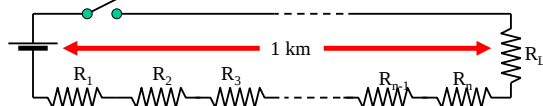


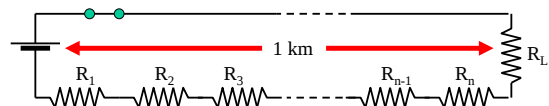
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Kirchhoff prevederebbe che appena chiuso l'interruttore scorresse *istantaneamente* una corrente $I=V/R_{tot}$
- Inoltre, se si lavora con tensioni variabili nel tempo si assume che la corrente sia *in ogni istante la stessa* in tutta la maglia.



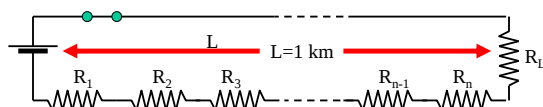
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Kirchhoff prevederebbe che appena chiuso l'interruttore scorresse *istantaneamente* una corrente $I=V/R_{tot}$
- Inoltre, se si lavora con tensioni variabili nel tempo si assume che la corrente sia *in ogni istante la stessa* in tutta la maglia.



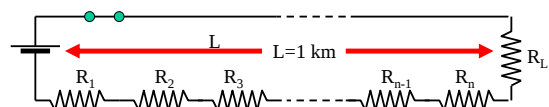
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Evidentemente questo non può essere, perché implicherebbe un trasferimento istantaneo dell'informazione dall'interruttore al carico.
- La corrente non può arrivare alla R_L prima di $t_0 + L/c$. Qui c è la velocità della luce: 30 cm/ns.



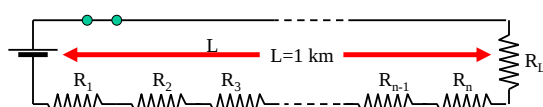
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Se ipotizziamo che i segnali si propaghino a velocità dell'ordine di c , per $L=30$ cm abbiamo un ritardo di circa 1 ns.
- Una corrente sinusoidale a $f=1$ GHz arriverà al carico R_L sfasata di circa 1 periodo.



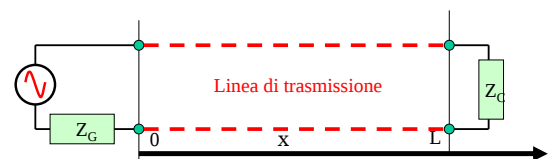
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Quindi possiamo trattare con l'approssimazione istantanea circuiti piccoli e con frequenze $\ll 1$ GHz.
- Altrimenti dovremo utilizzare le equazioni di Maxwell.



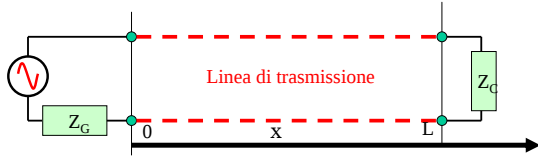
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Consideriamo ora il circuito elementare per la trasmissione di segnali su lunghe distanze, la cosiddetta "linea di trasmissione".



Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- In pratica questa puo' essere una piattina bifilare, o il cavo telefonico, o il cavo coassiale RG58 (BNC) che si usa in laboratorio o per le antenne, una pista di rame su un circuito stampato



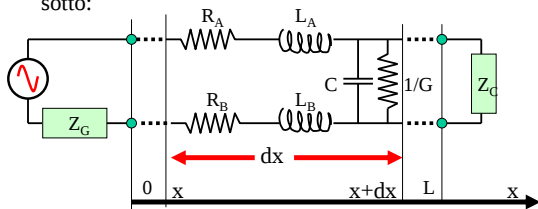
Oltre i principi di Kirchhoff – verso una trattazione elettromagnetica

- Sia $V_G(t)$ la tensione del generatore e Z_G la sua impedenza interna.
- Sia Z_C l' impedenza del carico.



