

Principi di Kirchhoff

- 1) La somma algebrica delle correnti confluenti in un nodo di un circuito elettrico e' sempre nulla:

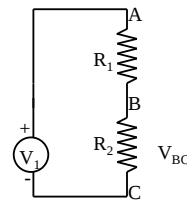
$$\sum_k I_k = 0$$

- 2) Lungo una qualsiasi maglia di un circuito elettrico e' nulla la somma di tutte le differenze di potenziale ai capi degli elementi che la costituiscono.

$$\sum_i V_i = \sum_j R_j I_j$$

- Si intendono positive le correnti entranti e negative quelle uscenti; positive tutte le ddp che tendono a far circolare la corrente in tale verso, e negative le altre; stesso criterio per i prodotti RI

Applicazione 1: Il partitore



- Determinare la ddp ai capi della R_2

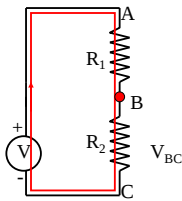
- Si risolve direttamente:

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

$$V_B - V_C = R_2 I = \frac{VR_2}{R_1 + R_2}$$

- E' un circuito utilissimo, perche' permette, partendo da una tensione V, di ottenerne un'altra di un valore qualsiasi compreso tra 0 e V: basta scegliere una R_2 opportuna !

Applicazione 1: Il partitore



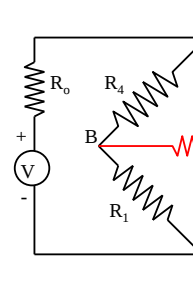
- Ma si puo' risolvere anche con Kirchhoff:

per il nodo B: $I_1 - I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 = I$

per la maglia: $V = R_1 I_1 + R_2 I_2 = (R_1 + R_2) I$

e quindi: $V_{BC} = IR_2 = V \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Applicazione 2: ponte di Wheatstone



- Trovare che condizione devono soddisfare le resistenze R_1, R_2, R_3, R_4 perche' in R non scorra corrente (ponte in equilibrio)

- Si risolve direttamente:

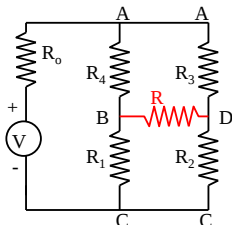
$$I = \frac{V_B - V_D}{R}$$

$$V_B = V_D \Rightarrow V_B - V_C = V_D - V_C \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \text{ ma, essendo } I = 0$$

$$I_1 = \frac{V_C - V_A}{R_1 + R_4} \text{ e } I_2 = \frac{V_C - V_A}{R_2 + R_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 R_3 = R_2 R_4}$$

Applicazione 2: ponte di Wheatstone



- Una soluzione piu' furba consiste nel ridisegnare il ponte cosi': come due partitori in parallelo.

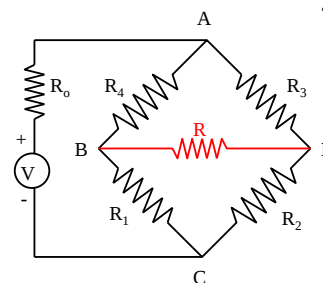
- Allora perche' in B ci sia la stessa tensione che in D basta che i due partitori abbiano la stessa partizione, cioe' che

$$\frac{R_1}{R_1 + R_4} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

ovvero

$$\boxed{R_1 R_3 = R_2 R_4}$$

Applicazione 2: ponte di Wheatstone

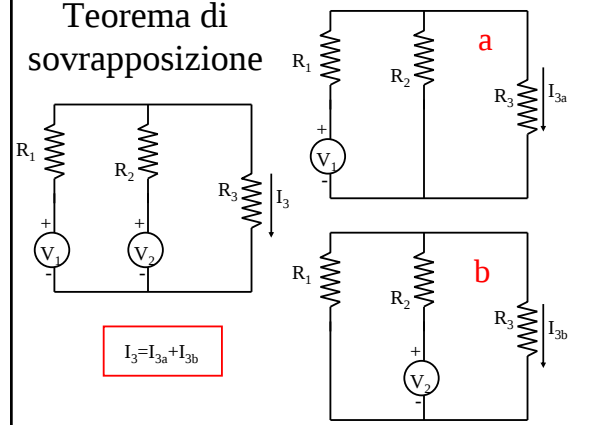


- Ovviamente si puo' risolvere anche tramite le leggi di Kirchhoff, ma lo faremo piu' avanti.

Teorema di sovrapposizione

- Se in un circuito lineare agiscono simultaneamente diversi generatori, la corrente totale prodotta in un ramo generico e' la somma delle correnti che sarebbero prodotte dai singoli generatori se ciascuno di essi agisse isolatamente.
- Questo teorema deriva dalla linearita' delle leggi che esprimono i principi di Kirchhoff.

Teorema di sovrapposizione



Teorema di sovrapposizione

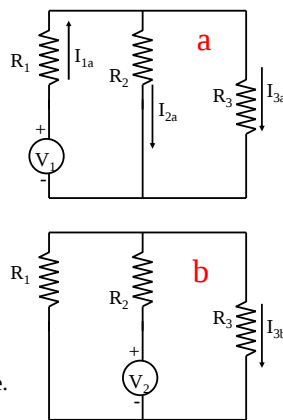
- Risolvere i circuiti a) e b) e' molto piu' semplice che risolvere il circuito originale:

per a) : $I_{1a} = \frac{V_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$

inoltre : $R_2 I_{2a} = R_3 I_{3a}$

ed infine : $I_{1a} - I_{2a} - I_{3a} = 0$

3 equazioni nelle 3 incognite.



Teorema di sovrapposizione

- Il circuito b) e' identico ad a), con lo scambio delle resistenze R_1 ed R_2
- Si puo' quindi scrivere subito:

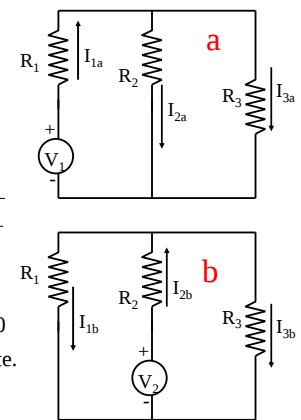
per b) : $I_{2b} = \frac{V_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}$

inoltre : $R_1 I_{1b} = R_3 I_{3b}$

ed infine : $I_{2b} - I_{1b} - I_{3b} = 0$

3 equazioni nelle 3 incognite.

- Infine $I_i = I_{ia} + I_{ib}$

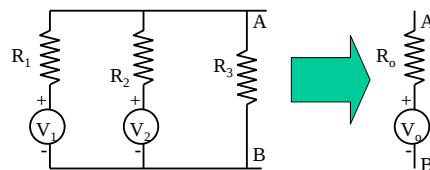


Teorema di Thevenin

- Serve a sostituire ad un circuito elettrico complicato un circuito equivalente che, per i nostri scopi, ha le stesse caratteristiche dell' originale.
- Il circuito sostitutivo e' costituito da un generatore di tensione con in serie una resistenza.

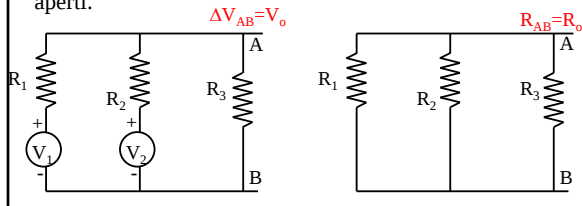
Teorema di Thevenin

- Qualsiasi circuito elettrico lineare attivo puo' essere schematizzato con un circuito costituito da un generatore ideale di tensione V_o e da una resistenza R_o in serie ad esso.
- Fissati due punti A e B del circuito, V_o e' la ddp esistente tra A e B, ed R_o e' la resistenza che si misura tra A e B quando tutti i generatori ideali di tensione sono cortocircuitati e tutti i generatori ideali di corrente sono aperti.



Teorema di Thevenin

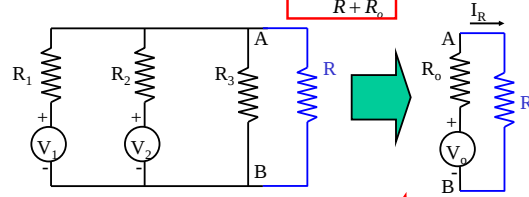
- Qualsiasi circuito elettrico lineare attivo può essere schematizzato con un circuito costituito da un generatore ideale di tensione V_o e da una resistenza R_o in serie ad esso.
- Fissati due punti A e B del circuito, V_o è la ddp esistente tra A e B, ed R_o è la resistenza che si misura tra A e B quando tutti i generatori ideali di tensione sono cortocircuitati e tutti i generatori ideali di corrente sono aperti.



