

Fenomeni di Risonanza

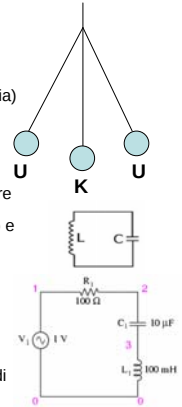
- Già conosciuti in meccanica.
- Quando c'è un sistema che ha una frequenza propria di oscillazione ω_N , stimolandolo con una piccola forza oscillante con frequenza ω_F molto vicina a ω_N si può aumentare moltissimo l'ampiezza del moto.
- Equazione dell'oscillatore forzato:

$$\ddot{x} + \omega_S \dot{x} + \omega_N^2 x = a_0 F \cos(\omega_F t)$$
- Soluzione:

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega_S t + \phi) + B \cos(\omega_F t - \delta) \quad B = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_N^2 - \omega_F^2)^2 + \gamma^2 \omega_F^2}}$$
- Esempi pratici: l'altalena, il diapason, il bicchiere che suona, le corde "simpatiche" nella chitarra a 12 corde ...

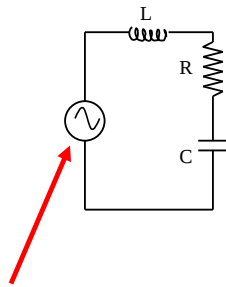
Caso elettrico

- L'oscillatore è un sistema in cui si converte l'energia da una forma a un'altra, e viceversa, alternativamente.
- Nel pendolo, da potenziale (all'estremo) l'energia diventa cinetica (nel punto più basso della traiettoria) e poi di nuovo potenziale (all'altro estremo) ... e così via.
- Nel caso elettrico se si connettono tra loro un induttore e un condensatore l'energia si trasforma alternativamente da elettrica (quando il condensatore è completamente carico, e non scorre corrente) a magnetica (quando scorre massima corrente nell'induttore e il condensatore è scarico) e di nuovo a elettrica quando il condensatore è di nuovo carico ... e così via.
- Il circuito avrà una sua frequenza di risonanza (come il pendolo ha la sua frequenza di oscillazione), e si potrà forzare il trasferimento di corrente collegando il circuito ad un generatore di corrente alternata.
- L'analogo della viscosità è la resistenza elettrica, che impedisce il libero trasferimento di cariche (e di energia).



Il circuito RLC serie

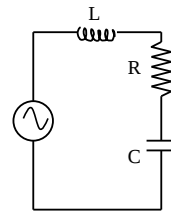
- Se si aggiunge un induttore al circuito RC si ottiene un circuito RLC serie.
- Sia L l'induttanza (coefficiente di autoinduzione) dell'induttore
- Proviamo a risolvere il circuito (cioè a trovare la corrente che lo attraversa) quando è eccitato da una sorgente sinusoidale. $V = V_o \cos(\omega t + \phi_v)$



Il circuito RLC serie

- Per la seconda legge di Kirchhoff:

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C}$$
- Per l'induttanza abbiamo considerato la forza elettromotrice autoindotta $-LdI/dt$ e l'abbiamo spostata a secondo membro cambiandola di segno.



- Derivando rispetto a t:

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- È una eq. differenziale lineare del secondo ordine non omogenea. La soluzione è la somma dell'integrale generale dell'omogenea più un integrale particolare della disomogenea.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Omogenea associata}$$

- Fisicamente la soluzione dell'omogenea corrisponde al comportamento transitorio iniziale; a regime vale l'integrale particolare.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- La soluzione dell'omogenea è del tipo

$$I(t) = I_1 e^{k_1 t} + I_2 e^{k_2 t}$$

- Con I_1 e I_2 costanti da determinare dalle condizioni iniziali e k_1 e k_2 soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$Lk^2 + Rk + \frac{1}{C} = 0$$

- quindi

$$k_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ponendo

Il circuito RLC serie

$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

si trova

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

la quantità b può essere reale, nulla o immaginaria

a seconda che sia

$$\begin{cases} \frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} & \text{Caso 1, } b \text{ reale} \\ \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} & \text{Caso 2, } b \text{ nullo} \\ \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC} & \text{Caso 3, } b \text{ immaginario} \end{cases}$$

Il circuito RLC serie

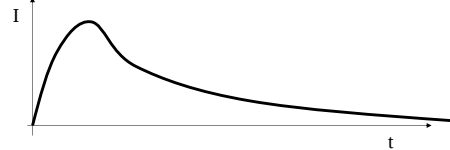
$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

e

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

se $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ gli esponenti sono ambedue negativi.

caso sovrasmorzato :



Imponendo le condizioni iniziali :

$$I(0) = 0 \Rightarrow$$

$$0 = I(0) = I(t) = I_1 e^{-(a-b)0} + I_2 e^{-(a+b)0} = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = -I_2$$

$$\text{e } q(0) = q_0 \Rightarrow$$

$$RI(0) + L \left. \frac{dI}{dt} \right|_0 + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow L \left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = -\frac{q_0}{C}$$

si trova quindi

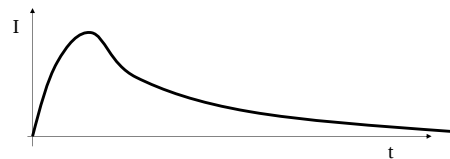
$$I_1 = -\frac{q_0}{2LCb}$$

e ponendo $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ si arriva a

$$I(t) = -\frac{q_0 \omega_0^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\}$$

Quindi nel caso sovrasmorzato si ottiene il seguente andamento

$$I(t) = -\frac{q_0 \omega_0^2}{2b} e^{-at} \{e^{bt} - e^{-bt}\}$$



Caso criticamente smorzato

$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\text{se } \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} \quad (\text{caso criticamente smorzato}) \quad b = 0$$

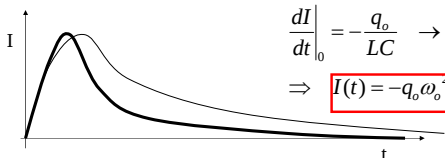
la soluzione è del tipo $I(t) = (I_1 + I_2 t) e^{-at}$

Di nuovo, imponendo le condizioni iniziali si trovano I_1 e I_2

$$I(0) = 0 \rightarrow I_1 = 0$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_0 = -\frac{q_0}{LC} \rightarrow I_2 = -\frac{q_0}{LC}$$

$$\Rightarrow I(t) = -q_0 \omega_0^2 t e^{-at}$$



$$a = \frac{R}{2L} \quad b = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Il circuito RLC serie

e

$$I(t) = I_1 e^{-(a-b)t} + I_2 e^{-(a+b)t}$$

se $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ la soluzione è

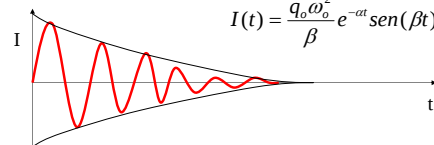
$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$I(t) = I_1 e^{-(\alpha-j\beta)t} + I_2 e^{-(\alpha+j\beta)t}$$

$$I(t) = -j \frac{q_0 \omega_0^2}{2\beta} (e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) e^{-\alpha t}$$

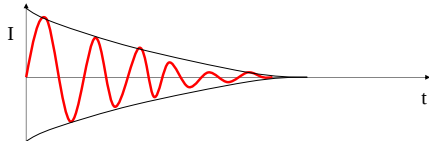
caso oscillatorio smorzato :

$$I(t) = \frac{q_0 \omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$$



Il circuito RLC serie

- L' ampiezza delle oscillazioni diminuisce perche' l' energia inizialmente disponibile come campo elettrico nel condensatore viene via via dissipata per effetto joule nella resistenza.
- Le oscillazioni dipendono dal fatto che l' energia viene rimbalzata continuamente tra condensatore (campo elettrico) e induttore (campo magnetico)