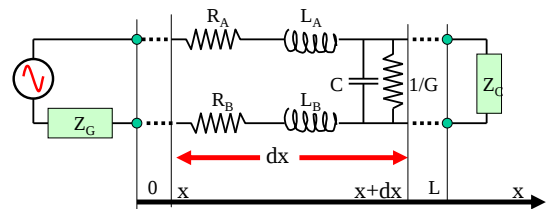
Linea di Trasmissione

- Schematizziamo la linea come due conduttori paralleli, con distanza e sezione costanti e fermi al passare del tempo (linee uniformi).
- Consideriamo un tratto dx della linea, e schematizziamolo col circuito equivalente visibile sotto:



Linea di Trasmissione

- Tra le posizioni x e $x+dx$ tensione e corrente variano, perche' ci sono *cadute di tensione* dovute a R e L , e *perdite di corrente* dovute a C e G .
- Siccome il circuito e' piccolo si puo' usare la trattazione standard:

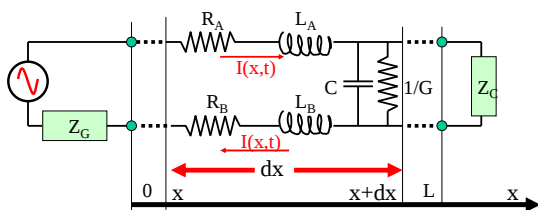


Linea di Trasmissione:

cadute di tensione

$$dV_A = V_A(x+dx, t) - V_A(x, t) = -R_A I(x, t) - L_A \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$dV_B = V_B(x+dx, t) - V_B(x, t) = R_B I(x, t) + L_B \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

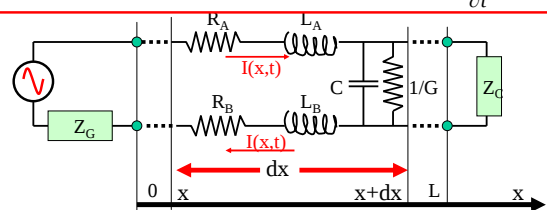


$$dV_A = V_A(x+dx, t) - V_A(x, t) = -R_A I(x, t) - L_A \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$dV_B = V_B(x+dx, t) - V_B(x, t) = R_B I(x, t) + L_B \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$

$$V(x+dx) - V(x) = [V_A(x+dx, t) - V_B(x+dx, t)] - [V_A(x, t) - V_B(x, t)]$$

$$V(x+dx) - V(x) = -(R_A + R_B) I(x, t) - (L_A + L_B) \frac{\partial}{\partial t} I(x, t)$$



$$V(x+dx) - V(x) = -(R_A + R_B)I(x,t) - (L_A + L_B) \frac{\partial}{\partial t} I(x,t)$$

$$V(x+dx) - V(x) = - \left[R_u dx + L_u \frac{\partial}{\partial t} \right] I(x,t)$$

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = - \left[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t} \right] I(x,t) \Rightarrow \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -[Z_u] I(x,t)$$

Linea di Trasmissione:
perdite di corrente

$$dI(x,t) = -GV(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} Q(x,t) = -GV(x,t) - C \frac{\partial}{\partial t} V(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} I(x,t) = - \left[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t} \right] V(x,t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} I(x,t) = -[Y_u] V(x,t)$$

Linea di Trasmissione:
equazioni differenziali e quadrupolo equivalente

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = - \left[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t} \right] I(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = - \left[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t} \right] V(x,t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -[Z_u] I(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -[Y_u] V(x,t) \end{cases}$$

Linea di Trasmissione:
Per segnali sinusoidali

$$Z = R + j\omega L \Rightarrow Z_u dx = (R_u + j\omega L_u) dx$$

$$Y = G + j\omega C \Rightarrow Y_u dx = (G_u + j\omega C_u) dx$$

Dove Z_u e Y_u sono impedenza e ammettenza della linea per unit' di lunghezza.