Teorema di Thevenin

- Ne segue che se tra A e B si connette una nuova resistenza R , in essa scorre una corrente

$$I = \frac{V_o}{R + R_o}$$



- Questo permette di misurare V_o e R_o :
 - con $R = \infty$ (circuito aperto) $V_{AB} = V_o$;
 - con $R = 0$ (cortocircuito) $I_R = V_o / R_o$

$$I = \frac{V_o}{R + R_o}$$

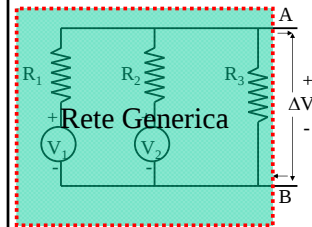
Teorema di Thevenin

- Consideriamo la ΔV come un generatore di forza elettromotrice. La corrente I che fluisce da A e in B può sempre essere calcolata col metodo delle maglie: otterremo un'equazione del tipo:

$$I = \sum G_i V_i - G \Delta V$$

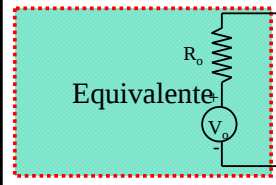
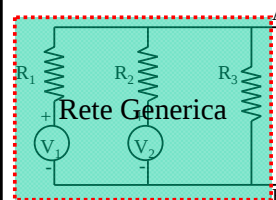
- Dove i G sono coefficienti con dimensioni di R^{-1} . Quindi

$$\Delta V = \sum \frac{G_i}{G} V_i - \frac{I}{G}$$



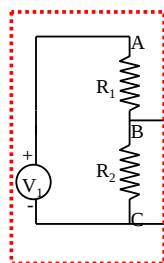
Teorema di Thevenin

- possiamo definire
- $$V_o = \sum \frac{G_i}{G} V_i \quad \text{e} \quad R_o = \frac{1}{G}$$
- ottenendo
- $$\Delta V = V_o - R_o I$$
- che è proprio l'espressione della ΔV dovuta ad un generatore V_o in serie ad una resistenza R_o



Applicazione del Teorema di Thevenin (1)

- Riprendiamo il partitore di tensione e supponiamo di applicargli un carico R .



- Si vogliono trovare la corrente che scorre in R e la tensione ai suoi capi.
- Si trovano immediatamente con il teorema di Thevenin:

$$I_R = \frac{V_o}{R + R_o}$$

- Dove: V_o è la tensione che si misura tra B e C in assenza di R , ed è quindi

$$V_o = \frac{V_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

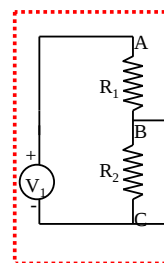
- e R_o è il parallelo tra R_1 ed R_2 :

$$R_o = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Applicazione del Teorema di Thevenin (1)

- Si ottiene quindi subito

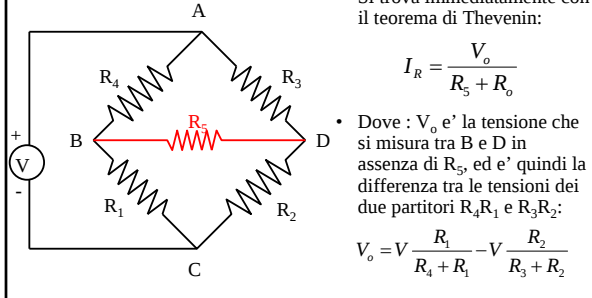
$$I_R = \frac{\frac{V_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{V_1 R_2}{R R_1 + R R_2 + R_1 R_2}$$



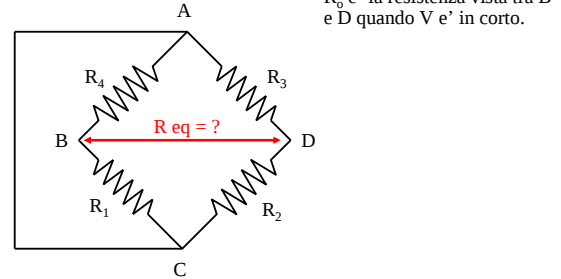
- Trovare la stessa formula con le leggi di Kirchhoff è molto più complicato.

Applicazione del Teorema di Thevenin (2)

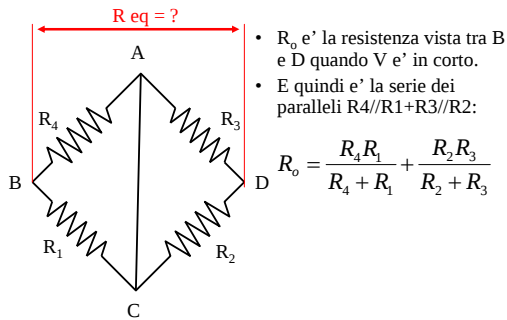
- Riprendiamo il Ponte di Wheatstone, e supponiamo di voler determinare la corrente che scorre nella R_5 (ponte sbilanciato).



Applicazione del Teorema di Thevenin (2)

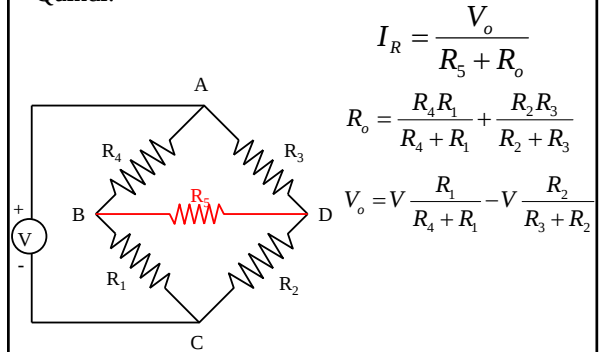


Applicazione del Teorema di Thevenin (2)



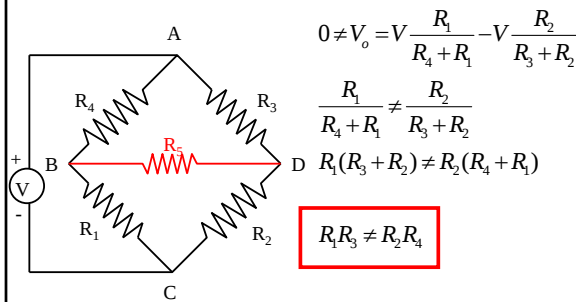
Applicazione del Teorema di Thevenin (2)

- Quindi:



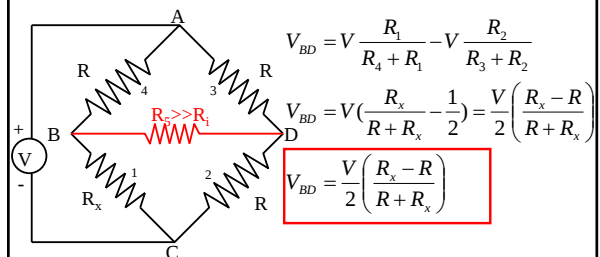
Applicazione del Teorema di Thevenin (2)

- Se R_5 e' molto alta, $V_{BD} = V_o$, che e' diversa da zero solo se



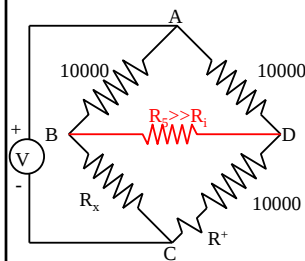
Importanza del ponte di Wheatstone:

- E' l' implementazione di un metodo DIFFERENZIALE e quindi permette misure estremamente sensibili.



Importanza del ponte di Wheatstone:

- Ad es. supponiamo di voler sapere se una resistenza e' di 10000Ω oppure di 10001Ω .
- Misurando solo la resistenza, dovremmo avere uno strumento capace di apprezzare bene una parte su 10000.

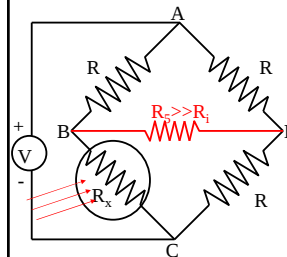


- Invece, possiamo inserire la resistenza da misurare come R_x in un ponte fatto con altre tre resistenze come in figura, e variare R^+ fino ad ottenere il bilanciamento del ponte.

$$V_{BD} \cong \frac{V}{4R} [R_x - R]$$

Importanza del ponte di Wheatstone:

- Spesso R_x e' un trasduttore
- In assenza di segnale in ingresso il ponte e' bilanciato, (cioe' $R_x = R$) e quindi $V_{BD} = 0$
- Appena arriva un segnale, R_x cambia, e si misura subito un V_{BD} , tanto maggiore quanto piu' grande e' il segnale.

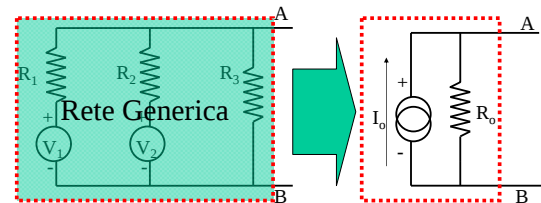


$$V_{BD} = \frac{V}{4R} (R_x - R)$$

Teorema di Norton

- Qualsiasi circuito elettrico lineare attivo connesso a due punti A e B puo' essere schematizzato con un circuito costituito da un generatore di corrente I_o ed una resistenza R_o in parallelo ad esso.
- I_o e' la corrente di corto circuito tra A e B, ed R_o e' quella che si misura quando tutti i generatori di corrente sono aperti e quelli di tensione sono cortocircuitati.