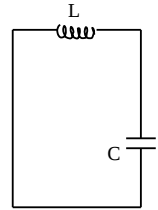
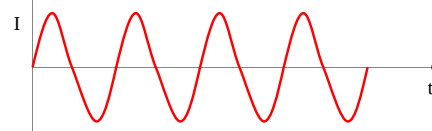
Il circuito RLC serie

- Consideriamo il caso oscillatorio smorzato.
- Se R fosse nulla avremmo $\alpha=R/2L=0$ e quindi

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \Rightarrow$$

$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} \sin(\beta t)$$

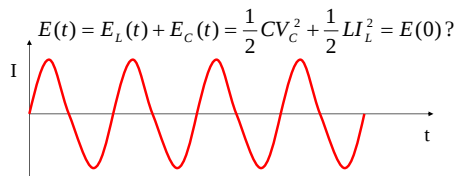
- Le oscillazioni in tal caso non sono smorzate



Il circuito RLC serie

- In assenza di fenomeni dissipativi, e trascurando l' energia irraggiata, l' energia immagazzinata nel circuito dovrebbe rimanere costante. Vediamo se e' vero.

$$E = E(0) = \frac{1}{2} \frac{q_o^2}{C}$$



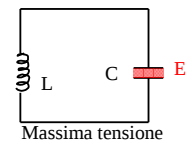
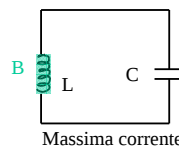
$$I(t) = \frac{q_o \omega_o^2}{\beta} \sin \beta t = I_o \sin \omega_o t$$

$$\cancel{RI} + L \frac{dI}{dt} + V_C = 0 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} = V_C \Rightarrow -LI_o \omega_o \cos \omega_o t = V_C$$

$$E_C = \frac{1}{2} CV_C^2 = \frac{1}{2} CL^2 I_o^2 \omega_o^2 \cos^2 \omega_o t = \frac{1}{2} LI_o^2 \cos^2 \omega_o t$$

$$E_L = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} LI_o^2 \sin^2 \omega_o t$$

$$E_C + E_L = \frac{1}{2} LI_o^2 \quad \text{Costante !}$$



$$\frac{dV}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} \quad \text{Il circuito RLC serie}$$

- Cosa succede a regime (se V e' sinusoidale)?
- Si cerca un integrale particolare:

$$V = V_o e^{j(\omega t + \phi_V)}$$

$$I = I_o e^{j(\omega t + \phi_I)}$$

$$j\omega V_o e^{j(\omega t + \phi_V)} = \left[-\omega^2 L + j\omega R + \frac{1}{C} \right] I_o e^{j(\omega t + \phi_I)}$$

$$V_o e^{j(\phi_V - \phi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

A questa equazione si poteva arrivare subito dalla legge di Ohm generalizzata.

L' induttanza

- Legge di Ohm generalizzata:
 $\vec{V} = \vec{Z} \vec{I}$
- Per un induttore ideale l' impedenza e' ricavabile direttamente dalla legge di Lenz:

$$V_L = L \frac{dI_L}{dt}$$

- Nel caso sinusoidale prendiamo

$$I_L = i_o e^{j\omega t} \Rightarrow V_L = L \frac{dI_L}{dt} = Li_o j\omega e^{j\omega t} = Lj\omega I_L$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_L = j\omega L}$$

Impedenza del condensatore

dalla lezione 5

- La corrente che scorre nel condensatore e'

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (V_o e^{j(\omega t + \varphi)}) = C V_o \omega e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$i_C = i = (j\omega C) V_C \rightarrow \text{Legge di Ohm Generalizzata: basta pensare ad una "impedenza" del condensatore pari a } 1/j\omega C$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

ponendo

$$\varphi = (\varphi_V - \varphi_I)$$

$$Z = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]$$

si ottiene

$$V_o e^{j\varphi} = Z I_o \Rightarrow \begin{cases} I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \varphi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{cases}$$

$$V_o e^{j\varphi} = Z I_o \Rightarrow \begin{cases} I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \\ \varphi = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right] \end{cases}$$

se $\omega = \omega_o = 1/\sqrt{LC}$ l'impedenza diventa reale (e pari a R) e lo sfasamento va a 0. condizione di risonanza.

si definisce il fattore di qualita' del circuito

$$Q_o = \omega_o L / R \quad \text{e si puo' riscrivere :}$$

$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow I_o = \frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

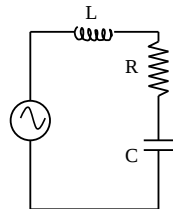
Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o$$

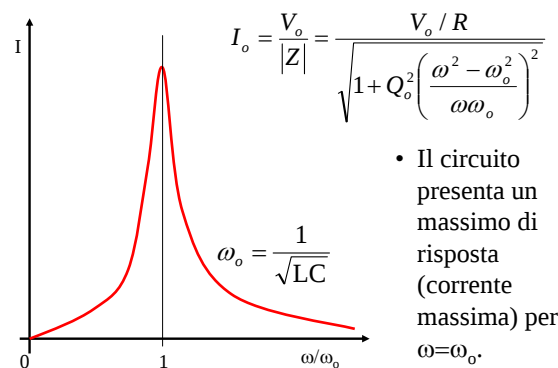
$$I_o = \frac{V_o}{|Z|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} =$$

$$\frac{V_o / R}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

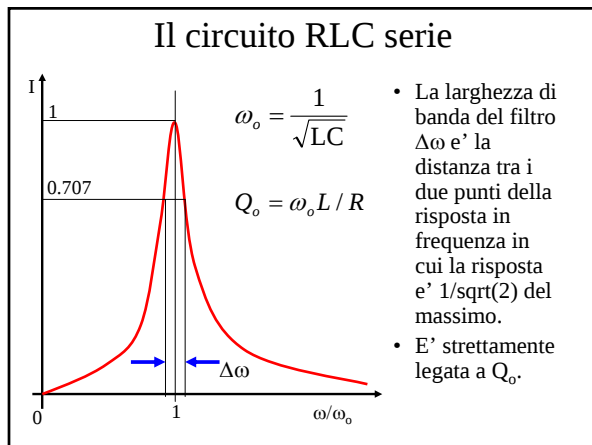
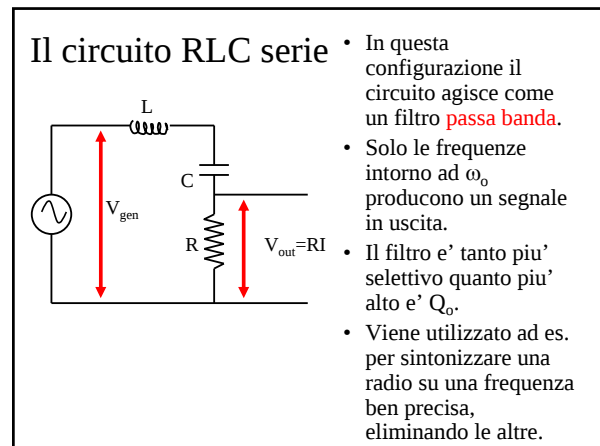
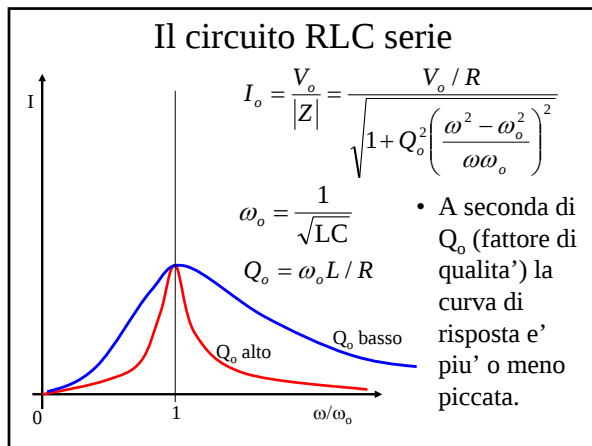
dove $Q_o = \omega_o L / R$ e' il fattore di qualita'



Il circuito RLC serie



- Il circuito presenta un massimo di risposta (corrente massima) per $\omega = \omega_o$.