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -[Z_u] I(x) \\ \frac{\partial I(x)}{\partial x} = -[Y_u] V(x) \end{cases} \quad \text{Equazioni dei Telegrafisti}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -[Z_u] \frac{\partial}{\partial x} I(x) = Z_u Y_u V(x) \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = -[Y_u] \frac{\partial}{\partial x} V(x) = Z_u Y_u I(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = Z_u Y_u V(x) = \gamma^2 V(x) \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} = Z_u Y_u I(x) = \gamma^2 I(x) \end{cases} \quad \text{Equazioni dei Telegrafisti}$$

$$\gamma^2 = Z_u Y_u$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 V(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 I(x) = 0 \end{cases}$$

Equazioni dei
Telegrafisti

la soluzione e' del tipo

$$c_1 e^{-\gamma x} + c_2 e^{+\gamma x} \quad \text{quindi}$$

$$\vec{V}(x) = \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x}$$

dove le costanti A_1 e A_2 contengono le fasi;
definendo

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\bar{Z}_u \bar{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L)(G_u + j\omega C)}$$

$$\vec{V}(x) = \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x} = \vec{A}_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} + \vec{A}_2 e^{+(\alpha + j\beta)x}$$

Soluzione per V

$$\vec{V}(x) = \vec{A}_1 e^{-\gamma x} + \vec{A}_2 e^{+\gamma x} =$$

$$= \vec{A}_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} + \vec{A}_2 e^{+(\alpha + j\beta)x} =$$

$$= A_1 e^{j\varphi_1} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + A_2 e^{j\varphi_2} e^{+\alpha x} e^{j\beta x}$$

e quindi

$$V(x, t) = \text{Re} \{ \vec{V}(x) e^{j\omega t} \}$$

$$= A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad \text{Onda progressiva}$$

$$+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad \text{Onda regressiva}$$

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad \text{Onda progressiva}$$

$$+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad \text{Onda regressiva}$$

- L' ampiezza decresce esponenzialmente con la distanza, a causa delle dissipazioni R e G
- l' onda progressiva A_1 e' grande all' inizio della linea e si smorza
- l' onda regressiva A_2 e' grande alla fine della linea e si smorza "rimbalzando indietro"

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad \text{Onda progressiva}$$

$$+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad \text{Onda regressiva}$$

- Vediamo perche' l' onda A_1 e' detta progressiva.
- La velocita' (di fase) v e' la velocita' che deve avere un osservatore viaggiante lungo la linea per vedere sempre la stessa fase dell' onda (ad esempio viaggiando a cavalcioni di una cresta o in fondo a un ventre).
- La condizione di fase costante e'

$$\omega t - \beta x + \varphi_1 = K \Rightarrow \frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \varphi_1) = 0$$

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow v = \frac{\omega}{\beta}$$

Velocita' di fase
positiva per A_1

- La soluzione in regime sinusoidale e'

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad \text{Onda progressiva}$$

$$+ A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad \text{Onda regressiva}$$

- Le due onde si propagano nella linea con velocita' di fase
($\beta = \text{Im}(\gamma) = \text{Im}(\sqrt{Z_u Y_u})$)

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{Per l'onda progressiva}$$

$$v = -\frac{\omega}{\beta} \quad \text{Per l'onda regressiva}$$

Caso non dissipativo:

- Nel limite di $R_u=0$ e $G_u=0$, si calcola facilmente

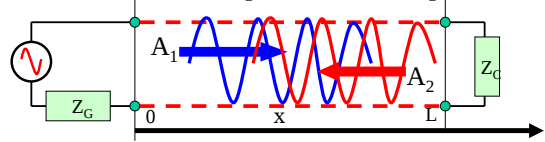
$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\bar{Z}_u \bar{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} =$$

$$\Rightarrow \sqrt{(j\omega L_u)(j\omega C_u)} = j\omega \sqrt{L_u C_u}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}; \quad \tau = \sqrt{L_u C_u}$$

$$V(x, t) = A_1 \cos[\omega(t - x/v) + \varphi_1] +$$

$$+ A_2 \cos[\omega(t + x/v) + \varphi_2]$$



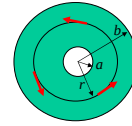
Esempio: Cavo coassiale RG-58



Autoinduzione in un cavo coassiale

Coefficiente di autoinduzione L definito da: $\Phi = Li$

Dove Φ è il flusso di B : $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

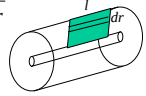


Nel caso di un cavo coassiale percorso da corrente i il campo all'interno del cavo è tangenziale, e la sua intensità a distanza r dall'asse si ricava dal teorema della circuitazione:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu i \rightarrow B 2\pi r = \mu i \rightarrow B(r) = \frac{\mu i}{2\pi r}$$