Teorema di Norton



Teorema di Norton

- E' coerente con il teorema di Thevenin:

$$I_{R_o} R_o = I_R R \Rightarrow I_{R_o} = I_R R / R_o$$

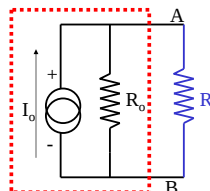
$$\text{ma } I_o = I_{R_o} + I_R$$

$$\text{e quindi } I_o = I_R (1 + R / R_o)$$

per cui la V_o di Thevenin e'

$$V_o = I_o R_o = I_R (R_o + R)$$

$$I_R = \frac{V_o}{R_o + R}$$



Trasferimento di potenza da un generatore a un carico

- E' il caso piu' banale di uso di un circuito elettrico per trasferire energia.
- Se il generatore e' una batteria, l' energia chimica viene trasformata in energia elettrica al suo interno.
- La corrente elettrica trasporta quest' energia nel carico (una resistenza, un riscaldatore) dove viene trasformata in energia termica per effetto Joule.
- Si cerca il massimo trasferimento di potenza.

Trasferimento di potenza da un generatore a un carico

La potenza dissipata nel carico e'

$$W = V_R I_R$$

Il circuito e' un normale partitore, quindi

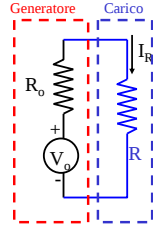
$$V_R = V_o \frac{R}{R + R_o} \quad ; \quad I_R = \frac{V_o}{R + R_o}$$

$$\Rightarrow W = \frac{V_o^2 R}{(R + R_o)^2}$$

se si deriva rispetto a R si scopre che e' max. per

$$R = R_o \quad \text{e vale} \quad W_{\max} = \frac{V_o^2}{4R_o}$$

In queste condizioni si dice che il carico e' "adattato"



AVVISI

Copie dei lucidi:

http://oberon.roma1.infn.it/laboratorioeletromagnetismo/lezione**/slider.html

**=numero della lezione: 01, 02, ...etc.

Elementi reali di un circuito elettrico (passivi)

- *Resistori*
 - A filo metallico
 - A impasto
 - A film metallico
- *Condensatori*
 - A mica
 - A poliestere
 - A ceramica
 - Elettrolitici
- *Resistori variabili*
(trimmer e potenziometri)
- *Condensatori variabili*
- *Induttori* (con o senza nucleo in ferrite)

Resistori

- Sono disponibili in
 - valori da 0.01Ω a $10^{12}\Omega$
 - potenze dissipabili da 1/8W a 250W
 - Precisione da 0.005% a 20%
- I piu' economici sono fatti da un **impasto di carbone**: viene garantita una tolleranza del 5% intorno al valore nominale, ma: (res. Allen Bradley serie AB tipo CB):
 - Saldando puo' cambiare il valore del 2% (permanente)
 - Vibrazioni (20g) e shock (100g) -> 2% (permanente)
 - Umidita' (95% a 40°) cambia il valore dal 6% al 10% (non permanente)
 - 10V di ddp applicata cambiano il valore da -0.15% a -0.3%
 - Variando T da 25°C a -15°C R varia del 2.5%-4.5%
 - Variando T da 25°C a +85°C R varia del 3.3%-5.9%

Resistori

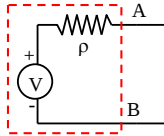
- Altri difetti dei resistori a impasto sono l' induttanza (che puo' essere importante ad alte frequenze) e il loro rumore a basse frequenze.
- Se serve maggiore precisione si usano resistori ottenuti evaporando un sottile film metallico su un supporto isolante. (resistori a strato metallico): garantiscono tolleranze dell' 1% e stabilita' migliori dello 0.1%.

Condensatori

Tecnologia:	Capacita'	Accuratezza	Perdite	$\Delta C/\Delta T$	
Mica	1pF - 0.01μF	Buona	Buona	Buona	
Ceramici	10pF - 1μF	Scarsa	Moderata	Moderata	
Mylar	1nF - 50μF	Buona	Buona	Buona	
Polycarbonato	100pF - 30μF	Eccellente	Eccellente	Eccellente	
Teflon	1nF - 2μF	Eccellente	Migliore	Migliore	
Vetro	10pF - 1nF	Buona	Eccellente	Eccellente	
Tantalio	0.1μF - 500μF	Scarsa	-	-	*
Elettrolitici	0.1μF - 1F	Terribile	Terribile	Terribile	*

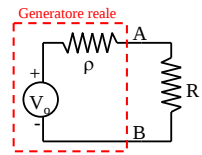
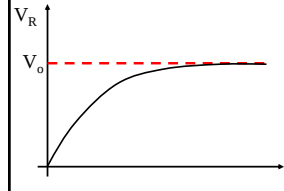
Generatori reali

- Un generatore reale di tensione puo' essere schematizzato come la serie di un generatore ideale di tensione e un resistore di resistenza ρ detta resistenza interna.



Generatori reali

- Se si applica un carico R , la ddp ai morsetti del generatore non e' piu' indipendente dalla corrente I_R estratta dal generatore.



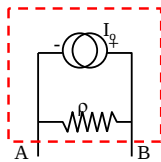
$$I_R = \frac{V_o}{R + \rho}$$

$$V_R = RI_R = R \frac{V_o}{R + \rho} = \frac{V_o}{1 + \frac{\rho}{R}}$$

- Una batteria da 9V ha una resistenza interna dell' ordine di 1 Ω . Per carichi $\gg \rho$, si ha $V_R \approx V_o(1 - \rho/R)$

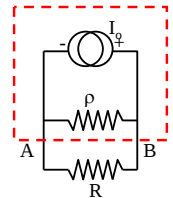
Generatori reali

- Un generatore reale di corrente puo' essere schematizzato come il parallelo di un generatore ideale di corrente e di una resistenza ρ che e' detta resistenza interna del generatore.



Generatori reali

- Quindi un generatore reale di corrente si comporta quasi idealmente se la resistenza di carico e' molto minore della sua resistenza interna.



$$I_o = I_\rho + I_R$$

$$I_o \rho = I_R R$$

$$\Rightarrow I_R = I_o \frac{\rho}{\rho + R} = I_o \frac{1}{1 + R/\rho}$$

Misure in corrente continua

- Esistono due tipi di strumenti di misura: analogici e digitali.
- Gli strumenti analogici hanno un indicatore che si muove su una scala: la posizione dell' indicatore (la "lancetta") rispetto alla scala permette di stimare il valore dell' osservabile.
- Gli strumenti digitali visualizzano il risultato della misura gia' in forma numerica.



Strumenti analogici

- Moto dell' "equipaggio mobile"
- Puo' considerarsi un corpo rigido girevole intorno ad un asse fisso verticale. Per cui

$$\mathfrak{I} \ddot{\theta} = M$$

dove $\mathfrak{I}$ e' il momento d'inerzia,

$\ddot{\theta}$ e' l'accelerazione angolare

M e' il momento risultante delle forze esterne

- M ha tre componenti:

- Coppia deviatrice dovuta all' osservabile: $f(I)$
- Coppia elastica della molla di richiamo (serve a definire una posizione di zero): $-C\theta$
- Coppia delle forze di smorzamento $-\beta \dot{\theta}$

- quindi $\mathfrak{I} \ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + C\theta = f(I)$

Moto dell' equipaggio mobile

$$\mathfrak{I}\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + C\theta = f(I)$$

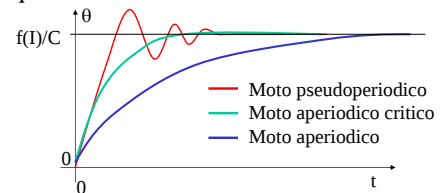
- In condizioni di equilibrio

$$C\theta = f(I) \Rightarrow \theta = f(I)/C$$
- Cioe' l' angolo di rotazione dell' equipaggio mobile e' proporzionale alla coppia prodotta dall' osservabile.
- Normalmente l' indice e' montato sull' equipaggio mobile, e si muove su una scala, lineare se $f(I)$ e' lineare in I , quadratica o logaritmica se $f(I)$ e' quadratica o logaritmica. Sulla scala sono riportati i valori di I corrispondenti agli angoli secondo la calibrazione dello strumento.

Moto dell' equipaggio mobile

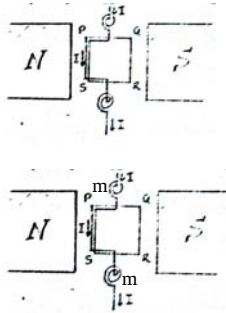
$$\mathfrak{I}\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + C\theta = f(I)$$

- Il raggiungimento della posizione di equilibrio (cioe' la dinamica che dalla posizione di riposo ($I=0$) porta alla posizione di regime con $I>0$) dipende dalle costanti dell' equazione differenziale.



