempo $t = t_\ell = \ell/v$ il segnale arriva all' estremità opposta della linea, attenuato di $\exp(-\alpha \ell)$:

$$\begin{cases} V(x = \ell, t) = V_{out} = V_{in} e^{-\alpha \ell} \\ I(x = \ell, t) = \frac{V_{out}}{R_o} \end{cases}$$

- La seconda eq. deriva dal fatto che c'è solo l' onda progressiva.
- Quello che avviene successivamente dipende da come è **terminata** la linea. Supponiamo che sia chiusa su una resistenza R_c . Nell' attimo in cui il segnale arriva all' estremità trova la resistenza R_c che chiude la linea.
- Se $R_c = R_o$ non c'è cambiamento, perchè $V(x,t)/I(x,t) = R_o$ come era nella linea. La resistenza R_o assorbe completamente ed esattamente le tensioni e correnti arrivate in quel punto, e quindi non parte l' onda regressiva – non c'è riflessione. Si dice che la linea è **adattata**.

Linea Aperta

- Se la linea è **aperta** ($R_c = \text{infinito}$) in $x = \ell$ ci deve essere sempre $I(x = \ell) = 0$. Possiamo garantire che questo avvenga sovrapponendo all'onda progressiva che è arrivata fin lì una onda regressiva (riflessa) tale che le correnti generate dalle due onde si annullino perfettamente. Avremo quindi

$$0 = I(x = \ell, t) = I_{out} + I_{rifl} \quad \Rightarrow \quad I_{rifl} = -I_{out}$$

e anche $V_{rifl} = V_{out}$

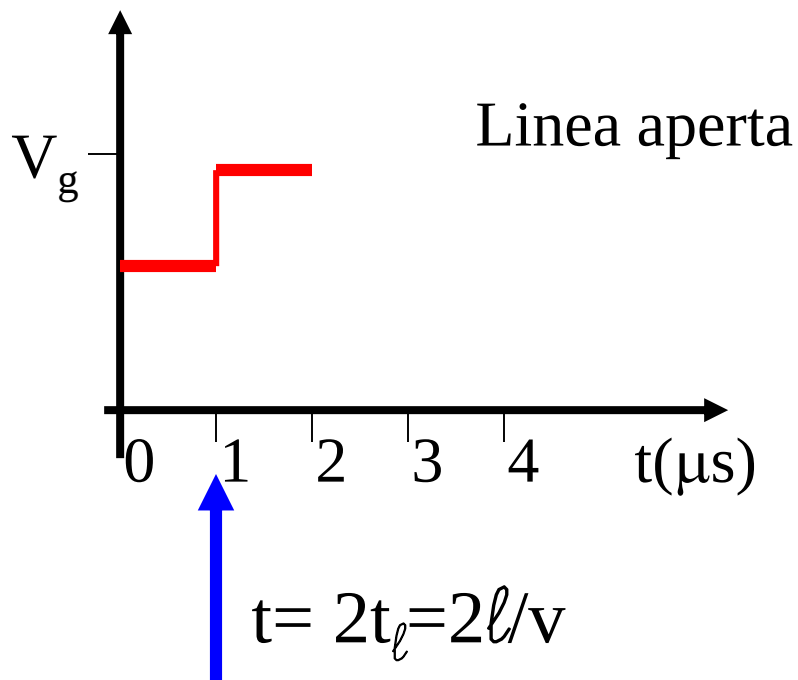
definendo il coefficiente di riflessione $\Gamma = \frac{V_{rifl}}{V_{out}}$

si ha in questo caso $\Gamma = 1$. Quindi sommando le due onde :