Allora si può calcolare il flusso di B attraverso una superficie rettangolare interna al cavo, lunga l :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_a^b B(r) l dr = l \frac{\mu i}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = l \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$



E quindi l'induttanza per unità di lunghezza è

$$L_u = \frac{L}{l} = \frac{\Phi}{il} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Esempio: cavo coassiale RG-58

$$\begin{cases} C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu/\epsilon} \ln(b/a) \end{cases}$$

• Numeri tipici per l'RG-58:

□ $\epsilon_R = 2$, $v = c/\sqrt{2}$

• $C_u = 100$ pF/m

• $R_o = 50\Omega$

• $v = 20$ cm/ns

□ $\tau = 5$ ns/m

• Quindi un cavo di 100m introduce un ritardo di 500 ns.

Caso dissipativo:

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{\bar{Z}_u \bar{Y}_u} = \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} \\ &= \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \frac{C_u R_u}{L_u C_u} + j\omega \frac{L_u G_u}{L_u C_u} - \omega^2 \frac{L_u C_u}{L_u C_u}} \\ &= \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \left(\frac{R_u}{L_u} + \frac{G_u}{C_u} \right) - \omega^2} \end{aligned}$$

Caso non distortente:

$$\gamma = \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\frac{R_u G_u}{L_u C_u} + j\omega \left(\frac{R_u}{L_u} + \frac{G_u}{C_u} \right) - \omega^2}$$

Quando $\frac{R_u}{L_u} = \frac{G_u}{C_u}$ cioè le due costanti di tempo sono uguali,

$$\gamma = \sqrt{L_u C_u} \sqrt{\left(\frac{R_u}{L_u} \right)^2 + j\omega 2 \left(\frac{R_u}{L_u} \right) - \omega^2} = \sqrt{L_u C_u} \left[\frac{R_u}{L_u} + j\omega \right]$$

E quindi $\begin{cases} \alpha = \sqrt{L_u C_u} \frac{R_u}{L_u} = R_u \sqrt{\frac{C_u}{L_u}} \Rightarrow \text{L'attenuazione non dipende da } \omega \\ \beta = \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \text{ La solita, indipendente da } \omega \end{cases}$

Tutte le onde componenti il segnale si propagano nello stesso modo: il segnale non viene distorto.

Caso di alte frequenze

per $G_u \rightarrow 0$ e $R_u \ll \omega L_u$ (e buon isolamento):

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R_u + j\omega L_u)(G_u + j\omega C_u)} \cong \sqrt{j\omega C_u j\omega L_u \left(1 + \frac{R_u}{j\omega L_u} \right)} = \sqrt{\omega^2 C_u L_u \left(1 - j \frac{R_u}{\omega L_u} \right)} \\ &\cong j\omega \sqrt{C_u L_u} \sqrt{1 - j \frac{R_u}{\omega L_u}} \cong j\omega \sqrt{C_u L_u} \left(1 - j \frac{R_u}{2\omega L_u} \right) \\ &= \frac{R_u}{2 \sqrt{\frac{L_u}{C_u}}} + j\omega \sqrt{C_u L_u} \end{aligned}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L_u C_u} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}$$

$$\alpha = \frac{R_u}{2 \sqrt{\frac{L_u}{C_u}}} = \frac{R_u}{2 R_o}$$

$R_o = \sqrt{\frac{L_u}{C_u}}$ Impedenza della Linea, ci serve dopo

Soluzione per la corrente

(sinusoidale)

- Dall'eq. dei telegrafisti

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= -[Z_u]I(x) \Rightarrow I(x) = -\frac{1}{Z_u} \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{Z_u} \frac{\partial}{\partial x} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} + \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{\gamma}{Z_u} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] = \\ &= \frac{\sqrt{Z_u Y_u}}{Z_u} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_u}{Y_u}}} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}]\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{Z_u}{Y_u}} \text{ e' una impedenza } \bar{Z}_o = Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}}$$

Soluzione

per la corrente

(sinusoidale)

$$I(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \bar{I}(x) e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{Z_o} e^{j\psi} [\bar{A}_1 e^{-\gamma x} - \bar{A}_2 e^{+\gamma x}] \right\}$$

$$I(x, t) = \frac{A_1}{Z_o} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1 - \psi) + \frac{A_2}{Z_o} e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2 - \psi)$$

Onda progressiva
Onda regressiva

- Da confrontare con:

$$V(x, t) = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) + A_2 e^{+\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2)$$

- Si vede che per ciascuna onda il rapporto tra tensione e corrente vale Z_o . Inoltre c'è uno sfasamento $-\psi$.