Il circuito RLC serie

$$\frac{I_o}{V_{gen} / R} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

vale $1/\sqrt{2}$ quando

$$Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2 = 1$$

$$\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} = \pm \frac{1}{Q_o} \Rightarrow \omega^2 \mp \frac{\omega \omega_o}{Q_o} - \omega_o^2 = 0$$

Il circuito RLC serie

$$Q_o \omega^2 \mp \omega \omega_o - Q_o \omega_o^2 = 0$$

la soluzione e'

$$\omega = \frac{\mp \omega_o \pm \sqrt{\omega_o^2 + 4Q_o^2 \omega_o^2}}{2Q_o}$$

e le due soluzioni positive sono

$$\omega_{1,2}^+ = \frac{\mp \omega_o + \sqrt{\omega_o^2 + 4Q_o^2 \omega_o^2}}{2Q_o}$$

da cui

$$\Delta\omega = \omega_2^+ - \omega_1^+ = \frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{R}{L}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

La larghezza di banda e' inversamente proporzionale al fattore di qualita' Q_o . Il filtro e' tanto piu' selettivo quanto piu' alto e' Q_o .

Il circuito RLC serie

- La resistenza minima del circuito e' quella dell' avvolgimento con cui si realizza l' induttanza.
- Con induttanze di ottima qualita' si ottengono fattori di qualita' dell' ordine di 100, e quindi bande passanti dell' ordine di 1/100 della frequenza centrale.

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

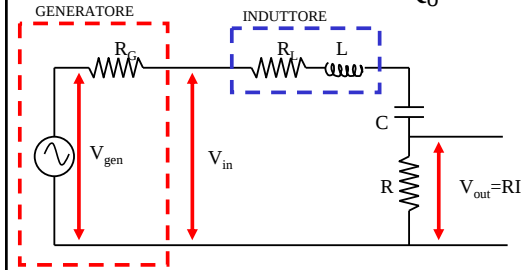
$$\Delta\omega = \omega_2^+ - \omega_1^+ = \frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow Q_o = \omega_o \frac{L}{R} = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} = \frac{f_o}{\Delta f}$$

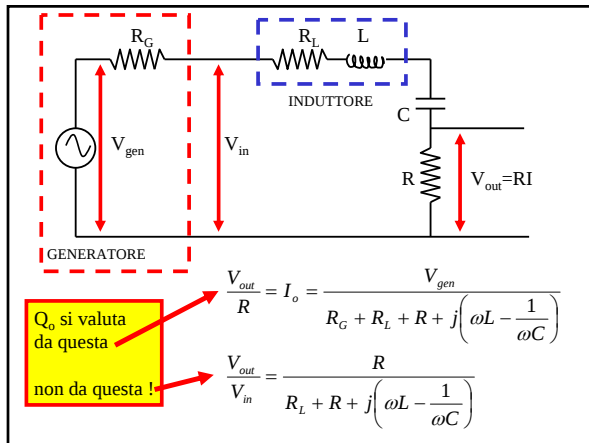
Nota: Misura di Q_o

- Il Q_o che abbiamo definito si riferisce all'espressione della **corrente** nel circuito.
- La R che compare nell'espressione di Q_o e' la somma di
 - Resistenza interna del generatore
 - Resistenza interna dell' induttore
 - Resistenza reale
- La corrente che scorre nel circuito puo' essere valutata misurando V ai capi della resistenza reale e dividendo per il valore della resistenza reale.
- Da una curva di I in funzione della frequenza si valuta $Q_o = f_o / \Delta f$

Nota: Misura di Q_o



- In un circuito reale solo V_{in} e V_{out} sono misurabili, V_{gen} non lo e' (almeno non direttamente).



Nota2: se si vuole misurare R_L

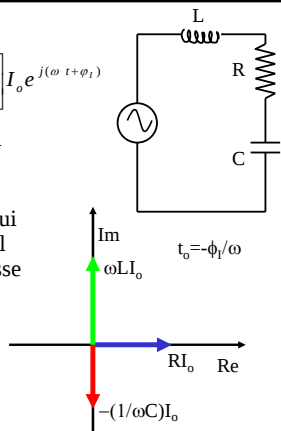
- Dalle misure di I si valuta $Q_o = f_o / \Delta f$ e da questo la somma di $R_L + R_G + R$, da cui per sottrazione R_L (sapendo le altre due)
- Oppure, meglio
- Dalle misure di V_{out}/V_{in} alla risonanza:

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{RIS} = \frac{R}{R + R_L} \Rightarrow R_L = R \left[\left. \frac{V_{in}}{V_{out}} \right|_{RIS} - 1 \right]$$

Lo sfasamento

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] I_o e^{j(\omega t + \phi_1)}$$

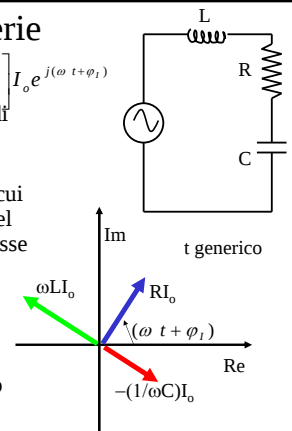
- Vediamo le tensioni ai capi di ciascun componente:
- I tre termini nell'equazione sopra sono delle tensioni, la cui parte reale e' la proiezione del fasore rappresentativo sull'asse reale del piano complesso.
- I tre vettori sono lunghi rispettivamente
- $I_o R$, $I_o \omega L$, $I_o / \omega C$



Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] I_o e^{j(\omega t + \phi_1)}$$

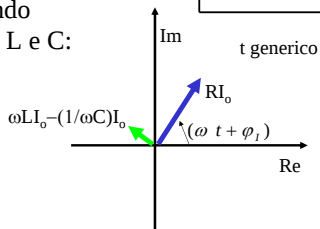
- Vediamo le tensioni ai capi di ciascun componente:
- I tre termini nell'equazione sopra sono delle tensioni, la cui parte reale e' la proiezione del fasore rappresentativo sull'asse reale del piano complesso.
- I tre vettori sono lunghi rispettivamente
- $I_o R$, $I_o \omega L$, $I_o / \omega C$
- Al passare del tempo ruotano mantenendo le stesse fasi relative



Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

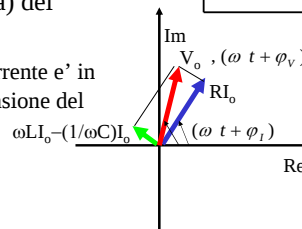
- La composizione dei vettori si può fare sommando prima i contributi di L e C:



Il circuito RLC serie

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

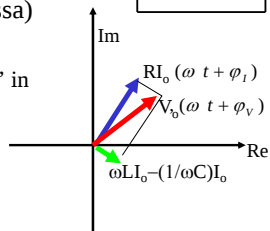
- E poi trovando la risultante, che deve essere proprio la tensione (complessa) del generatore.
- Se $\omega L > (1/\omega C)$, la corrente è in ritardo rispetto alla tensione del generatore