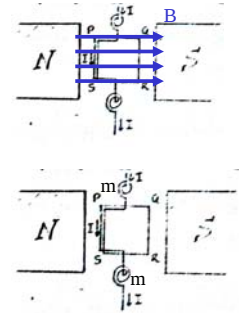
Amperometro a bobina mobile

- E' una bobina piatta rettangolare che puo' ruotare intorno ad un asse verticale, immersa in un campo magnetico uniforme e costante.
- In assenza di corrente la posizione di riposo e' determinata dalla posizione di riposo delle due molle m



Amperometro a bobina mobile

- E' una bobina piatta rettangolare che puo' ruotare intorno ad un asse verticale, immersa in un campo magnetico uniforme e costante.
- In assenza di corrente la posizione di riposo e' determinata dalla posizione di riposo delle due molle m



Amperometro a bobina mobile

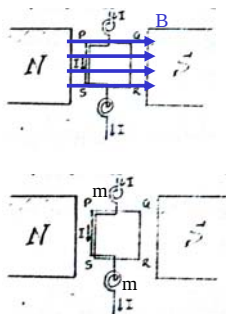
- Supponendo uniforme il campo B nel traferro del magnete, le forze agenti sui quattro lati della bobina sono:

$$F_{PS} = I \vec{r}_{PS} \times \vec{B} = -I \vec{r}_{RQ} \times \vec{B} = -F_{RQ}$$

$$F_{SR} = I \vec{r}_{SR} \times \vec{B} = -I \vec{r}_{QP} \times \vec{B} = -F_{QP}$$

- Le forze che agiscono su lati opposti sono quindi uguali ed opposte. Sui lati orizzontali si compensano, perche' la bobina e' rigida, mentre sui lati verticali formano una coppia, proporzionale ad I , che tende a far ruotare la bobina, con momento

$$f(I) = 2 \frac{d}{2} F \cos \theta = daBI \cos \theta$$



Amperometro a bobina mobile

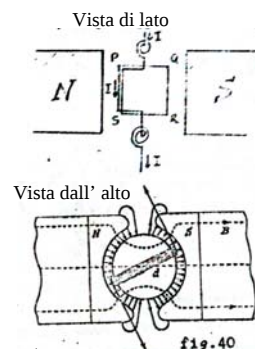
$$\theta_o = \frac{daB \cos \theta}{C} I$$

- Per evitare la dipendenza da $\cos \theta$ (non lineare) si puo' fare in modo che il campo magnetico sia sempre ortogonale alla spira, anche mentre questa ruota, inserendo un nucleo ferromagnetico che fa convergere le linee di forza di B verso l' asse di rotazione.
- Se invece di una spira se ne avvolgono n , si moltiplica per n la coppia. Quindi:

$$\theta_o = \frac{ndaB}{C} I = \frac{\Phi^*}{C} I$$

- Si definisce la sensibilita' dell' amperometro

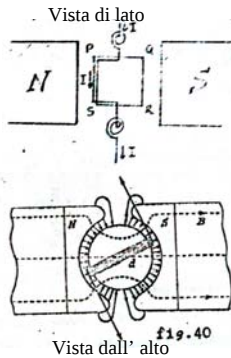
$$\sigma = \frac{\Phi^*}{C} = \frac{nadB}{C}$$



Amperometro a bobina mobile

$$\sigma = \frac{\Phi}{C} = \frac{nadB}{C}$$

- Per aumentare la sensibilit  si puo'
 - Aumentare il numero di spire (ma aumenta la resistenza interna)
 - Aumentare le dimensioni (ad) della spira (ma poi ha molta inerzia)
 - Aumentare B (ma il magnete diventa piu' grande)
 - Diminuire la costante di richiamo C, ad esempio appendendo la bobina ad un sottile filo di quarzo (galvanometro, raggiunge 10^{-12} A, ma lo strumento diventa molto fragile e poco trasportabile).
 - Usare uno specchietto e un laser invece dell' ago, per vedere deflessioni piccolissime



Variazioni della portata dell' amperometro

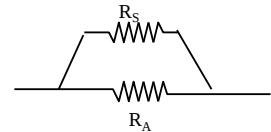
- E' possibile misurare correnti maggiori di quella di fondo scala inserendo un resistore in parallelo all' amperometro: resistenza di shunt.

$$I = I_S + I_A$$

$$I_A R_A = I_S R_S$$

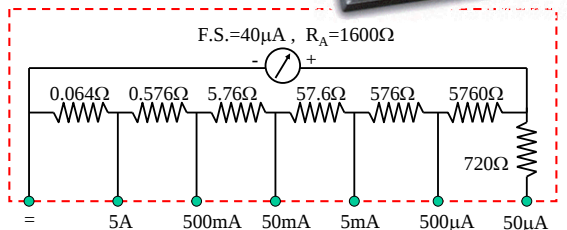
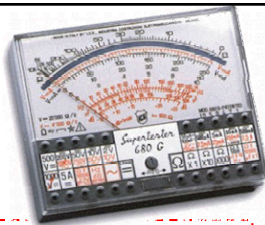
$$\Rightarrow I_A = \frac{R_S}{R_A + R_S} I$$

$$I_A = \frac{I}{n} \quad \text{se} \quad R_S = \frac{1}{n-1} R_A$$



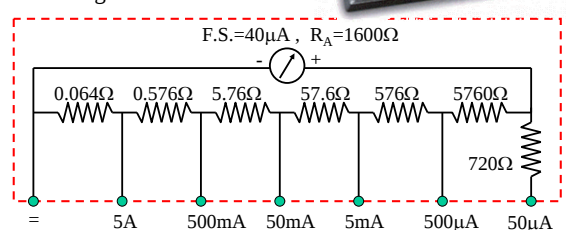
Esercizio

- Perche' gli shunt del multimetro sono questi ?



L' amperometro dello strumento universale

- Nello strumento universale l' amperometro e' gia' corredato da diversi shunt
- Si sceglie la corrente di fondo scala inserendo i puntali nelle boccole giuste.

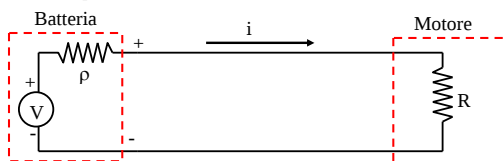


L' amperometro dello strumento universale

- Esempio: misurare una corrente i che scorre in un motorino elettrico:



- Schema equivalente:



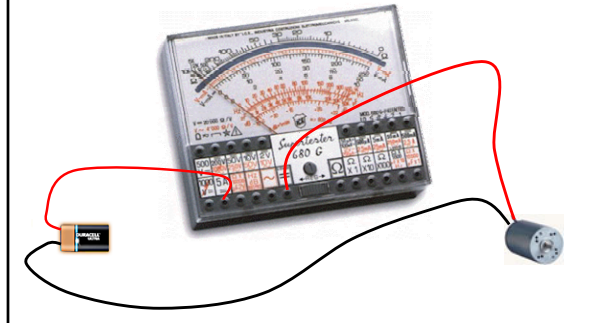
L' amperometro dello strumento universale

- Per misurare la corrente si deve interrompere il circuito ed inserirci lo strumento di misura in serie :



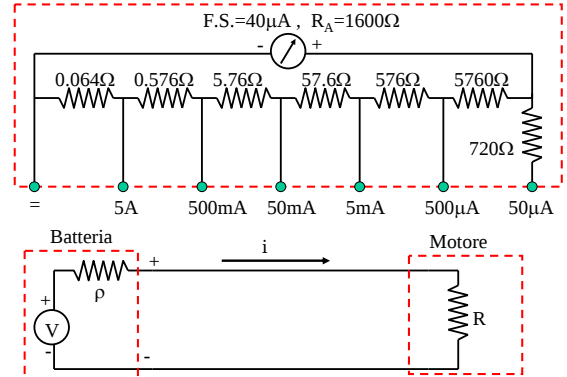
L' amperometro dello strumento universale

- Per misurare la corrente si deve interrompere il circuito ed inserirci lo strumento di misura in serie :



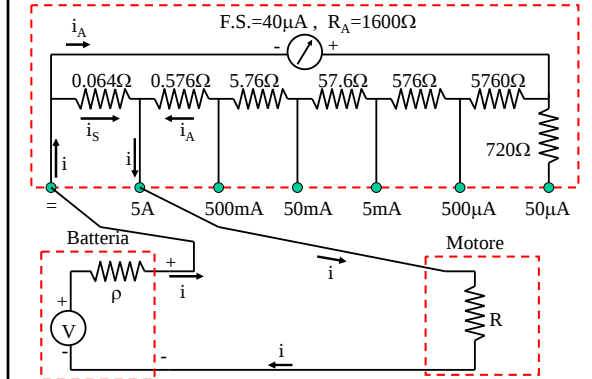
L' amperometro dello strumento universale

Strumento Universale



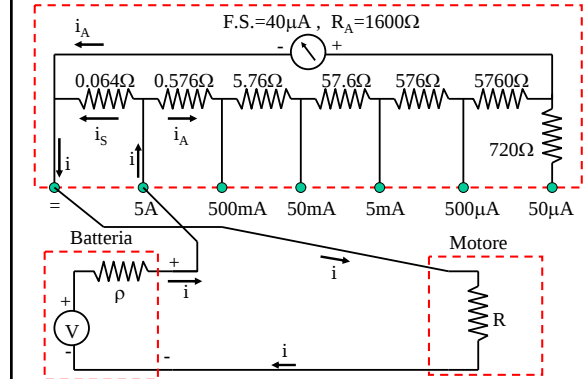
L' amperometro dello strumento universale

Strumento Universale



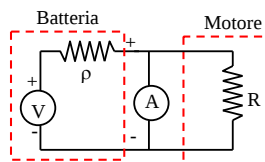
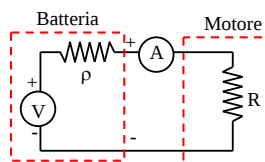
L' amperometro dello strumento universale

Strumento Universale



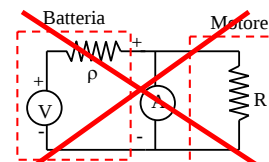
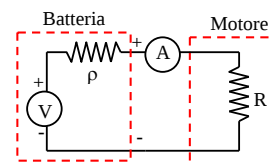
Concetto Importante

- L' amperometro si inserisce sempre IN SERIE al circuito di cui si vuole misurare la corrente.
- L' amperometro non si inserisce MAI IN PARALLELO al circuito di cui si deve misurare la corrente.