Soluzione per la corrente

(sinusoidale)

$$\psi = \arctg \left\{ \frac{\operatorname{Im}(\bar{Z}_o)}{\operatorname{Re}(\bar{Z}_o)} \right\} = \frac{1}{2} \arctg \left\{ \frac{\omega(G_u L_u - R_u C_u)}{R_u G_u + \omega^2 L_u C_u} \right\}$$

- Lo sfasamento è nullo

- Per linea non distorta $G_u L_u = R_u C_u$
- Per linea non dissipativa $R_u \rightarrow 0 \quad G_u \rightarrow 0 \quad \bar{Z}_o \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$
- Per alte frequenze $R_u \ll \omega L_u \quad G_u \ll \omega C_u$

$$\bar{Z}_o = Z_o e^{j\psi} = \sqrt{\frac{R_u + j\omega L_u}{G_u + j\omega C_u}} \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$$

$$\bar{Z}_o \rightarrow \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = R_o$$

- Cioè l'impedenza si riduce a una resistenza.

Segnali Impulsivi

- Per segnali non sinusoidali la trattazione si complica molto. Ma abbiamo visto che almeno nel caso non dissipativo le diverse componenti sinusoidali si propagano tutte allo stesso modo.
- Studiamo quindi questo caso in generale:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -[R_u + L_u \frac{\partial}{\partial t}] I(x, t) \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -[G_u + C_u \frac{\partial}{\partial t}] V(x, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -L_u \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -C_u \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} \end{cases}$$

- Derivando la prima rispetto a x e la seconda rispetto a t :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = -L_u \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x \partial t} = -C_u \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - C_u L_u \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Equazione delle onde

Segnali Impulsivi

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} - C_u L_u \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

- La soluzione generale è del tipo

$$V(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad \text{con} \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}}$$

- Analogamente si trova l'equazione per I , che ha soluzione

$$I(x, t) = g_1(x - vt) + g_2(x + vt)$$

- Sostituendo nella $\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -L_u \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$ Si ottiene

$$\begin{cases} V(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \\ I(x, t) = \frac{1}{R_o} (f_1(x - vt) - f_2(x + vt)) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} \end{cases}$$

Segnali Impulsivi

$$\begin{cases} V(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \\ I(x, t) = \frac{1}{R_o} (f_1(x - vt) - f_2(x + vt)) \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} \end{cases}$$

- Ci aspettiamo quindi le solite onde progressive e regressive
- Ad alte frequenze ci aspettiamo anche che siano attenuate durante la loro propagazione di $\exp(-\alpha x)$.
- Inoltre ci aspettiamo che l'impedenza della linea (rapporto tra V e I per ciascuna delle onde) sia R_o .

$$\begin{cases} C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d) \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}}$$

Segnali Impulsivi

$$\begin{cases} C_u = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)} \\ L_u = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{C_u L_u}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R}} \\ R_o = \sqrt{L_u / C_u} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mu / \epsilon} \ln(D/d) \end{cases}$$

- Numeri tipici per l' RG-58:

$\epsilon_R=2$, $v=c/\sqrt{2}$

$C_u=100$ pF/m

$R_o=50\Omega$

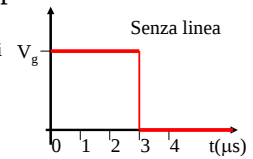
$v=20$ cm/s

$\tau=5$ ns/m

- Quindi un cavo di 100m introduce un ritardo di 500 ns.

Segnali Impulsivi

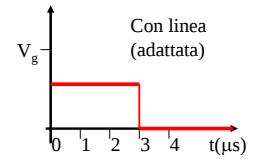
- Supponiamo di collegare la linea ad un generatore con R interna pari a R_g , e che genera un impulso ampio V_g per un tempo T.



- Il generatore "vede" un carico di impedenza R_o , almeno finché non arriva l' onda regressiva dall' altra estremità.