Il circuito RLC serie

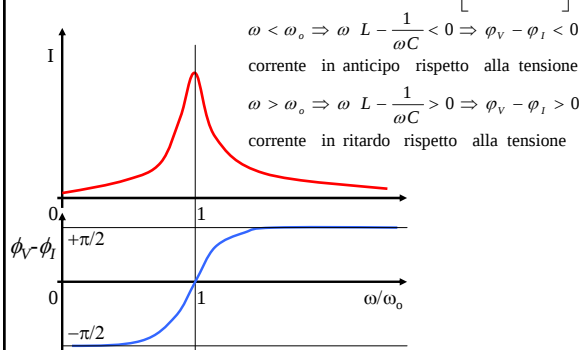
$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- E poi trovando la risultante, cioè la tensione (complessa) del generatore.
- Se $\omega L < (1/\omega C)$, la corrente è in anticipo rispetto alla tensione



circuito RLC serie

$$\varphi_V - \varphi_I = \arctan \left[\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]$$



extratensioni

$$V_o e^{j\omega t} = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I_o e^{j(\omega t + \varphi_I)}$$

- Vediamo i moduli delle tensioni ai capi di ciascun componente **reattivo**:

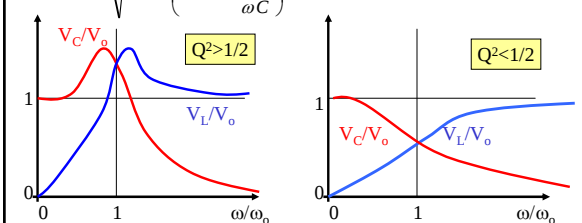
$$\bar{V}_C = \bar{Z}_C \bar{I} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \bar{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad \frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\bar{V}_L = \bar{Z}_L \bar{I} = \frac{j\omega L \bar{V}_o}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad \frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Il circuito RLC serie

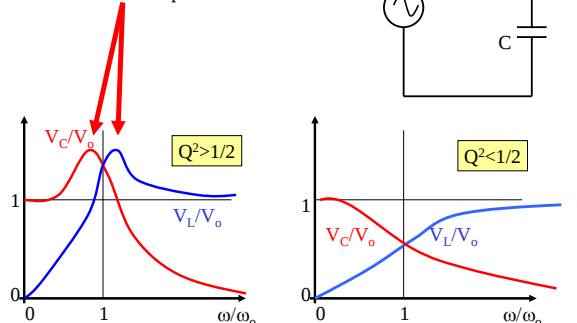
$$\frac{V_C}{V_o} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\frac{V_L}{V_o} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$



Il circuito RLC serie

EXTRATENSIONI:
Se Q e' molto alto possono
Rovinare i componenti



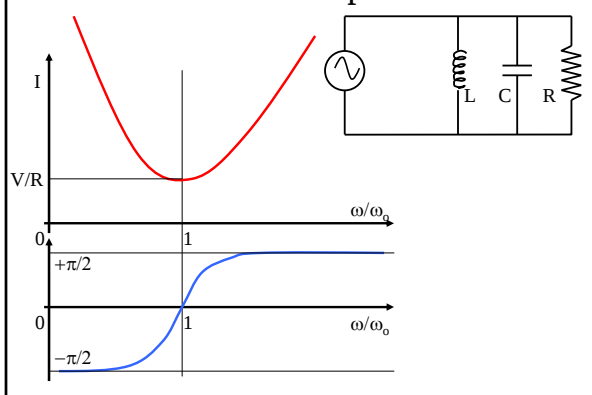
Il circuito RLC parallelo

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \left[\frac{1}{R} + j \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right] \right]$$

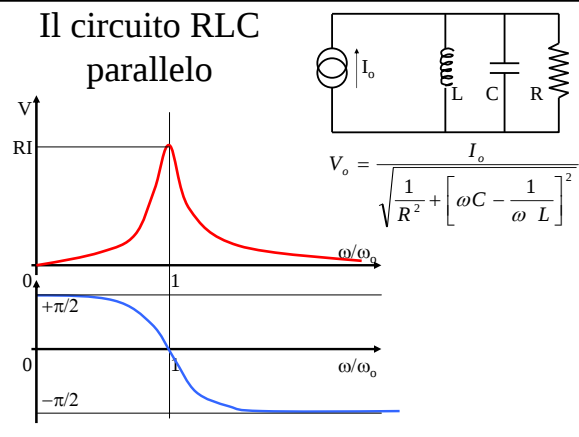
$$\bar{I} = \bar{V} \frac{1}{\bar{Z}} = \bar{V} \left[\frac{1}{R} + j \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right] \right]$$

$$I_o = V_o \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left[\omega C - \frac{1}{\omega L} \right]^2}$$

Il circuito RLC parallelo

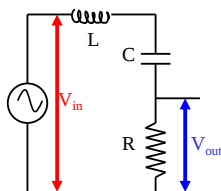


Il circuito RLC parallelo



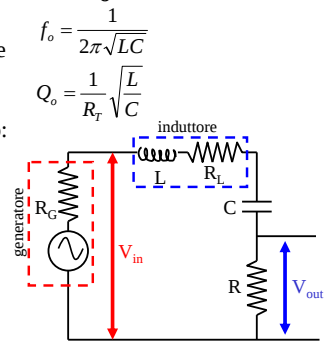
Come costruire un RLC con un buon Q_o (esperienza RLC)

- Il filtro RLC serve a selezionare una banda di frequenze intorno a una particolare frequenza di risonanza, dove normalmente c'è il segnale che interessa, mentre alle altre frequenze c'è solo rumore.
- Se Q_o e' alto, la banda selezionata e' stretta, e si elimina piu' rumore.



Come costruire un RLC con un buon Q_o

- Per ottenere un Q_o alto per una data f_o , R_T deve essere piccola.
- R_T e' la somma di tutte le R in serie nel circuito:
 - La R_G interna del generatore
 - La R da cui si preleva il segnale in uscita
 - La R_L interna all'induttore.
- $R_T = R_G + R_L + R$



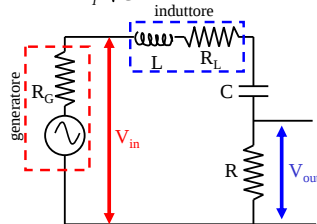
Come costruire un RLC con un buon Q_0

- R non può essere troppo piccola, altrimenti il segnale in uscita $V_{out}=RI$ è piccolo. Un buon compromesso si ha per **$R=10\Omega$**

- R_L dipende dalla qualità dell'induttore. Valori ragionevoli sono **$R_L=10\Omega$** per $L=10\text{mH}$. Il valore di R_L può essere misurato con un ohmetro in continua.

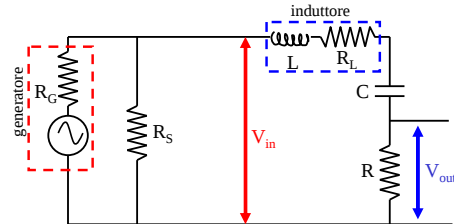
$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



Come costruire un RLC con un buon Q_0

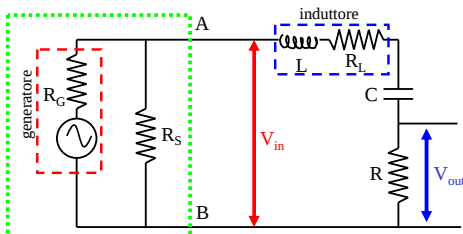
- R_G è normalmente di 50Ω , quindi non è trascurabile rispetto alle altre. Un buon trucco consiste nell'inserire una resistenza di **shunt** $R_S = 10\Omega$ in parallelo al generatore.