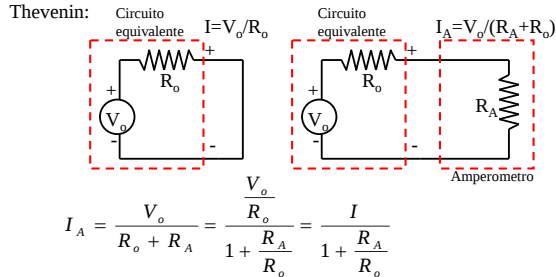
Concetto Importante

- L' amperometro si inserisce sempre IN SERIE al circuito di cui si vuole misurare la corrente.
- L' amperometro non si inserisce MAI IN PARALLELO al circuito di cui si deve misurare la corrente.



Perturbazione introdotta dall' amperometro.

- L' inserimento dell' amperometro aumenta la resistenza totale del circuito in cui e' inserito, quindi la corrente misurata e' leggermente inferiore a quella imperturbata. Possiamo calcolare quanto.
- Tra i due punti del circuito in cui operiamo l' interruzione, il circuito in misura puo' essere rappresentato dal suo equivalente secondo



Perturbazione introdotta dall' amperometro.

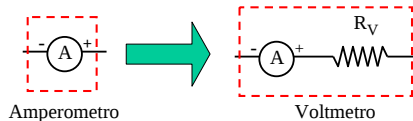
- L' entita' della correzione da apportare alla misura I_A per ottenere I dipende dal rapporto R_A/R_o . R_A e' scritto nelle specifiche dell' amperometro, R_o si puo' valutare o misurare.
- Vale la pena di apportare la correzione se l' errore

$$\frac{I - I_A}{I_A} = \frac{R_A}{R_o}$$

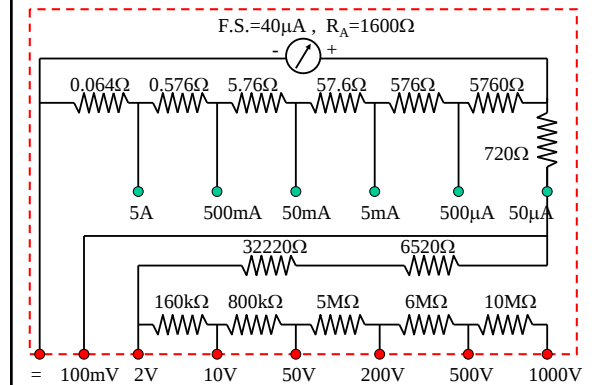
- E' maggiore dell' errore percentuale commesso nella lettura di I_A , sommato all' errore di calibrazione.
- Il valore di R_A dipende ovviamente dal particolare shunt utilizzato, e quindi dal fondo scala scelto.
- Questo fatto puo' essere utilizzato a nostro vantaggio per eliminare R_o dalla valutazione di I , eseguendo la misura con due fondo-scala diversi (con diverse R_A , ambedue note) ed ottenendo quindi un sistema con due equazioni e due incognite.

Il Voltmetro

- Il voltmetro e' uno strumento che misura la differenza di potenziale mediante la misura dell' intensita' di corrente che scorre in un resistore di resistenza nota.
- Il voltmetro e' quindi uno strumento a bobina mobile (come l' amperometro) con una ELEVATA resistenza interna R_V , in modo che perturbi poco la misura:



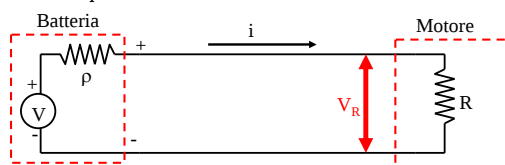
Il voltmetro dello strumento universale



Il voltmetro dello strumento universale

- Esempio: misurare la tensione ai capi della batteria che alimenta un motorino elettrico (durante il funzionamento):

- Schema equivalente:



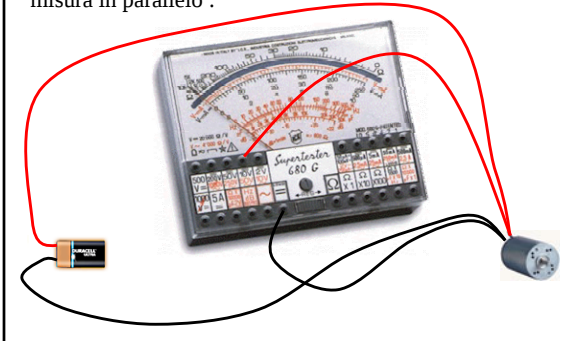
Il voltmetro dello strumento universale

- Per misurare la tensione si deve inserire lo strumento di misura in parallelo :



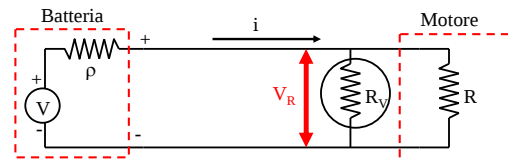
Il voltmetro dello strumento universale

- Per misurare la tensione si deve inserire lo strumento di misura in parallelo :



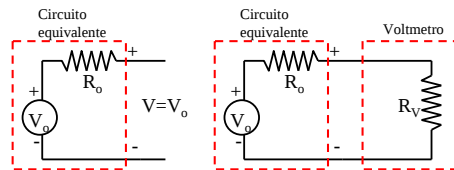
Perturbazione introdotta dal Voltmetro

- L' inserimento del Voltmetro riduce leggermente la tensione ai capi del motore, perche' una piccola parte della corrente originale passa nel voltmetro.



Perturbazione introdotta dal Voltmetro

- Come al solito: si schematizza il circuito in misura con il suo equivalente secondo Thevenin.



$$I_v = \frac{V_o}{R_o + R_v}$$

$$V_v = I_v R_v = V_o \frac{R_v}{R_o + R_v} = V_o \frac{1}{\frac{R_o}{R_v} + 1} \Rightarrow V_o = V_v \left(1 + \frac{R_o}{R_v} \right)$$

Perturbazione introdotta dal Voltmetro

$$V_o = V_v \left(1 + \frac{R_o}{R_v} \right)$$

- L' entita' della correzione dipende dal rapporto R_o/R_v . La correzione e' trascurabile se $(V_v - V_o)/V_v$ e' minore degli errori di lettura e di calibrazione.
- Il valore di R_v si valuta a partire dalla corrente di fondo scala dell' amperometro che c'e' all' interno del voltmetro.
- Per lo strumento universale a nostra disposizione, la corrente di fondo scala e' di 50μA. Per la legge di Ohm:

$$\frac{1}{I_{FS}} = \frac{R_v}{V_{FS}}$$

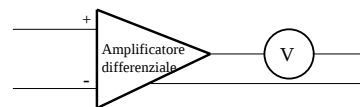
- Quindi abbiamo una resistenza interna del Voltmetro di 20000Ω/V_{FS}. Ad esempio
 - per il fondo scala di 50V, la resistenza R_v vale 20000Ω/V_{FS} x 50 V_{FS} = **1MΩ**.
 - per il fondo scala di 100mV, la resistenza R_v vale 20000Ω/V_{FS} x 0.1 V_{FS} = **2kΩ**.

Voltmetri e Amperometri Digitali Elettronici

- Si puo' migliorare lo strumento di misura di correnti e tensioni in due modi:
 - Diminuendo le perturbazioni che esso introduce nel circuito
 - Costruendo circuiti che convertono il risultato della misura in forma digitale, in modo da
 - Usare una visualizzazione numerica, eliminando l' errore di lettura sulla scala graduata
 - poterlo acquisire su un computer per una successiva elaborazione.

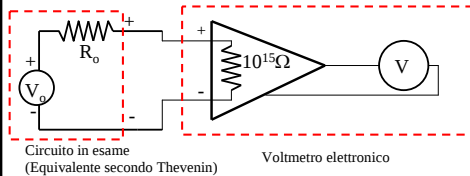
Voltmetri e Amperometri Digitali Elettronici

- Le perturbazioni introdotte dallo strumento analogico sono dovute alla resistenza relativamente bassa della bobina mobile (e' un avvolgimento di filo) ed alla corrente relativamente alta necessaria a produrre la coppia necessaria per muovere l' equipaggio mobile.
- Si possono utilizzare dei circuiti amplificatori, inserendoli tra il circuito sotto misura e l' amperometro, in modo da produrre una corrente nell' amperometro amplificata di un fattore $G > 1$ rispetto alla corrente estratta dal circuito in esame.
- All' interno di questi amplificatori si utilizzano Transistor a Effetto di Campo (FET, field effect transistor), che permettono di generare correnti rilevanti estraendo una corrente trascurabile ($fA = 10^{-15} A$) dal circuito in esame.



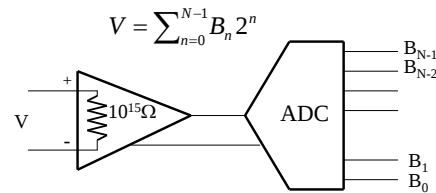
Voltmetri e Amperometri Digitali Elettronici

- Le perturbazioni introdotte dallo strumento analogico sono dovute alla resistenza relativamente bassa della bobina mobile (e' un avvolgimento di filo) ed alla corrente relativamente alta necessaria a produrre la coppia necessaria per muovere l' equipaggio mobile.
- Si possono utilizzare dei circuiti amplificatori, inserendoli tra il circuito sotto misura e l' amperometro, in modo da produrre una corrente nell' amperometro amplificata di un fattore $G > 1$ rispetto alla corrente estratta dal circuito in esame.
- All' interno di questi amplificatori si utilizzano Transistor a Effetto di Campo (FET, field effect transistor), che permettono di generare correnti rilevanti estraendo una corrente trascurabile ($i_A = 10^{-15} A$) dal circuito in esame.