- Quindi nel punto $x=0$ a $t=0$ e per un tempo $2t_f=2\ell/v$ si ha

$$\begin{cases} V(x=0, t) = V_{in} = V_g \frac{R_o}{R_o + R_g} \\ I(x=0, t) = I_{in} = V_g \frac{1}{R_o + R_g} \end{cases}$$



Linea Adattata

- Al tempo $t=\ell/v$ il segnale arriva all' estremità opposta della linea, attenuato di $\exp(-\alpha\ell)$:

$$\begin{cases} V(x=\ell, t) = V_{out} = V_{in} e^{-\alpha\ell} \\ I(x=\ell, t) = \frac{V_{out}}{R_o} \end{cases}$$

- La seconda deriva dal fatto che c'è solo l' onda progressiva.
- Quello che avviene successivamente dipende da come è **terminata** la linea. Supponiamo che sia chiusa su una resistenza R_c . Nell' attimo in cui il segnale arriva all' estremità trova la resistenza R_c che chiude la linea.
- Se $R_c=R_o$ non c'è cambiamento, perché $V(x,t)/I(x,t)=R_o$ come era nella linea. La resistenza R_o assorbe completamente ed esattamente le tensioni e correnti arrivate in quel punto, e quindi non parte l' onda regressiva – non c'è riflessione. Si dice che la linea è **adattata**.

Linea Aperta

- Se la linea è **aperta** ($R_c=\infty$) in $x=\ell$ ci deve essere sempre $I(x=\ell)=0$. Possiamo garantire che questo avvenga sovrapponendo all' onda progressiva che è arrivata fin lì una onda regressiva (riflessa) tale che le correnti generate dalle due onde si annullino perfettamente. Avremo quindi

$$0 = I(x=\ell, t) = I_{out} + I_{rifl} \Rightarrow I_{rifl} = -I_{out}$$

e anche $V_{rifl} = V_{out}$

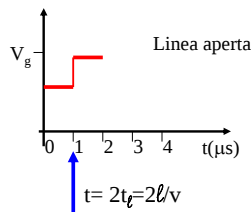
definendo il coefficiente di riflessione $\Gamma = \frac{V_{rifl}}{V_{out}}$

si ha in questo caso $\Gamma = 1$. Quindi sommando le due onde :

$$V(x=\ell, t=t_f) = V_{rifl} + V_{out} = 2V_{in} e^{-\alpha\ell}$$

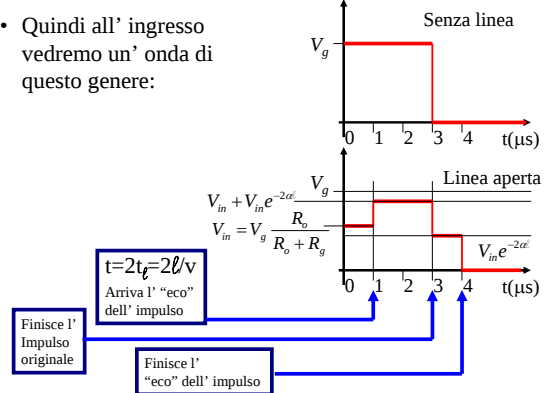
Linea Aperta

- Quest' onda riflessa comincia a viaggiare indietro lungo la linea, e al tempo $t=2t_f=2\ell/v$ arriva all' ingresso della linea, attenuata di un ulteriore fattore $\exp(-\alpha\ell)$.
- A $t=2t_f$ la tensione in ingresso sale quindi a $V_{in} + V_{in} e^{-2\alpha\ell}$



Linea Aperta

- Quindi all' ingresso vedremo un' onda di questo genere:

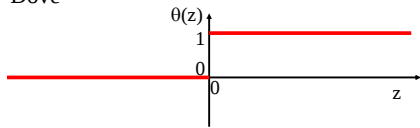


Linea Aperta

- In ogni punto della linea avremo la sovrapposizione di onda progressiva e onda regressiva: per $t_\ell < t < 2t_\ell$

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_{in} e^{-\alpha t} + V_{out} e^{-\alpha(\ell-x)} \theta[(t-t_\ell) - (\ell-x)/v] = \\ &= V_{in} e^{-\alpha t} + V_{in} e^{-\alpha t} e^{-\alpha(\ell-x)} \theta[(t-t_\ell) - (\ell-x)/v] = \\ &= V_{in} \{ e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(2\ell-x)} \theta[(t-t_\ell) - (\ell-x)/v] \} \end{aligned}$$