Come costruire un RLC con un buon Q_0

- Secondo il teorema di Thevenin il nuovo generatore (ottenuto tra i punti A e B del circuito, riquadro verde) ha una resistenza interna pari al parallelo tra R_G e R_S .

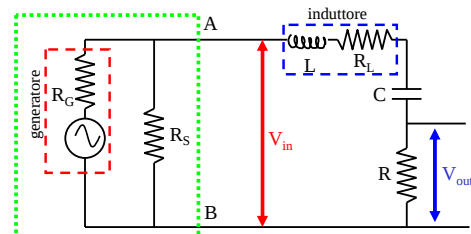
$$R'_G = \frac{R_G R_S}{R_G + R_S} = \frac{50 \times 10}{50 + 10} \approx 8.3\Omega$$



Come costruire un RLC con un buon Q_0

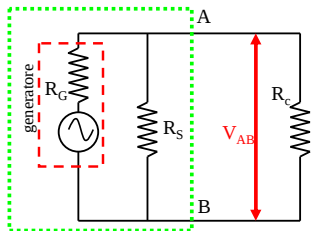
- La V_{in} sarà inferiore a quella che avremmo in assenza di R_S , ma questo si può rimediare agendo sul potenziometro di ampiezza del generatore.

$$R'_G = \frac{R_G R_S}{R_G + R_S} = \frac{50 \times 10}{50 + 10} \approx 8.3\Omega$$



Verifica dell'impedenza d'uscita del generatore

- La prima cosa da fare sarà collegare il generatore a una resistenza di shunt e misurare la resistenza interna equivalente.
- Si usa l'oscilloscopio e si misura l'ampiezza della tensione tra A e B al variare del carico R_c che connettiamo tra A e B. Si parte dall'ampiezza in assenza di carico $R_c = \infty$ e si varia poi R_c tra 20Ω e 1Ω . R_G si ottiene facendo la media pesata delle stime ottenute con diversi R_c .



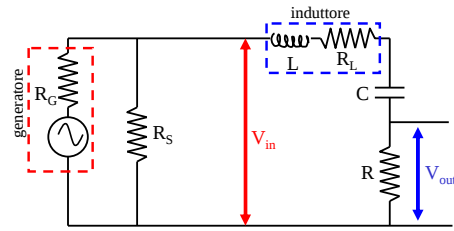
$$V_{AB}(R_c) = V_{AB}(\infty) \frac{R_c}{R_c + R'_G}$$

$$R'_G = R_c \left[\frac{V_{AB}(\infty)}{V_{AB}(R_c)} - 1 \right]$$

Come costruire un RLC con un buon Q_0

- In totale otteniamo una $R_T = R_G + R_L + R$ dell'ordine di 30Ω .
- Per avere un buon Q_0 conviene scegliere una f_o abbastanza alta:

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_o \frac{L}{R_T}$$

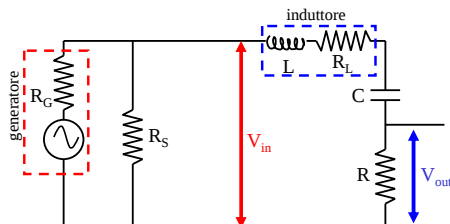


Come costruire un RLC con un buon Q_o

- Con $C=47\text{nF}$ e $L=1\text{mH}$ si ottiene

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-3} \cdot 47 \cdot 10^{-9}}} \text{ Hz} \approx 23\text{kHz}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{30} \sqrt{\frac{10^{-3}}{47 \cdot 10^{-9}}} \approx 4.9$$



Come costruire un RLC con un buon Q_o

- La risposta si calcola con le solite formule:

$$\frac{V_{out}}{R} = I_o = \frac{V_{gen} / R_T}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

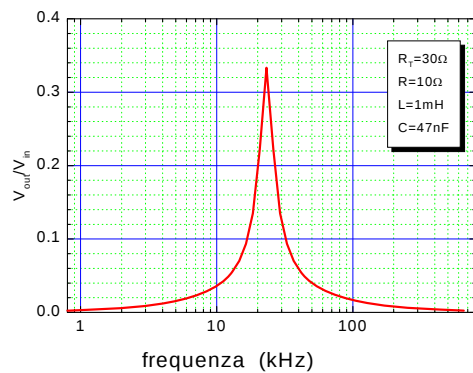
$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q_o = \frac{1}{R_T} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

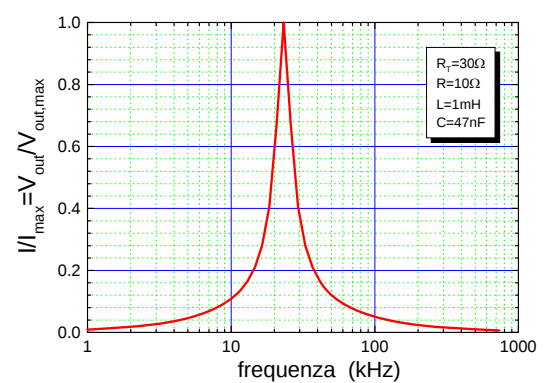
$$\frac{I_o}{I_{o,MAX}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right)^2}}$$

$$\varphi = \arctan \left[Q_o \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{\omega \omega_o} \right) \right]$$

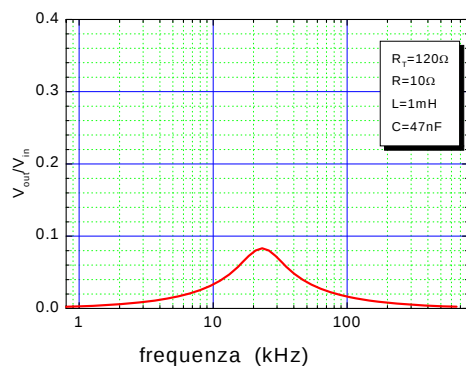
Con un induttore di buona qualità' ($L=1\text{mH}$, $R_L=10\Omega$) :



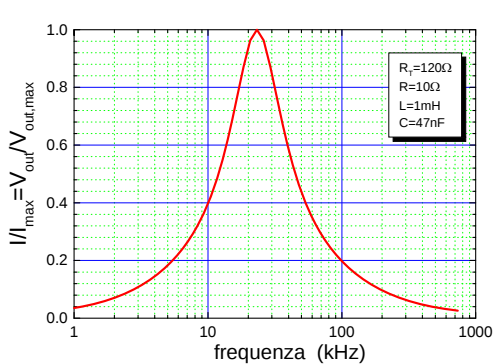
Con un induttore di buona qualità' ($L=1\text{mH}$, $R_L=10\Omega$) :

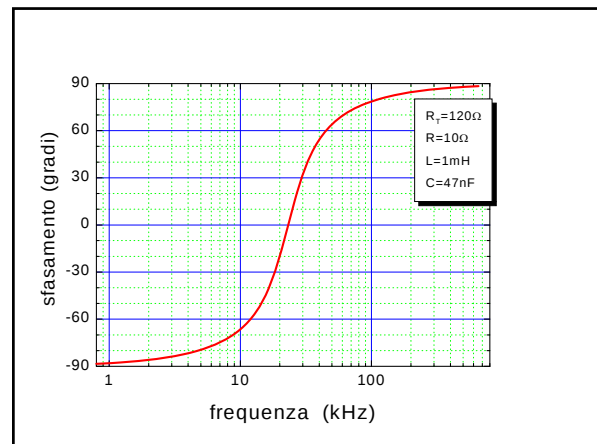
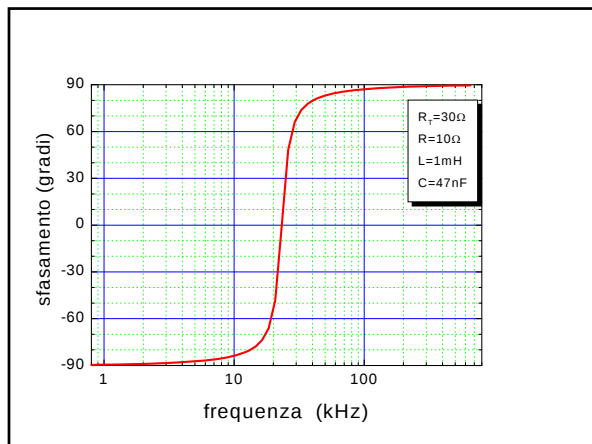