$$V(x = \ell, t = t_\ell) = V_{rifl} + V_{out} = 2V_{in} e^{-\alpha \ell}$$

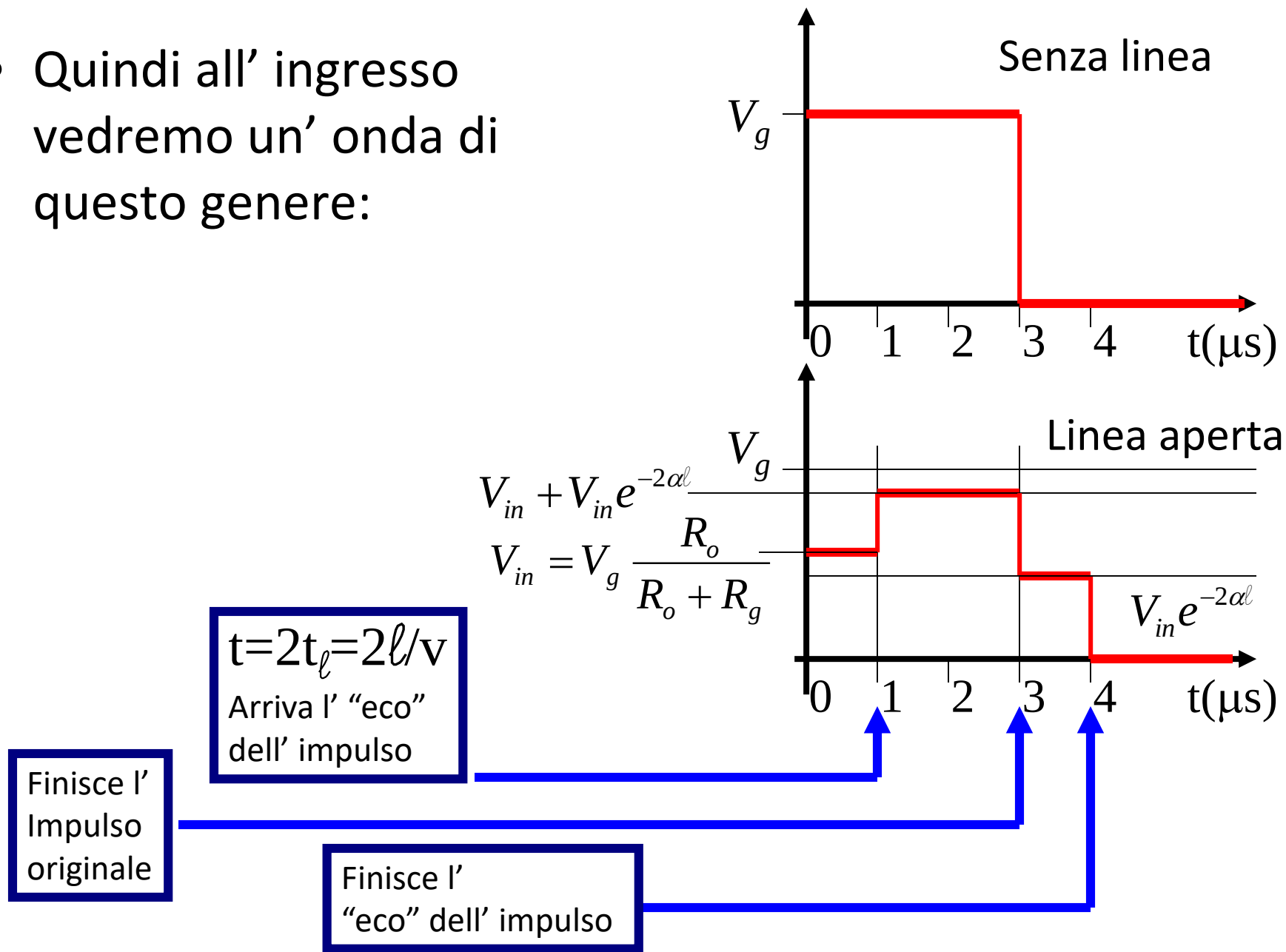
Linea Aperta

- Quest' onda riflessa comincia a viaggiare indietro lungo la linea, e al tempo $t = 2t_\ell = 2\ell/v$ arriva all' ingresso della linea, attenuata di un ulteriore fattore $\exp(-\alpha\ell)$.
- A $t = 2t_\ell$ la tensione in ingresso sale quindi a $V_{in} + V_{in}e^{-2\alpha\ell}$



Linea Aperta

- Quindi all'ingresso vedremo un'onda di questo genere:

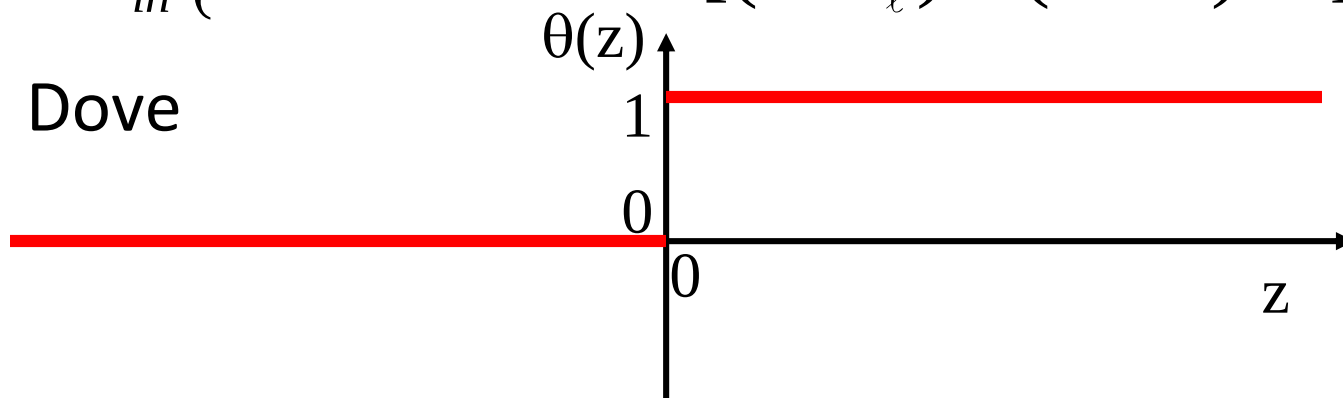


Linea Aperta

- Consideriamo adesso un punto diverso, a distanza x da quello iniziale: in ogni punto della linea avremo la sovrapposizione di onda progressiva e onda regressiva: per $t_\ell < t < 2t_\ell$

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_{in} e^{-\alpha \ell} + V_{out} e^{-\alpha(\ell-x)} \theta[(t - t_\ell) - (\ell - x)/v] = \\ &= V_{in} e^{-\alpha \ell} + V_{in} e^{-\alpha \ell} e^{-\alpha(\ell-x)} \theta[(t - t_\ell) - (\ell - x)/v] = \\ &= V_{in} \left\{ e^{-\alpha \ell} + e^{-\alpha(2\ell-x)} \theta[(t - t_\ell) - (\ell - x)/v] \right\} \end{aligned}$$

- Dove



Linea in corto

- Se la linea è **in corto** ($R_c=0$) in $x=\ell$ ci deve essere sempre $V(x=\ell)=0$. Possiamo garantire che questo avvenga sovrapponendo all' onda progressiva che è arrivata fin lì una onda regressiva (riflessa) tale che le tensioni generate dalle due onde si annullino perfettamente. Avremo quindi

$$0 = V(x=\ell, t) = V_{out} + V_{rifl} \Rightarrow V_{rifl} = -V_{out}$$

$$\text{e quindi } \Gamma = \frac{V_{rifl}}{V_{out}} = -1$$

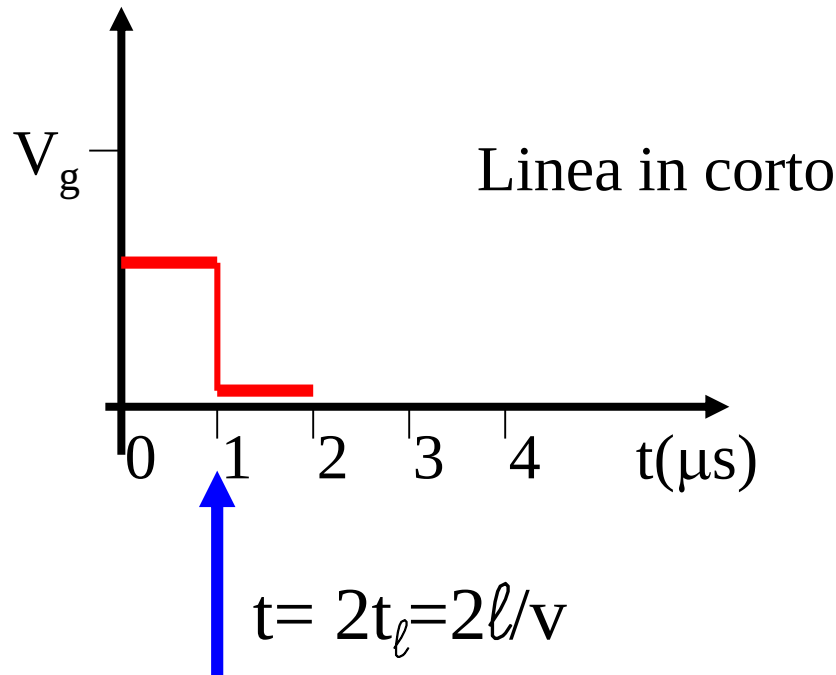
Quindi sommando le due onde :

$$V(x=\ell, t=t_1) = V_{rifl} + V_{out} = 0$$

$$I(x=\ell, t=t_1) = \frac{1}{R_o} (V_{out} - V_{rifl}) = 2 \frac{V_{out}}{R_o}$$