- Dove



Linea in corto

- Se la linea e' **in corto** ($R_c=0$) in $x=\ell$ ci deve essere sempre $V(x=\ell)=0$. Possiamo garantire che questo avvenga sovrapponendo all'onda progressiva che e' arrivata fin li' una onda regressiva (riflessa) tale che le tensioni generate dalle due onde si annullino perfettamente. Avremo quindi

$$0 = V(x=\ell, t) = V_{out} + V_{rfl} \Rightarrow V_{rfl} = -V_{out}$$

$$\text{e quindi } \Gamma = \frac{V_{rfl}}{V_{out}} = -1$$

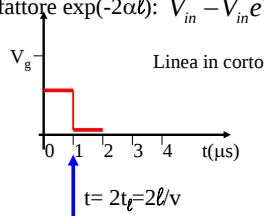
Quindi sommando le due onde:

$$V(x=\ell, t=t_\ell) = V_{rfl} + V_{out} = 2V_{in} e^{-\alpha \ell}$$

$$I(x=\ell, t=t_\ell) = \frac{1}{R_o} (V_{out} - V_{rfl}) = 2 \frac{V_{out}}{R_o}$$

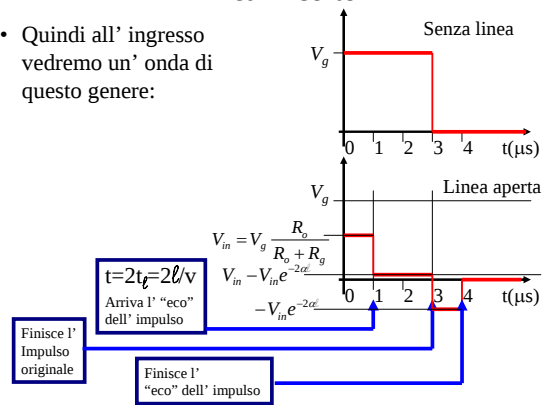
Linea in corto

- Quest'onda riflessa comincia a viaggiare indietro lungo la linea, e al tempo $t = 2t_\ell = 2\ell/v$ arriva all'ingresso della linea: Se non fosse attenuata annullerebbe perfettamente la tensione del generatore. Ma e' attenuata un fattore $\exp(-2\alpha\ell)$: $V_{in} - V_{in} e^{-2\alpha\ell}$



Linea in corto

- Quindi all'ingresso vedremo un'onda di questo genere:



In generale

- Per R_c qualsiasi ricaviamo il coefficiente di riflessione imponendo la legge di Ohm per R_c :

$$\frac{V(x=\ell, t=t_\ell)}{I(x=\ell, t=t_\ell)} = R_c$$

$$\frac{V_{in} e^{-\alpha \ell} + \Gamma V_{in} e^{-\alpha \ell}}{\frac{V_{in} e^{-\alpha \ell}}{R_o} - \frac{\Gamma V_{in} e^{-\alpha \ell}}{R_o}} = R_c \Rightarrow \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{R_c}{R_o}$$

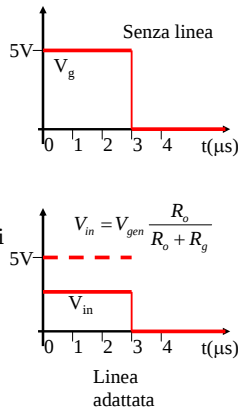
- Si verifica facilmente che Γ vale 0 per $R_c=R_o$, vale 1 per R_c infinita e vale -1 per $R_c=0$.