Con un induttore di cattiva qualità' ($L=1\text{mH}$, $R_L=100\Omega$) :



Con un induttore di cattiva qualità' ($L=1\text{mH}$, $R_L=100\Omega$) :

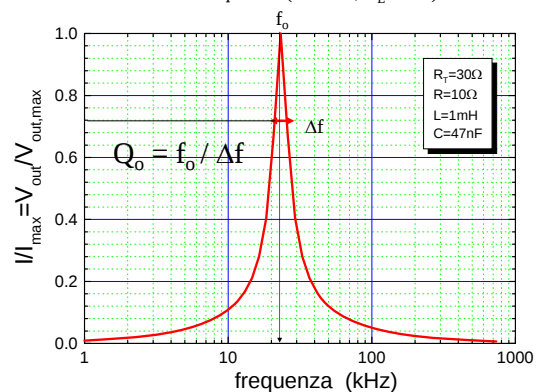




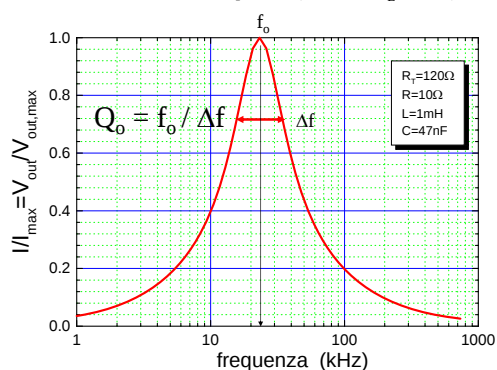
Misure : RLC in regime sinusoidale

- Realizzazione del circuito: scelta dei componenti, misure sui componenti con l' ohmetro e il capacimetro, stima teorica di f_0 e Q_0
- Verifica della impedenza di uscita del generatore con shunt.
- Misura delle risposte $V_{out}(f)/V_{out,MAX}$ e $\phi(f)$
- Da queste si valutano la frequenza di risonanza f_0 e la larghezza a meta' altezza della curva di risposta Δf ; da queste si stima Q_0 .
- Studio delle extratensioni (su C): e' $V_{out}/V_{in}(f) > 1$?
- Ripetizione delle stesse misure togliendo la resistenza di shunt. Quanto varia Q_0 ?
- Conservate i componenti. Servono per la successiva esperienza.

Con un induttore di buona qualita' ($L=1\text{mH}$, $R_L=10\Omega$) :



Con un induttore di cattiva qualita' ($L=1\text{mH}$, $R_L=100\Omega$) :



Circuiti integratori e derivatori

- Sono circuiti che producono all' uscita un segnale di tensione proporzionale all' integrale (o alla derivata) del segnale in ingresso.
- Che si possano costruire e' evidente dalle relazioni

$$V = \frac{1}{C} \int_0^t Idt ; \quad V = L \frac{dI}{dt}$$

$$I = C \frac{dV}{dt} ; \quad I = \frac{1}{L} \int_0^t Vdt$$

Circuiti integratori: RC

$V_{in} = V_C + V_R$ se

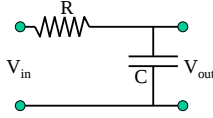
$|V_C(t)| \ll |V_R(t)|$

$V_{in}(t) \approx V_R(t) = Ri(t)$

$I(t) \cong \frac{1}{R} V_{in}(t)$

$V_{out}(t) = V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt' = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t \frac{1}{R} V_{in}(t') dt'$

$V_{out}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t V_{in}(t') dt'$



Circuiti integratori: LR

$V_{in} = V_L + V_R$ se

$|V_R(t)| \ll |V_L(t)|$

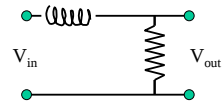
$V_{in}(t) \approx V_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$

$L di(t) \cong V_{in}(t) dt$

$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t V(t') dt' + i(t_0)$

$V_{out}(t) = V_R(t) = Ri(t) = \frac{R}{L} \int_{t_0}^t V(t') dt' + Ri(t_0)$

$V_{out}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t V(t') dt' + Ri(t_0)$



Circuiti derivatori: CR

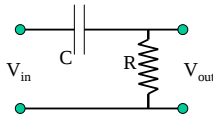
$V_{in} = V_C + V_R$

$|V_R(t)| \ll |V_C(t)|$ se

$V_{in}(t) \approx V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt'$

$\frac{d}{dt} V_{in}(t) \approx \frac{d}{dt} V_C(t) = \frac{1}{C} i(t)$

$V_{out}(t) = Ri(t) = RC \frac{d}{dt} V_{in}(t) = \tau \frac{d}{dt} V_{in}(t)$



Circuiti derivatori: RL

$V_{in} = V_L + V_R$

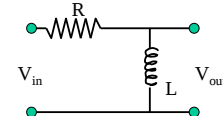
$|V_L(t)| \ll |V_R(t)|$ se

$V_{in}(t) \approx V_R(t) = Ri(t)$

$i(t) = \frac{1}{R} V_{in}(t)$

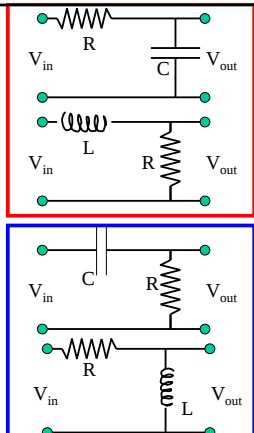
$V_{out}(t) = L \frac{d}{dt} i(t) = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} V_{in}(t)$

$V_{out}(t) = \tau \frac{d}{dt} V_{in}(t)$



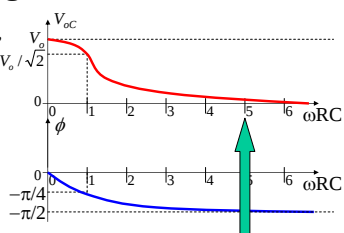
Circuiti integratori e derivatori

- Abbiamo quindi delle "approssimazioni" di circuiti integratori e derivatori.
- I filtri "passa basso" RC e LR forniscono gli **integratori**;
- I filtri "passa alto" CR e RL forniscono i **derivatori**.



Circuiti integratori e derivatori

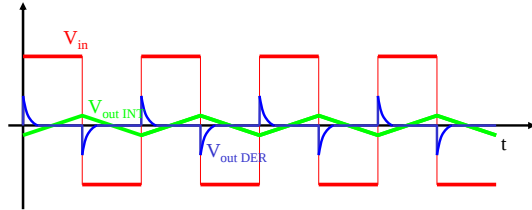
- Le approssimazioni sono tanto migliori quanto piu' il segnale in uscita e' piccolo rispetto a quello in ingresso.
- Per i circuiti derivatori questa approssimazione e' rispettata tanto meglio quanto piu' $f < f_0 = 1/2\pi\tau$;
- Per i circuiti integratori questa approssimazione e' rispettata tanto meglio quanto piu' $f > f_0 = 1/2\pi\tau$;



A questa frequenza il passa basso e' un buon integratore. Ma il segnale in uscita e' ridotto di $1/\tau$!