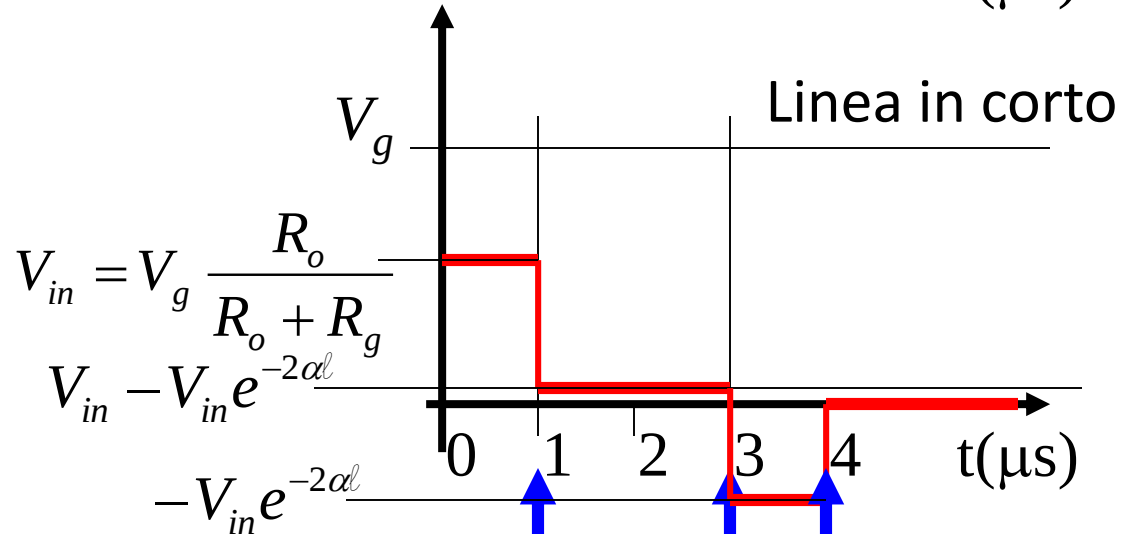
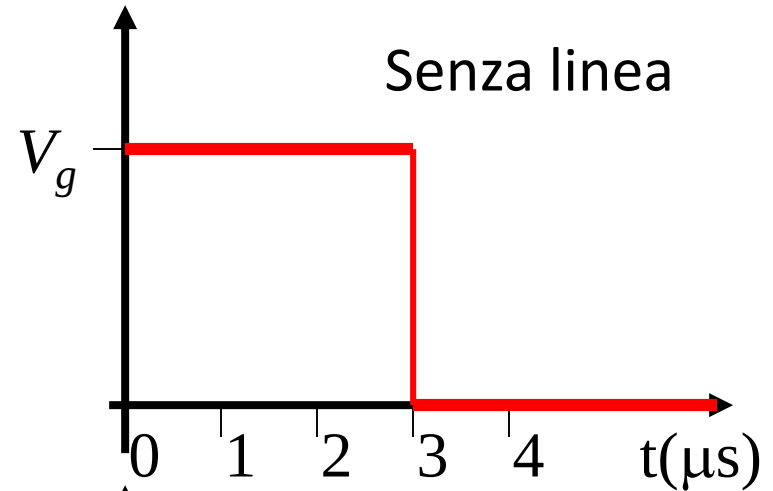
Linea in corto

- Quest' onda riflessa comincia a viaggiare indietro lungo la linea, e al tempo $t = 2t_\ell = 2\ell/v$ arriva all' ingresso della linea: Se non fosse attenuata annullerebbe perfettamente la tensione del generatore. Ma è attenuata un fattore $\exp(-2\alpha\ell)$: $V_{in} - V_{in}e^{-2\alpha\ell}$



Linea in corto

- Quindi all'ingresso vedremo un'onda di questo genere:



$$t = 2t_\ell = 2\ell/v$$

Arriva l' "eco" dell' impulso

Finisce l' Impulso originale

Finisce l' "eco" dell' impulso

In generale

- Per R_c qualsiasi ricaviamo il coefficiente di riflessione imponendo la legge di Ohm per R_c :

$$\frac{V(x = \ell, t = t_\ell)}{I(x = \ell, t = t_\ell)} = R_c$$

$$\frac{\frac{V_{in}e^{-\alpha\ell} + \Gamma V_{in}e^{-\alpha\ell}}{R_o} - \frac{\Gamma V_{in}e^{-\alpha\ell}}{R_o}}{R_o} = R_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{R_c}{R_o}}$$

- Si verifica facilmente che Γ vale 0 per $R_c = R_o$, vale 1 per R_c infinita e vale -1 per $R_c = 0$.
- In ingresso

$$\boxed{V(x = 0, t = 2t_\ell) = V_{in} (1 + \Gamma e^{-2\alpha\ell})}$$

- Tutto questo verrà verificato sperimentalmente nell'ultima esperienza del corso (30/5/2018).

$$\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{R_c}{R_o}$$

$$V(x=0, t=2t_\ell) = V_{in} \left(1 + \Gamma e^{-2\alpha\ell} \right)$$