- In ingresso $V(x=0, t=2t_\ell) = V_{in} (1 + \Gamma e^{-2\alpha \ell})$

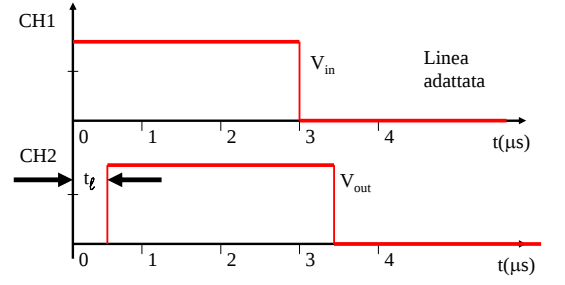
Misure sulla linea di Trasmissione

- Collegare il generatore all'oscilloscopio (CH1).
- Collegare l'uscita SYNCHRO del generatore all'ingresso TRIGGER ESTERNO dell'oscilloscopio, e commutare su EXT il selettore del modo di Trigger.
- Utilizzare una frequenza $f=50\text{kHz}$ e scegliere l'onda quadra.
- Agire sui comandi di ampiezza, offset e duty cycle in modo da avere una V_g di 5V per $0 < t < 3 \mu s$, 0V per $3\mu s < t < 20\mu s$.

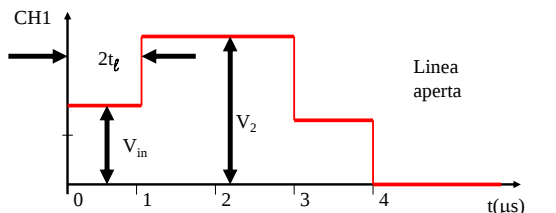
- Utilizzare una T per connettere il segnale dal CH1 dell'oscilloscopio all'ingresso della linea.
- Connettere l'altra estremità della linea al CH2 dell'oscilloscopio, con una T in modo da chiudere la linea con una resistenza da 50Ω (tappo a 50Ω).
- Si dovrebbe essere in condizioni di linea adattata (assenza di riflessioni).
- Misurare l'ampiezza del segnale applicato alla linea V_{in} .
- Ricavare R_o supponendo che la R_g sia di 50Ω .



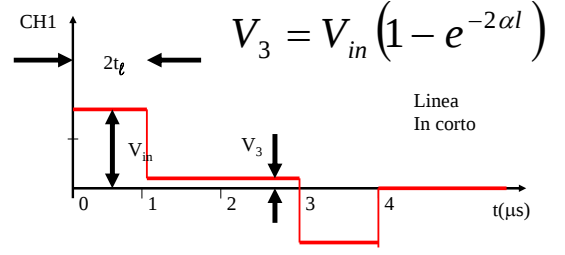
- Misurare il ritardo tra CH2 e CH1 e da questo ricavare la velocità di propagazione nella linea, sapendo che la lunghezza è di 100m.



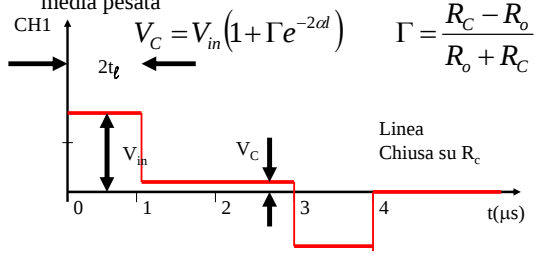
- Togliere il tappo a 50Ω e osservare l'onda riflessa in CH1.
- Misurare $2t_l$, V_{in} , V_2 ,
- Stimare l'attenuazione α da

$$V_2 = V_{in} (1 + e^{-2\alpha l})$$


- Cortocircuitare la linea con un tappo a 0Ω e osservare l'onda riflessa in CH1.
- Misurare $2t_l$, V_{in} , V_3 ,
- Stimare l'attenuazione α da

$$V_3 = V_{in} (1 - e^{-2\alpha l})$$


- Connettere un BNC-coccodrillo all'uscita, e connettere una resistenza di carico $R_c = 10, 22, 33, 47, 100, 330\Omega$. Misurare $2t_l$, V_{in} , V_c ,
- Stimare R_o per ogni R_c dalle relazioni, e poi fare la media pesata

$$V_c = V_{in} (1 + \Gamma e^{-2\alpha l}) \quad \Gamma = \frac{R_c - R_o}{R_o + R_c}$$


Elaborazioni da presentare all'esame (basate sui dati presi in laboratorio)

- Studio dell'extrazione in un circuito RLC serie
- Misura della resistenza interna dell'induttanza in un circuito RLC serie
- Misura dell'impedenza di una linea di trasmissione
- Misura della resistenza interna del generatore di segnali