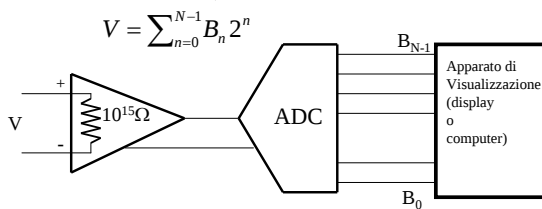
Voltmetri e Amperometri Digitali Elettronici

- La tensione in uscita dal voltmetro puo' essere convertita in un numero digitale utilizzando un apposito Convertitore Analogico Digitale (ADC = analog to digital converter).
- Si tratta di un circuito che converte una tensione in ingresso in un insieme di N livelli di tensione in uscita, ciascuno dei quali rappresenta un bit della rappresentazione binaria $\{B_n, n=0, N-1\}$ del valore della tensione ($B_n=0$ o 1 a seconda che il livello di tensione sull' n-ma linea sia 0 o 5V).



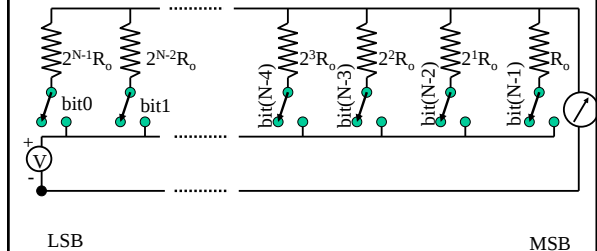
Voltmetri e Amperometri Digitali Elettronici

- La tensione in uscita dal voltmetro puo' essere convertita in un numero digitale utilizzando un apposito Convertitore Analogico Digitale (ADC = analog to digital converter).
- Si tratta di un circuito che converte una tensione in ingresso in un insieme di N livelli di tensione in uscita, ciascuno dei quali rappresenta un bit della rappresentazione binaria $\{B_n, n=0, N-1\}$ del valore della tensione ($B_n=0$ o 1 a seconda che il livello di tensione sull' n-ma linea sia 0 o 5V).



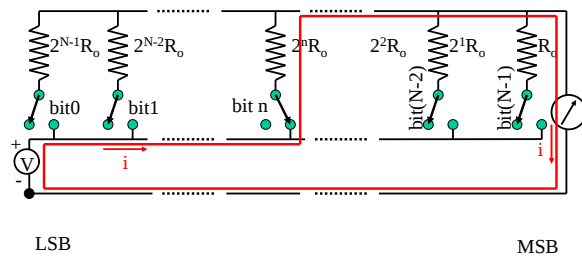
Convertitore Digitale Analogico - 1

- Consideriamo una rete fatta di N resistenze con valori che vanno da R_0 a $2^{N-1}R_0$.
- Usando i deviatori, ciascuna delle resistenze puo' essere connessa a V oppure no, a seconda che il relativo bit sia 1 o 0.

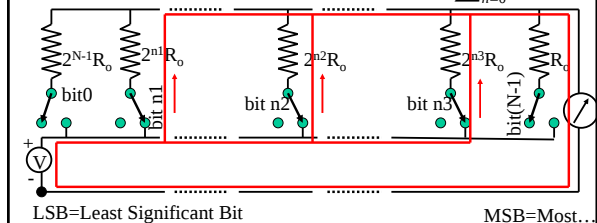


Convertitore Digitale Analogico - 1

- Quando si accende il bit n, nell' amperometro scorre una corrente $i = V / 2^{N-n-1} R_0$

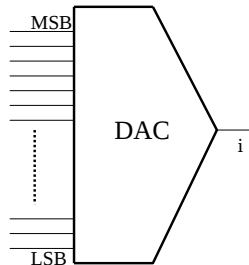


- Se si accendono i bit n1, n2, n3, nell' amperometro scorre una corrente $i = V(1/2^{N-n1-1} R_0 + 1/2^{N-n2-1} R_0 + 1/2^{N-n3-1} R_0)$
- Ma la corrente di ciascun bit e' un multiplo della corrente del bit piu' piccolo $i_0 = V / 2^{N-1} R_0$
- Quindi l' LSB produce una corrente i_0 , il successivo $2i_0$, il successivo $4i_0$ e cosi' via fino a $2^{N-1}i_0$ per il MSB.
- Si puo' approssimare una i qualsiasi con la combinazione binaria dei bit opportuni (quantizzando la i con passo i_0). $i = i_0 \sum_{n=0}^{N-1} B_n 2^n$

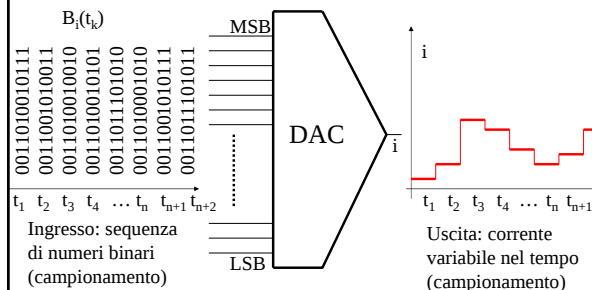


Convertitore Digitale- Analogico

- Un convertitore Digitale-Analogico (DAC, digital to analog converter) a N bit e' un circuito con N ingressi ed una uscita
- In ingresso ci sono le N tensioni che rappresentano il numero binario d'ingresso B_n : $V_i=0$ o V a seconda che $B_i=0$ o 1
- In uscita c'e' la corrente proporzionale al numero d'ingresso: $i = i_o \sum_{n=0}^{N-1} B_n 2^n$

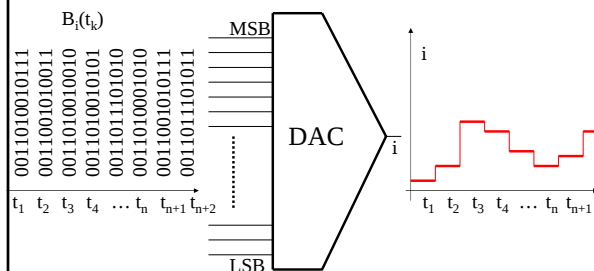


Convertitore Digitale- Analogico



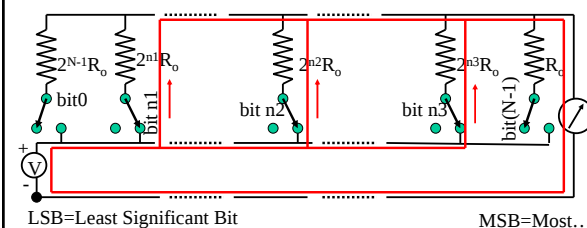
Convertitore Digitale- Analogico

- L' applicazione tipica e' il riproduttore di musica digitale (CD):



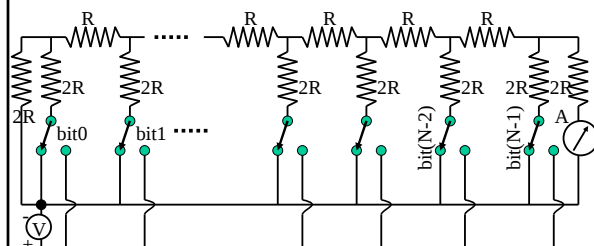
Convertitore Digitale Analogico - 1

- Il difetto di questo circuito e' che R_o deve essere molto maggiore della resistenza interna dell' amperometro (che gia' da sola puo' essere $1k\Omega$).
- Allora per 16 bit ($2^{16}=65536$ livelli di corrente) la resistenza piu' grande deve essere $>>2^{15}k\Omega$, e contemporaneamente precisa entro $1k\Omega$. Non si fa !

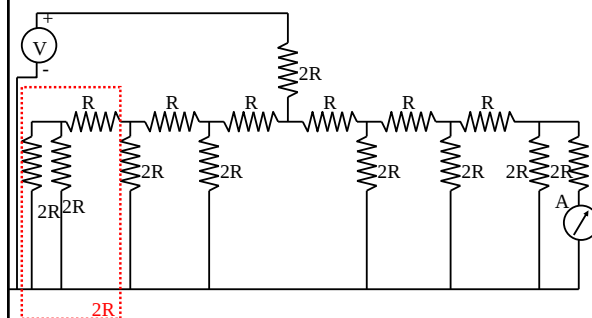


Convertitore Digitale Analogico - 2

- Consideriamo invece una rete fatta di resistenze R e $2R$ come sotto.
- Usando i deviatori, ciascuna delle resistenze $2R$ puo' essere connessa a 0 oppure a V a seconda che il relativo bit sia 0 o 1 .