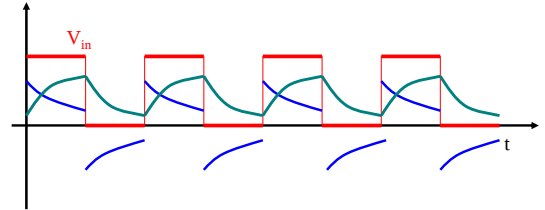
Risposta Impulsiva

- Supponiamo di applicare ad un circuito integratore o ad un derivatore un segnale ad onda quadra:



Alla fine dell'esperienza RC e CR avete provato ad ottenere queste forme d'onda, come visto con il picro-scope in classe

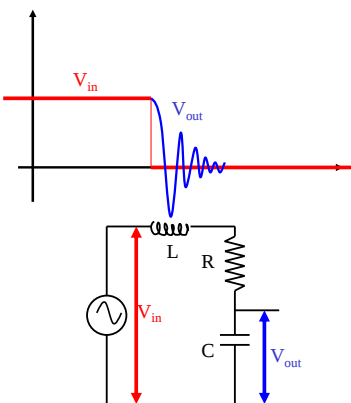
- Supponiamo di applicare ad un circuito integratore o ad un derivatore un segnale ad onda quadra:



Alla fine dell'esperienza RC CR avete provato ad ottenere queste forme d'onda come visto in classe col picro-scope

RLC con onda quadra

- Ovvero scarica di un condensatore in un circuito RLC, quando il periodo dell'onda quadra e' molto piu' lungo dello pseudoperiodo dell'oscillazione smorzata.
- E' una situazione che capita spesso in elettronica digitale.



Carichiamo il condensatore fino a Q e chiudiamo il circuito al tempo $t = 0$

$$\frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \gamma \frac{dQ}{dt} + \omega_o^2 Q = 0$$

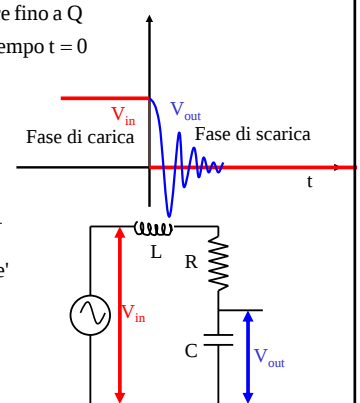
dove

$$\gamma = R/L \quad \text{e} \quad \omega_o = 1/\sqrt{LC}$$

l'equazione caratteristica e'

$$\alpha^2 + \gamma\alpha + \omega_o^2 = 0$$

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}$$



$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}$$



se l'integrando e' positivo, la soluzione e' la somma di due esponenziali decrescenti : soluzione sovrasmorzata



se l'integrando e' nullo, soluzione a smorzamento critico



se l'integrando e' negativo, soluzioni complesse coniugate :

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm j\omega_1 \quad \text{con} \quad \omega_1^2 = \omega_o^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

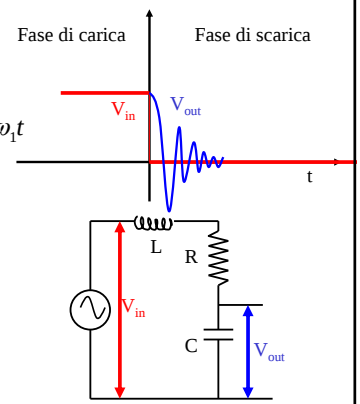
ω_1 e' detto pseudoperiodo;

la soluzione e' $Q = Q_o e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$

$$Q = Q_o e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$$

$$V_{out}(t) = \frac{Q_o}{C} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_1 t$$

Nell'esperienza sull'RLC visualizzerete questa forma d'onda e misurerete lo pseudoperiodo

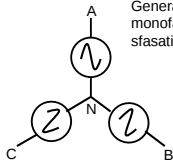


Esempio sui fasori:

Generatori Monofase e Trifase



Generatore monofase : $V(t) = V_A - V_N = V_o e^{j\omega t}$



Generatore trifase (a stella) : insieme di tre generatori monofase, con un estremo in comune, stessa ampiezza, e sfasati 120° uno dall' altro:

$$\begin{cases} V_{AN}(t) = V_A - V_N = V_o e^{j\omega t} \\ V_{BN}(t) = V_B - V_N = V_o e^{j(\omega t - 2\pi/3)} \\ V_{CN}(t) = V_C - V_N = V_o e^{j(\omega t - 4\pi/3)} \end{cases}$$

Esempio sui fasori:

Generatori Monofase e Trifase

Generatore trifase (a stella) : insieme di tre generatori monofase, con un estremo in comune, stessa ampiezza, e sfasati 120° uno dall' altro:



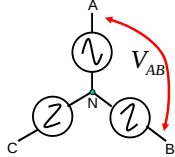
$$\begin{cases} V_{AN}(t) = V_A - V_N = V_o e^{j\omega t} \\ V_{BN}(t) = V_B - V_N = V_o e^{j(\omega t - 2\pi/3)} \\ V_{CN}(t) = V_C - V_N = V_o e^{j(\omega t - 4\pi/3)} \end{cases}$$



Che tensione c'è, istante per istante, tra A e B, tra B e C, tra C ed A ?

Esempio sui fasori:

Generatori Monofase e Trifase



$$\begin{cases} V_{AN}(t) = V_A - V_N = V_o e^{j\omega t} \\ V_{BN}(t) = V_B - V_N = V_o e^{j(\omega t - 2\pi/3)} \\ V_{CN}(t) = V_C - V_N = V_o e^{j(\omega t - 4\pi/3)} \end{cases}$$

Che tensione c'è, istante per istante, tra A e B, tra B e C, tra C ed A ?

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_{AN} - V_{BN} = V_o [e^{j\omega t} - e^{j(\omega t - 2\pi/3)}] = V_o e^{j\omega t} (1 - e^{-j2\pi/3}) = \\ &= V_o e^{j\omega t} [1 - \cos(-2\pi/3) - j \sin(-2\pi/3)] = V_o e^{j\omega t} \left[1 + \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \\ &= V_o e^{j\omega t} \left[\frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \sqrt{3} V_o e^{j\omega t} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right] = \sqrt{3} V_o e^{j\omega t} e^{-j\pi/6} = \\ &= \sqrt{3} V_o e^{j(\omega t - \pi/6)} \end{aligned}$$

V_{AB} è $\sqrt{3}$ volte maggiore di quella dei generatori, ed è sfasata di $\pi/6$ rispetto a V_{AN} . Analogamente per V_{BC} e V_{CA} .