- Quando si connette a $+V$ uno qualsiasi dei bit, la corrente attraverso di esso si divide in parti uguali nei due rami del circuito.
- Infatti:



- Quando si connette a +V uno qualsiasi dei bit, la corrente attraverso di esso si divide in parti uguali nei due rami del circuito.
- Infatti:

- Quando si connette a +V uno qualsiasi dei bit, la corrente attraverso di esso si divide in parti uguali nei due rami del circuito.
- Infatti:

- Quando si connette a +V uno qualsiasi dei bit, la corrente attraverso di esso si divide in parti uguali nei due rami del circuito.
- Infatti:

- Quando si connette a +V uno qualsiasi dei bit, la corrente attraverso di esso si divide in parti uguali nei due rami del circuito.
- Infatti:

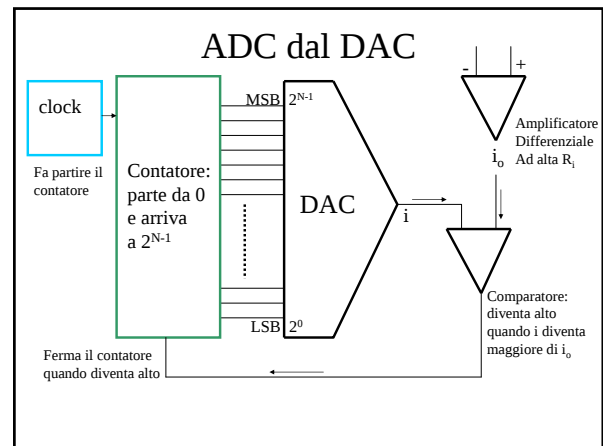
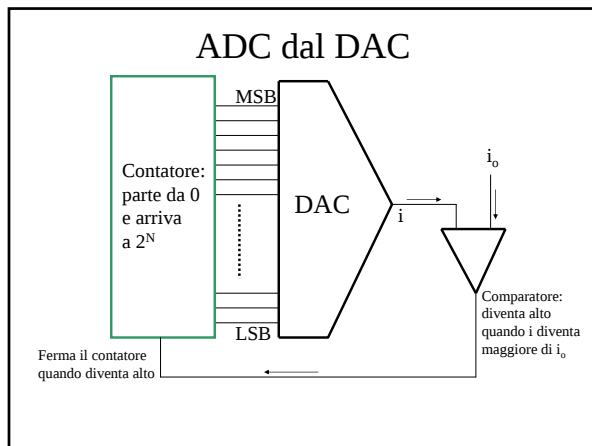
- Inoltre $i = V/3R$

- Inoltre la corrente in ciascuna resistenza R e' meta' di quella nella resistenza R precedente. Quindi se si accende il bit n, nell' amperometro scorre una corrente $i/2^{N-n}$. Quindi le correnti sono tutte multiple della corrente minima (bit0) che vale $i/2^N$

LSB=Least Significant Bit MSB=Most...

Perche' abbiamo studiato il DAC se ci serve un ADC ?

- L' ADC si costruisce dal DAC.
- Un contatore alterna all' ingresso dell' DAC tutti i numeri binari possibili (da 0 a 2^{N-1}). Dal DAC esce quindi una rampa di corrente crescente al crescere del numero.
- Un comparatore confronta la corrente in uscita dal DAC con la corrente da misurare: quando sono uguali il contatore viene fermato: il numero binario a cui e' arrivato e' la rappresentazione binaria della corrente in ingresso.
- Questo numero puo' essere trasferito al visualizzatore o al computer per immagazzinarlo.
- Nella scheda audio di un normale computer ci sono 2 ADC (e' stereo) che fanno questo lavoro di campionatura dei segnali musicali 44100 volte al secondo, con risoluzione di 16 bit.



Il multimetro digitale

- Contiene al suo interno tutta l'elettronica di cui sopra.
- Comunque non e' uno strumento perfetto !
- Leggere il manuale per capire sensibilita' e precisione.

Misure di resistenza: Metodo Voltamperometrico

- Il modo piu' banale di misurare una resistenza e' quello di misurare la differenza di potenziale V ai suoi capi e la corrente I che ci scorre. Poi si usa la legge di Ohm: $R_x = V/I$.
- Avendo a disposizione due strumenti di misura, si puo' eseguire la misura in due modi:

Modo A Modo B

Misure di resistenza: Metodo Voltamperometrico

- Nel modo A la ddp misurata e' proprio quella ai capi di R_x , ma la corrente misurata e' la somma di quella in R_x e di quella nel voltmetro.
- Nel modo B la corrente misurata e' proprio quella attraverso R_x , ma la ddp e' la somma di quella ai capi di R_x e della caduta sull' amperometro.

Modo A Modo B

Misure di resistenza: Metodo Voltamperometrico

$I_A = I_V + I_x$
 $R_V I_V = R_x I_x$
 $\Rightarrow I_x = I_A \frac{1}{1 + \frac{R_x}{R_V}}$
 $\Rightarrow R_x = \frac{V_V}{I_A} \left[1 + \frac{R_x}{R_V} \right]$

$I_A = I_x$
 $V_V = I_x (R_x + R_A) \quad ; \quad V_x = I_x R_x$
 $\Rightarrow V_x = V_V \frac{1}{1 + \frac{R_A}{R_x}}$
 $\Rightarrow R_x = \frac{V_x}{I_x} = \frac{V_V}{I_A} \frac{1}{1 + \frac{R_A}{R_x}}$

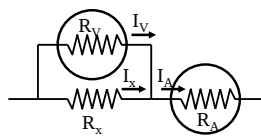
Modo A Modo B

Misure di resistenza: Metodo Voltamperometrico

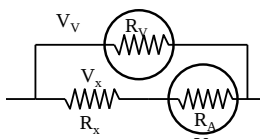
$$R_x = \frac{V_V}{I_A} \left[1 + \frac{R_x}{R_V} \right]$$

$$R_x = \frac{V_V}{I_A} \frac{1}{1 + \frac{R_A}{R_x}}$$

- Quindi in ambedue i casi il rapporto di tensione e corrente misurate e' una prima approssimazione del valore della resistenza.
- Nel modo A la misura e' tanto piu' precisa quanto $R_V > R_x$.
- Nel modo B la misura e' tanto piu' precisa quanto piu' $R_A < R_x$.



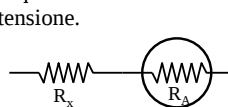
Modo A



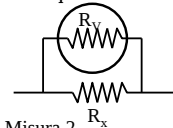
Modo B

Misure di resistenza: Metodo Voltamperometrico

- Se si ha a disposizione un solo multimetro, si eseguono sequenzialmente la misura di corrente e quella di tensione.

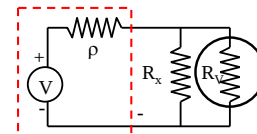
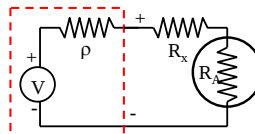


Misura 1

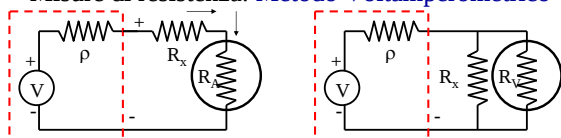


Misura 2

- La resistenza sara' inserita in un circuito che ci fa scorrere corrente:

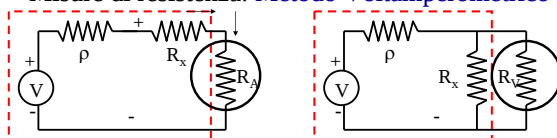


Misure di resistenza: Metodo Voltamperometrico

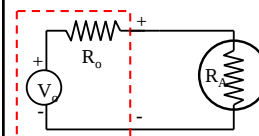


- Nella prima configurazione la corrente che scorre nell' amperometro e' uguale a quella che scorre nella resistenza; nel secondo caso la ddp misurata dal voltmetro e' uguale a quella ai capi della resistenza (ma la corrente nella R_x e' diversa da prima..)

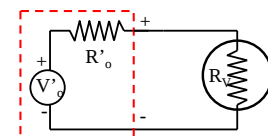
Misure di resistenza: Metodo Voltamperometrico



- Possiamo schematizzare il circuito esterno al multimetro secondo Thevenin: $V_o = V$, $R_o = \rho + R_x$; $R'_o = \rho // R_x$, $V'_o = VR_x / (\rho + R_x)$



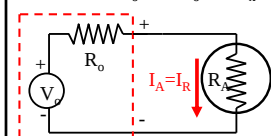
circuito equivalente



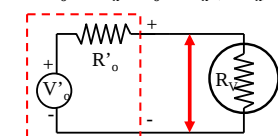
circuito equivalente

Misure di resistenza: Metodo Voltamperometrico

- Possiamo schematizzare il circuito esterno al multimetro secondo Thevenin: $V_o = V$, $R_o = \rho + R_x$; $R'_o = \rho // R_x$, $V'_o = VR_x / (\rho + R_x)$



circuito equivalente



circuito equivalente $V_V = V_R$

- La tensione e la corrente misurate nei due casi sono quindi:

$$I_x = \frac{V_o}{R_o + R_A} = \frac{V}{\rho + R_x + R_A} = \frac{V}{R_x \left(1 + \frac{\rho + R_A}{R_x} \right)}$$

$$V_x = V'_o \frac{R_V}{R_V + R'_o} = \left(\frac{VR_x}{\rho + R_x} \right) \left(\frac{R_V}{R_V + \rho // R_x} \right) = \dots\dots$$

Misure di resistenza: Metodo Voltamperometrico

$$I_x = \frac{V_o}{R_o + R_A} = \frac{V}{\rho + R_x + R_A} = \frac{V}{R_x \left(1 + \frac{\rho + R_A}{R_x} \right)}$$

$$V_x = \left(\frac{VR_x}{\rho + R_x} \right) \left(\frac{R_V}{R_V + \rho // R_x} \right) = \dots\dots$$



$$\frac{V_x}{I_x} = \frac{R_x \left(1 + \frac{\rho + R_A}{R_x} \right)}{\left(\frac{VR_x}{\rho + R_x} \right) \left(\frac{R_V}{R_V + \rho // R_x} \right)} = R_x \frac{\left(1 + \frac{\rho + R_A}{R_x} \right)}{\left(1 + \frac{\rho}{R_x} \right) \left(1 + \frac{\rho}{R_V} \frac{1}{1 + \rho / R_x} \right)}$$

Quindi all' ordine 0: $R_x^{(0)} = \frac{V_x}{I_x}$

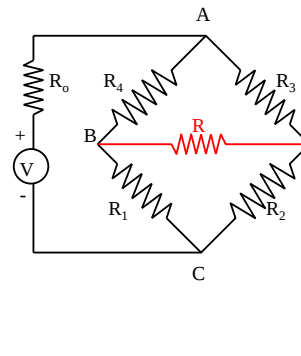
Misure di resistenza: Metodo Voltamperometrico

$$\frac{V_x}{I_x} = \frac{R_x \left(1 + \frac{\rho + R_A}{R_x}\right)}{\left(\frac{R_x}{\rho + R_x}\right) \left(\frac{R_v}{R_v + \rho // R_x}\right)} = R_x \frac{\left(1 + \frac{\rho + R_A}{R_x}\right)}{\left(1 + \frac{\rho}{R_x}\right) \left(1 + \frac{\rho}{R_v} \frac{1}{1 + \rho / R_x}\right)}$$

Quindi all'ordine 0: $R_x^{(0)} = \frac{V_x}{I_x}$

E all'ordine 1: $R_x^{(1)} = R_x^{(0)} \frac{\left(1 + \frac{\rho}{R_x^{(0)}}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\rho}{R_v} \frac{1}{1 + \rho / R_x^{(0)}}\right)}{\left(1 + \frac{\rho + R_A}{R_x^{(0)}}\right)}$

Misure di Resistenza: ponte di Wheatstone



- Trovare che condizione devono soddisfare le resistenze R_1, R_2, R_3, R_4 perché in R non scorra corrente (ponte in equilibrio)
- Si risolve direttamente:

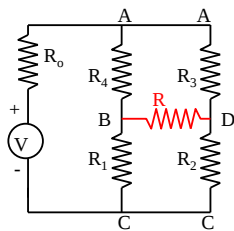
$$I = \frac{V_B - V_D}{R}$$

$$V_B = V_D \Rightarrow V_B - V_C = V_D - V_C \Rightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2 \text{ ma, essendo } I = 0$$

$$I_1 = \frac{V_C - V_A}{R_1 + R_4} \text{ e } I_2 = \frac{V_C - V_A}{R_2 + R_3}$$

$$\Rightarrow R_1 R_3 = R_2 R_4$$

Misure di Resistenza: ponte di Wheatstone



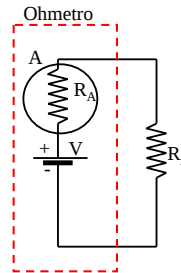
- Una soluzione più furba consiste nel ridisegnare il ponte così: come due partitori in parallelo.
- Allora perché in B ci sia la stessa tensione che in D basta che i due partitori abbiano la stessa partizione, cioè che

$$\frac{R_1}{R_1 + R_4} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

ovvero

$$R_1 R_3 = R_2 R_4$$

Misure di Resistenza: Ohmetro



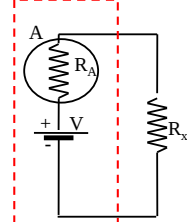
- E' uno strumento tarato con cui si eseguono misure di resistenza in modo semplice e rapido, anche se con sensibilità e precisione modeste.
- E' costituito da una batteria con in serie un milliamperometro. Si misura la corrente che circola quando il circuito e' chiuso sulla resistenza incognita.
- La scala e' graduata in modo che ci si legga direttamente la resistenza Rx
- E' una scala fortemente non lineare.

$$I = \frac{V}{R_A + R_x} \Rightarrow R_x = \frac{V}{I} - R_A$$

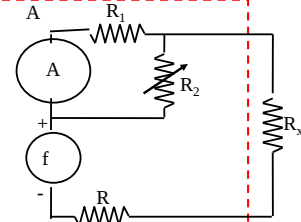
Misure di Resistenza: Ohmetro

- Questo circuito non consente di variare la sensibilità dello strumento né di compensare variazioni di tensione della batteria.
 - R = resistenza che permette di variare la portata; f = f.e.m. batteria
 - R_1 = resistenza interna amperometro
 - R_2 = resistenza addizionale di shunt, variabile ($\gg R_A$) per compensare la scarica della batteria

Ohmetro di base



Ohmetro reale



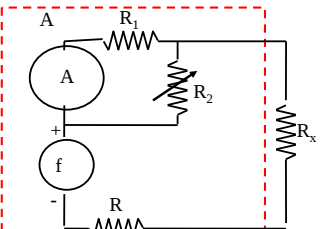
Misure di Resistenza: Ohmetro

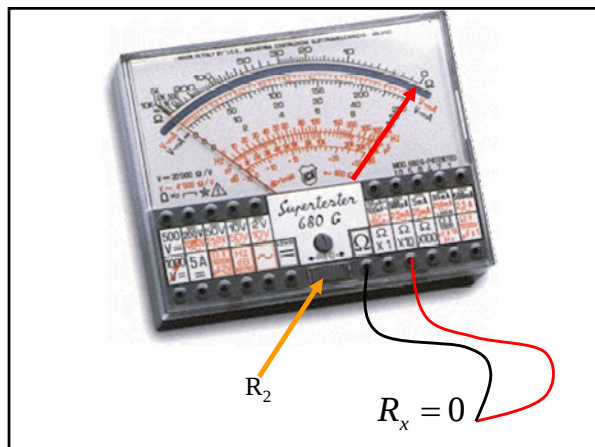
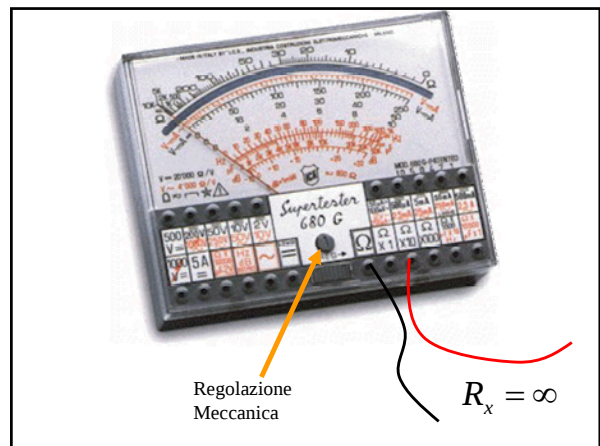
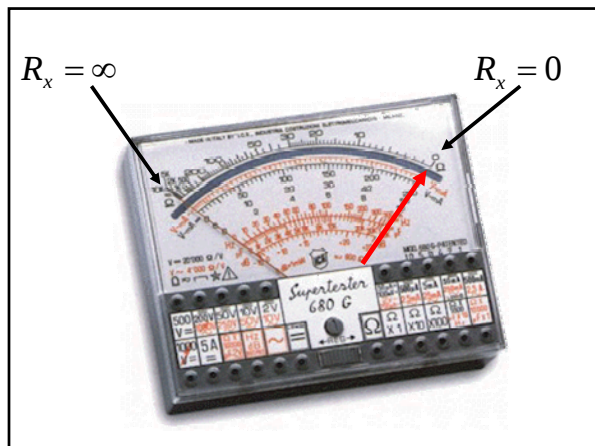
- La corrente I che passa nell' amperometro vale

$$I_A = I \frac{R_2}{R_2 + R_1} = \frac{f}{R + R_x + \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1}} \frac{R_2}{R_2 + R_1} = \frac{f}{(R + R_x)(1 + R_1 / R_2) + R_1}$$

- Quindi l' andamento di $I_A(R_x)$ e' iperbolico inverso: la corrente aumenta al diminuire della resistenza incognita.
- Si fissano f, R, R_1, R_2 in modo che $I(R_x = 0) = I_{FS}$.

$$I_A(R_x = 0) = I_{FS} = \frac{f}{R(1 + R_1 / R_2) + R_1}$$





Misure di Resistenza: Ohmmetro

- La natura non lineare dello strumento rende molto imprecisa la misura per R_x grande. Da:

$$I_A = \frac{f}{(R + R_x)(1 + R_1 / R_2) + R_1} \quad \text{usando} \quad I_{FS} = \frac{f}{R(1 + R_1 / R_2) + R_1}$$

si può ricavare R_x in funzione di I_A e poi differenziare rispetto a I_A : si ottiene:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\frac{\Delta I_A}{I_A}}{1 - \frac{I_A}{I_{FS}}} \rightarrow \infty \quad \text{se} \quad I_A \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \text{se} \quad I_A \rightarrow \infty$$

- Si conclude che l'errore relativo diverge ai due estremi della scala. Si deve quindi scegliere sempre un fondo scala che porti l'indice entro $\pm 30\%$ della metà della scala.