Esempio sui fasori:

Generatori Monofase e Trifase

• In Italia oggi $V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} = \sqrt{2} 230V$ e $V_{AB} = V_{BC} = V_{CA} = \sqrt{2} 400V$

• Per lungo tempo avevamo avuto

$$\begin{aligned} V_{AN} &= V_{BN} = V_{CN} = \sqrt{2} 220V \text{ e} \\ V_{AB} &= V_{BC} = V_{CA} = \sqrt{2} 380V \end{aligned}$$

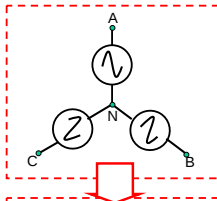


Presa trifase standard: 5 contatti :

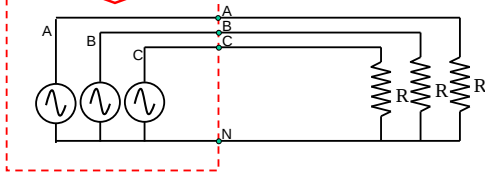
- 3 fasi (A,B,C),
- il neutro (N),
- la terra

Esempio sui fasori:

Generatori Monofase e Trifase

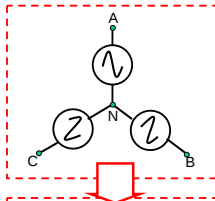


Supponiamo ora di collegare 3 carichi uguali al generatore trifase:



Esempio sui fasori:

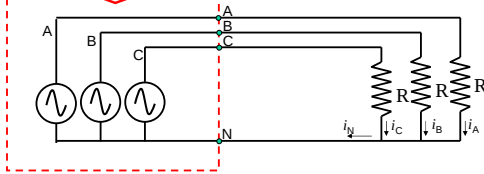
Generatori Monofase e Trifase



Supponiamo ora di collegare 3 carichi uguali al generatore trifase:

Che corrente scorre nel conduttore N ??? (N sta per neutro..)

$$i_N = i_A + i_B + i_C$$

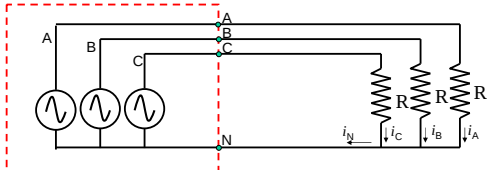


Esempio sui fasori: Generatori Monofase e Trifase

$$i_N = i_A + i_B + i_C$$

$$i_N = \frac{V_0}{R} [e^{j\omega t} + e^{j(\omega t - 2\pi/3)} + e^{j(\omega t - 4\pi/3)}] = \frac{V_0}{R} e^{j\omega t} (1 + e^{-2\pi/3j} + e^{-4\pi/3j}) =$$

$$= \frac{V_0}{R} e^{j\omega t} (1 + \cos(-2\pi/3) + j\sin(-2\pi/3) + \cos(-4\pi/3) + j\sin(-4\pi/3)) =$$

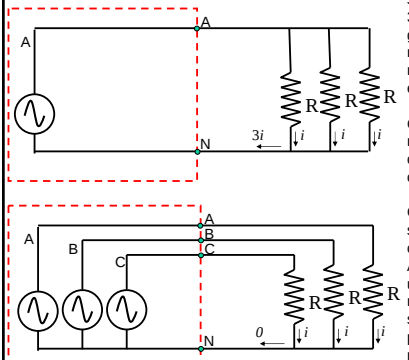
$$= \frac{V_0}{R} e^{j\omega t} (1 + (-1/2) + j(-\sqrt{3}/2) + (-1/2) + j(\sqrt{3}/2)) = 0!!!$$


Vantaggi della distribuzione trifase rispetto alla monofase

Supponiamo di dover far scorrere una corrente i in 3 carichi R . (i carichi nella grande distribuzione sono molti di più, ma si possono riunire sempre in 3 gruppi equivalenti.)

Con un generatore monofase scorrerà una corrente $3i$ sia nel filo A che nel filo N

Con un generatore trifase scorrerà una corrente i in ciascuno dei tre cavi A, B, C. Quindi si devono usare 3 cavi al posto di 2, ma possono avere una sezione 3 volte più piccola, a parità di resistenza dei cavi e quindi di perdite ohmiche

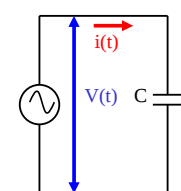


- Ecco perché la distribuzione dell'energia elettrica, con linee lunghe centinaia di chilometri e quindi con perdite ohmiche non trascurabili, viene sempre fatta con linee trifase.



Potenza elettrica in AC

- La potenza dissipata istante per istante in un componente è
- $W(t) = i(t)V(t)$
- Se usiamo tensioni alternate, W varia continuamente nel tempo, e potrebbe anche essere negativa (!)
- Esempio:



Potenza elettrica in AC

$$V = ZI \Rightarrow V = \frac{I}{j\omega C}$$

$$I = j\omega CV$$

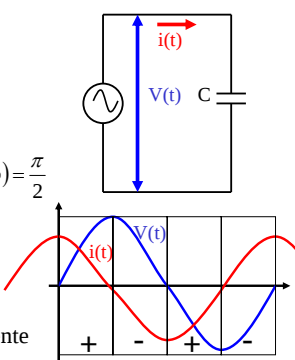
$$|I| = \omega C|V|$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega CV}{0}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$V = V_0 \sin(\omega t)$$

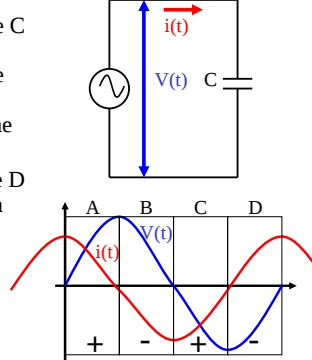
$$I = \omega CV_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

- Anticipo di 90° della corrente rispetto alla tensione.



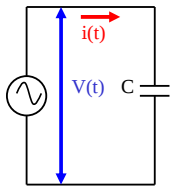
Potenza elettrica in AC

- Durante gli intervalli A e C il condensatore viene caricato dal generatore, e quindi aumenta la sua energia, e quindi gli viene fornita potenza.
- Durante gli intervalli B e D il condensatore si scarica sul generatore, e quindi perde energia, fornendo potenza al generatore: la potenza a lui fornita è negativa.



Potenza elettrica in AC

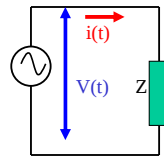
- La potenza media fornita al condensatore e' la media di $W(t)$ su un ciclo lungo $T=2\pi/\omega$.



$$\begin{aligned}\langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t)V(t)dt = \frac{V_0 I_0}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t)dt = \\ &= \frac{V_0 I_0}{\omega T} \int_0^{\omega T} \sin(\omega t) \cos(\omega t)d\omega t = \frac{V_0 I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(x)dx = \\ &= \frac{V_0 I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x) d \sin(x) = \frac{V_0 I_0}{2\pi} \left. \frac{\sin^2 x}{2} \right|_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

Potenza elettrica in AC

- In generale :

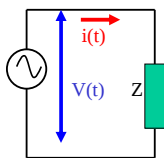


$$\begin{aligned}\langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T I(t)V(t)dt = \frac{V_0 I_0}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t)dt = \\ &= \frac{V_0 I_0}{T} \left[\int_0^T \cos(\omega t) \cos(\phi) \cos(\omega t)dt + \int_0^T \sin(\omega t) \sin(\phi) \cos(\omega t)dt \right] = \\ &= \frac{V_0 I_0}{T} \cos(\phi) \int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \frac{V_0 I_0}{\omega T} \cos(\phi) \int_0^{\omega T} \cos^2(x)dx \Rightarrow \\ \langle W \rangle &= \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\phi) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos(\phi) \Rightarrow \langle W \rangle = V_{eff} I_{eff} \cos(\phi)\end{aligned}$$

Potenza elettrica in AC

$$\langle W \rangle = V_{eff} I_{eff} \cos(\phi)$$

$$\phi = \arctan \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)}$$



- $\cos(\phi)$ e' detto Fattore di Potenza.
- In circuiti puramente reattivi (come il condensatore da solo) $\text{Re}(Z)=0$ e lo sfasamento tra tensione e corrente e' di 90° , e il fattore di potenza e' 0; la potenza media dissipata e' nulla.
- Ma nel componente scorre corrente. Quindi, ad esempio la potenza dissipata nel generatore (nella sua resistenza interna) non e' nulla !
- Nelle apparecchiature industriali con carichi induttivi, come i motori elettrici, sono necessari grandi condensatori, in modo da riportare il fattore di potenza vicino ad 1.